1. **Teorie podobnosti**

Každý fyzikální proces může být popsán úplnou fyzikální rovnicí, přičemž jde obvykle o rovnici diferenciální. Úplná fyzikální rovnice je taková, která bere v úvahu všechny závislosti mezi fyzikálními veličinami, tj. mezi veličinami mající v daném procesu rozhodující význam. Cílem teorie podobnosti je nalézt vztahy pro přepočet fyzikálních veličin mezi geometricky podobnými situacemi.

1. **Rozměrová analýza**

**Přiklad 1:**

Uvažujme například, že chceme zjistit vztah pro rychlost, když známe kinetickou energii a hmotnost tělesa. Zjistíme, že jednotka pro energii má rozměr , hmotnost je v kg a rychlost uvedena v , K bude bezrozměrná konstanta:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1) |

uvedeno v základních jednotkách:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2) |

Porovnáním mocnin koeficientů získáme:
pro kilogram:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3) |

pro metr:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4) |

pro sekundu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5) |

Obecně vyjadřujeme tak každou jednotku. Z výše uvedených vztahů pro metr a pro sekundu zjistíme, že tyto vztahy jsou shodné, to platí pouze pro námi určovaný vztah, kde totiž hledáme jen dvě neznámé (α,β). Pokud bychom měli více rovnic, než neznámých, (rovnice (2.3), (2.4), (2.5) nejsou stejné), tak to poukazuje na chybu, že jsme nevyjádřili všechny veličiny na kterých hledaná neznámá, v daném případě rychlost, závisí.

Vyřešením rovnic získáme:

Dosazením do rovnice (2.1) získáme výsledný vztah:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.6) |

konstantu K bychom zjistili měřením, jinak z fyziky víme, že je to .

* 1. **Základní teorémy rozměrovosti veličin**

Rozměrová analýza se opírá o dva základní teorémy. První vyjadřuje rozměrovou nezávislost na zvolené soustavě jednotek měření (my se v textu zaměříme pouze na jednotky SI). Rozměrové vyjádření libovolných jednotek lze provést ve tvaru součinů mocnin základních jednotek, jako v motivačním příkladu 1.

Druhý teorém je vhodný pro teorii podobnosti a modelování. Z hlediska rozměrovosti lze rovnici, která popisuje fyzikální proces vyjádřit jedinou soustavou jednotek měření. Všechny členy rovnice mají stejný rozměr. Tuto vlastnost fyzikálních rovnic nazýváme rozměrová homogennost a představuje základ teorie rozměrovosti.

Jedná se o metodu prakticky jednoduchou, která ovšem neumožňuje úplné řešení problému, ani objasnění toho, co se děje uvnitř zkoumaného jevu (jeho vnitřních vazeb).

**Rozměrová matice**

Uvedeme tabulku základních fyzikálních veličin dle soustavy SI

|  |  |
| --- | --- |
| hmotnost m | kilogram [kg] |
| délka l | metr [m] |
| elektrický proud I | ampér [A] |
| čas t | sekunda [s] |
| teplotní rozdíl T | kelvin [K] |
| svítivost Is | kandela [cd] |
| látkové množství nn | mol [mol] |
| rovinný úhel μ | radián [rad] |
| prostorový úhel Ω | steradián [sr] |

*Tab.1:* *Základní veličiny a jednotky v soustavě SI*

Mějme n fyzikálních veličin charakterizující systém x1, x2, …, xn popisující zkoumaný problém. Každou fyzikální veličinu můžeme rozepsat pomocí základních jednotek SI (m, kg, s, K, A).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.7) |

,kde a1j až a5j jsou neznámé exponenty. Jednotlivé veličiny můžeme zapsat do rozměrové matice A:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.8) |

Vyřešením této soustavy získáme jednotlivé koeficienty.

**Pi teorém**

Určuje ze známého počtu charakteristických působících veličin a zvolených základních rozměrových jednotek, kolik bezrozměrových proměnných vystupuje ve zkoumaném fyzikálním procesu. Zkoumaný fyzikální jev je obecně vyjádřen N fyzikálními veličinami x, ve tvaru rovnice:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.9) |

**Formulace Pí- teorému podle Buckinghama:**

Počet bezrozměrových složených kritérií kk je roven rozdílu všech rozměrově rozdílných veličin n, působících v procesu a počtu základních rozměrů r. Pro složená kritéria platí:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.10) |

**Jednoduché kritérium:**

Je bezrozměrová veličina, která vyjadřuje poměr mezi dvěma rozměrově stejnými fyzikálními veličinami. Pokud v souboru působících veličin jsou veličiny rozměrově stejné (délkové souřadnice x, y, z a charakteristická délka L) pak je proces popsán nejen složenými ale i jednoduchými kritérií. Pro všechny kritéria Buckihamův teorém nelze vždy použít. V tomto použijeme doplněk základního Pi–teorému: Jsou-li v souboru působících veličin veličiny rozměrově stejné, pak počet jednoduchých kritérií (ks) se rovná celkového počtu N působících veličin a počtu veličin s rozdílnými rozměry n. Celkový počet kritérií k:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.11) |

Postup podle Buckinghamova teorému „vidí“ pouze rozměry veličin, nikoli jejich interpretaci. Přesto je užitečné řešení problému rozměrovou analýzou začít: může přinést mnoho informací při malé námaze.

**Huntleyův pojem vektorovosti fyzikálních veličin**

Jde o důležité zdokonalení Pí- teorému. Základní myšlenka spočívá v možnosti rozšířit základní rozměry a tak snížit počet neznámých při řešení rozměrové rovnice (matice). Využíváme toho, že v kartézských souřadnicích má sledovaná fyzikální veličina složky x, y, z. Zdokonalení ukážeme na příkladu:

**Příklad 2:**

Určete vztah pro hmotnostní průtok vazké tekutiny proudící potrubím kruhového průřezu.

Předpokládáme, že hmotnostní průtok závisí na těchto veličinách:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Veličina | Jednotka | Jednotka v základních rozměrech |
| Tlak kapaliny p | Pa | kg·m-1·s-2 |
| Hustota kapaliny ρ | kg·m-3 | kg·m-3 |
| Dynamická viskozita η | Pa·s | kg·m-1·s-1 |
| Poloměr potrubí r | m | m |

*Tab. 2:* *Veličiny a jednotky, na kterých závisí hmotnostní průtok*

Z toho můžeme napsat jako:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.12) |

1. Řešení pomocí klasického Pí-teorému:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.13) |

Porovnáním exponentů vychází:

pro kilogram:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.14) |

pro metr:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.15) |

pro sekundu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.16) |

Jelikož máme pouze 3 rovnice a 4 neznámé, tak jednu volíme jako parametr a proto nelze fyzikální případ řešit, jelikož budeme mít jeden stupeň volnosti. Tudíž je tento postup nevhodný.

1. Řešení pomocí Huntleyova pojmu vektorovosti:

V případě hmotnosti rozlišíme tento pojem jako míru množství látky a jako míry setrvačnosti (. Tím zvýšíme počet rozměrů o jeden a získáme 4 rovnice pro 4 neznámé.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.17) |

pro kilogram jako míra množství látky:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.18) |

pro kilogram jako míra setrvačnosti:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.19) |

pro metr:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.20) |

pro sekundu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.21) |

Odtud vychází:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.22) |

Postup pomocí Huntleyova pojmu vektorovosti vyžaduje znalost fyzikální podstaty jednotlivých veličin a jejich působení ve zkoumaném procesu.

1. **Teorie podobnosti**

Pojem podobnost byl původně zaveden v geometrii, odkud jej převzaly další vědní obory. Dva plošné nebo prostorové útvary jsou si geometricky podobné tehdy, když lze jeden umístit uvnitř nebo vně druhého tak, že při rovnoměrné deformaci jednoho z nich se oba ztotožní. Rovnoměrnou deformací rozumíme takovou deformaci, při které se všechny lineární rozměry zmenší nebo zvětší v určitém poměru. Úhly se při rovnoměrné deformaci nemění.

**Typy podobnostních modelů**

1. Fyzikální modely

Fyzikální model je v podstatě zmenšení model daného zařízení a díky tomu je svým informačním obsahem a podobnostním přiřazením nejblíže originálu. V tom je nezastupitelné a váha jim získané informace je vyšší než u modelů pracujících na matematické podobnosti. Fyzikální model je v podstatě zmenšení model daného zařízení.

Těsný vztah mezi modelem a originálem u fyzikálního modelu však má i stinnou stránku. Zhotovení fyzikálního modelu, nebo experiment s přirozeným modelem jsou obvykle finančně i časově náročnější, než použití modelu založeného na matematické podobnosti. To je často důvod k odklonu od experimentu s fyzikálním modelem. Někdy se tento problém řeší kompromisem a vytváří se neúplný fyzikální model zkoumaného objektu.

Fyzikální modelování

1. Matematické modely:

Daný jev popíšeme matematickými rovnicemi, které vyřešíme. Problém je, že některé jevy popsat matematicky nedokážeme úplně, proto se nedají použít u všech jevů.

V následujícím textu se budeme zabývat pouze fyzikálními modely.

* 1. **Užití fyzikální podobnosti**

Z geometrie je známo, že pokud jsou útvary navzájem podobné, transformují se úhly mezi těmito útvary identicky, délky se násobí poměrem délek, plochy druhou a objemy třetí mocninou tohoto poměru. Cílem teorie podobnosti je nalézt vztahy pro přepočet fyzikálních veličin mezi geometricky podobnými situacemi.

Vypracování teorie fyzikální podobnosti bylo podníceno, do současnosti trvajícími, problémy s řešením rovnice proudění; bez teorie podobnosti nebylo možno proudění tekutin vyšetřovat na zmenšených modelech. Stavba vodních děl, letadel, nalezení vztahů pro řešení hydrodynamických čerpadel byla bez možnosti užití modelů nákladná. Teorie podobnosti se ovšem na hydrodynamiku neomezuje, někteří rozlišují podobnost tepelnou, mechanickou, elektromagnetickou atd.

**Užití teorie podobnosti v tepelné technice**

Koeficient přestupu tepla α závisí na mnoha faktorech

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1) |

, kde λ je tepelná vodivost tekutiny [W m-1 K-1]
 β je součinitel tepelné roztažnosti [K-1]
 υ je kinematická viskozita [Nsm-2]
 g je tíhové zrychlení [ms-2]
 v je rychlost proudění tekutiny [ms-1]

Výpočet α se pokusíme zjistit pomocí následujících rovnic:

Stavová rovnice plynů

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2) |

, kde p je tlak [Pa]
 V je objem [m3]
 n je molární hmotnost [mol]
 R je molární plynová konstanta [J·K-1·mol-1]
 T je absolutní teplota [K]

Navier-Stokesova rovnice

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.3) |

, kde ρ je hustota [kg· m-3]
 t je čas [s]
 je rychlost [m·s-1]
 je operátor [m-1]
 ν je kinematická viskozita [*N*·*s*·*m-2*]

Rovnice kontinuity

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.4) |

Obvykle jsou rovnice s rychlostí problém, proto se musíme α pokusit změřit. Protože je ale koeficient přestupu tepla závislý na mnoha faktorech, a s tím souvisí mnoho měření, tak by bylo dobré si tuto úlohu zjednodušit pomocí teorie podobnosti nebo rozměrové analýzy. V našem případě budeme α zjednodušovat podle teorie podobnosti.

**Teorie podobnosti pro konvekci**

V následujícím textu budeme označovat veličiny prvního rozměru indexem 1, a veličiny druhého rozměru (s prvním podobného) indexem 2.



*Obr. 1: Případ konvekce*

Nyní si ukážeme teorii podobnosti pro případ konvekce. Předpokládáme, že u rozhraní pevná látka-tekutina (tekutinou obvykle myslíme vzduch) se voda nepohybuje (obrázek 1). Poté musí platit následující:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.5) |

Předpokládáme nyní, že máme dva rozměrově odlišné, ale podobné tvary jako na výše uvedeném obrázku. Pak platí následující rovnice:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.6) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.7) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.8) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.9) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.10) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.11) |

Závislost je opačná z následujícího důvodu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.12) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.13) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.14) |

Jelikož jsou si tyto tvary podobné, tak musí platit, že mohu rovnici (3.7) vyjádřit z rovnic (3.8)- (3.11) :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.15) |

Tuto rovnici lze upravit:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.16) |

Jelikož tato rovnice je rovnicí pro rozměr 1, pokud platí:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.17) |

pak můžeme dosadit rovnice (3.9)- (3.11) do rovnice (3.17) a říci, že je to Nusseltovo číslo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.18) |

Z toho vychází, že Nusseltovo číslo závisí u podobných uspořádání pouze na x, a to nazveme Dchar (charakteristický rozměr).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.19) |



*Obr. 2: Výkon sdílený mezi něčím nepohybujícím se a tekutinou*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.20) |

Z toho konvekce:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.21) |

Nusseltovo číslo určuje poměr celkového přenosu tepla v systému k přenosu tepla vedením

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.22) |

Pro proudění

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.23) |

, kde η je dynamická viskozita [Pa.s]
 f je součinitel respektující tlakové ztráty [Pa.m-1]

Výsledné rovnice jsou potom:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.24) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.25) |

Označíme u rovnice číslo (3.24) a u druhé rovnice číslo (3.25)

koeficient a [m2.s-1] označuje teplotní vodivost, rozhoduje o přechodu tepla mezi dvěma medii a koeficient ν [m2.s-1] určuje kinematickou viskozitu.

Samotné Nusseltovo číslo závisí na celé řadě dalších podobnostních čísel, jak se dozvíme dále. Pro určení Nusseltova čísla a následně koeficientu přestupu tepla konvekcí musíme vypočíst další podobnostní čísla.

Určení bezrozměrného Prandtlova čísla.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.26) |

Tím získáváme, že

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.27) |

Jde o látkovou vlastnost závislou na materiálu a teplotě.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.28) |

Na základě rovnic 3.8 až 3.11 zavedeme

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.29) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.30) |

stejná hmotnost, ale 2 x větší, díky koeficientu x2 je třeba ohřívat 4 krát déle.

Další číslo, na kterém závisí číslo Nusseltovo je číslo Reynoldsovo, které se uplatňuje při turbulentním proudění:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.31) |

Opět zavedeme:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.32) |

Definujeme Reynoldsovo číslo [-]:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.33) |

Zavedeme součinitel teplotní dilatace látek β [K-1]:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.34) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.35) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.36) |

Napíšeme rovnici proudění:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.37) |

Upravíme do tvaru:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.38) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.39) |

Samovolná konvekce, zavedeme Grashoffovo číslo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.40) |

A získáváme, že Nusseltovo podobnostní číslo závisí hlavně na číslech Prandtlově, Reynoldsově a Grashoffově:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.41) |

 ,kde Pr se uplatňuje vždy, Re uplatňuje při proudění a Gr při přirozené (samovolné) konvekci.

Pro konkrétní výpočet Nusseltova čísla využijte odborné literatury

**Využití podobnosti v modelování**

Uvažujme, že chceme zjistit odpor masivního vodiče, jehož tvar je znázorněn na obrázku 3. Známe přitom rezistivitu ρ [Ω.m] vodiče a jeho rozměry, tedy v našem případě L,a,z [m]. Nejprve si určíme závislost funkce f (L/a), přičemž a zvolíme jako konstantní hodnotu a velikost L měníme. Tím získáme požadovanou funkční závislost odporu, která je po proložení na obrázku 4. Dále zbývá určit vztah mezi rezistivitou a velikostí souřadnice hloubky z. Ten je zřejmý z jednotek. Výsledný vztah je vyjádřen v rovnici 3.42.



*Obr. 3: Modelovaný vodič*



*Obr. 4: Závislost L/a*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.42) |

Pro výpočet funkce f (L/a) byl použit program Agros2D, který modeluje 2D pole. Výsledná funkce je:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.43) |