Matice

Matice typu (m, n) je uspořádaná m-tice prvků z $\mathbb{R}^n$. Jednotlivé složky této m-tice nazýváme řádky matice.

Matice se zapisují

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Speciální typy matic

- Nulová matice – všechny prvky matice jsou nulové
- Jednotková matice – na hlavní diagonále jsou jedničky, všude jinde nuly

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Řádková matice (tvořena jedním řádkem: $(a_{ij})_{j=1}^{n} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$,
- Sloupcová matice (tvořena jedním sloupcem: $(a_{ij})_{i=1}^{m} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$
- Čtvercová matice – speciální případ, kdy je $m = n$, neboli stejný počet řádků a sloupců
- Schodovitá matice - je matice, která má nulové řádky na konci (nebo nemá žádné nulové řádky) a každý nenulový řádek má na začátku více nul než předchozí řádek.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Symetrická, antisymetrická - je čtvercová matice A, která se splňuje rovnost A = A^T. Prvky symetrické podle diagonály jsou stejné. Můžeme tak napsat, že $a_{ij}=a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Antisymetrická matice - je skoro totéž jako symetrická matice, akorát prvky na druhé straně mají opačné znaménko: $A = -A^T$. Kvůli tomu musí být prvky na hlavní diagonále nulové, protože a=−a=0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

- Diagonální - je matice, která má nuly všude kromě hlavní diagonály. Přesněji řečeno všude jinde musí být nuly, co je na hlavní diagonále není specifikováno.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Transponovaná – matice, která vznikne přepsáním řádků matice $\boldsymbol{A}$ do sloupců matice $\boldsymbol{A}^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 23 \\ 47 & 154 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 47 \\ 1 & 5 & 154 \\ 5 & 23 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Úprava matic

Matice upravujeme pomocí Gaussovy eliminační metody – metoda řešení, která zachovává lineární obal řádků matice. Tato metoda nemění hodnost matice (**hodnost matice** = maximální počet lineárně nezávislých řádků matice).

Každou matici lze převést konečným počtem kroků Gaussovy eliminační metody na horní trojúhelníkovou matici.

Operace s maticemi

- Sčítání matic
  Matice musí být stejného typu, tedy musí mít stejný rozměr. Sčítá se poté takto:

  $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 23 \\ 47 & 154 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 7 & -54 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 18 & 25 & 53 \\ 54 & 100 & -10 \end{pmatrix}$$

- Sčítání matic je zřejmě komutativní a asociativní.
  A + B = B + A a A + (B + C) = (A + B) + C.

- Násobení matice konstantou
  Matice se násobí konstantou tak, že se každý prvek vynásobí konstantou.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 23 \\ 47 & 154 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 25 \\ 40 & 25 & 115 \\ 235 & 770 & 10 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  Nechť matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je typu (m, n) a $\boldsymbol{B} = (b_{jk})$ je matice typu (n, p), pak je definován součin matic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ jako matice typu (m, p) takto: každý prvek c_{ik} matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ je dán vzorcem:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a $k = 1, 2, \ldots, p$.

$$m\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \\ & & \cdots & \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}}_{n}\right. \cdot \; n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ \\ & \cdots & \\ \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}}_{p}\right. = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ \\ & \cdots & \\ \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}}_{p}\right\}m$$

Tedy násobení je definováno tehdy, jeli počet sloupců první matice roven počtu řádků druhé matice. Výsledná matice má stejný počet řádků, jako první matice a stejný počet sloupců, jako druhá matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 10 & 12 & 4 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 4 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$$

Násobení matic je asociativní … tedy lze $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$. (Důkaz v literatuře)

Proveďte součin matic $A{\cdot}B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 10 & 12 & 4 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 41 & 43 \\ 90 & 98 & 106 \\ 144 & 155 & 169 \end{pmatrix}$$

Proveďte součin matic $B{\cdot}A$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 10 & 12 & 4 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & 82 & 96 \\ 86 & 112 & 138 \\ 87 & 105 & 123 \end{pmatrix}$$

Proveďte součin matic $A \cdot C$ a $C \cdot B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 4 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 67 & 50 \\ 106 & 86 \end{pmatrix}$$

Druhý příklad nemůžeme vypočítat, protože počet sloupců první matice je jiný než počet řádků druhé matice.

Násobení matic je distributivní vzhledem k sčítání … $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$. (Důkaz v literatuře)

Násobení matic není obecně komutativní (viz příklad).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Čtvercová matice **A** typu (n, n) se nazývá **regulární**, pokud $hod(\boldsymbol{A}) = n$.
(tj. pokud se v ní nevyskytuje žádný lineárně závislý řádek)

Čtvercová matice **A** se nazývá **singulární**, pokud není regulární, tj. $hod(\boldsymbol{A}) < n$. Lze také říci, že čtvercová matice je singulární, je-li její determinant roven nule ($det\boldsymbol{A} = 0$), jinak to též znamená, že řádky jsou lineárně závislé.

Inverzní matice

Matice **A** je čtvercová typu (n, n) a **E** je jednotková matice stejného typu. Matici **B** typu (n, n), která splňuje vlastnost $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ nazýváme inverzní maticí k matici **A**. Označujeme ji symbolem $\boldsymbol{A}^{-1}$.
Inverzní matice existuje tehdy, je-li čtvercová matice regulární.

Inverzní matice lze nalézt pomocí definice a to, že spočítáme soustavu dvou matic, kde na jedné straně je zadaná matice **A** a na druhé je jednotková matice **E**. Gaussovou eliminací se provede úprava zároveň na obou maticích tak, že místo matice **A** dostaneme jednotkovou matici **E** a na místě jednotkové matice se dostane inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}) \sim (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1})$$

K inverzní matici se lze také dopočítat pomocí následujícího vzorce (kde $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}$ je transponovaná matice doplňků):

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{det\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}$$

Příklad 1:
Spočtěte inverzní matici k matici **A.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

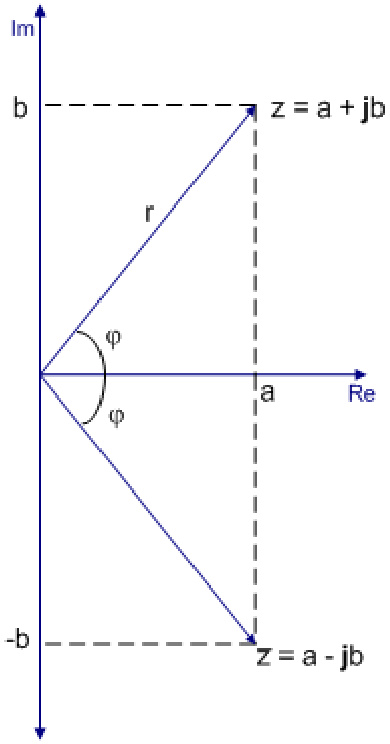
$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det\boldsymbol{A} = -2$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{det\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B^T} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3/2 & 5/2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Komplexní čísla



$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ … je to nadstavba reálných čísel (reálná čísla jsou pouze část čísel komplexních)

Obsahují 2 části – komplexní a reálnou → je to dvojice uspořádaných čísel [a, b]

Algebraický tvar: $z = a + jb$

j…imaginární jednotka, vlastnost: $j^2 = -1$

Číslo komplexně sdružené: $\bar{z} = a - jb$

Pythagorova věta: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Goniometrický tvar: (= polární souřadnice)

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)$

Kde, vzdálenost od počátku je $|z|$ a orientovaný úhel je φ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

Exponenciální tvar:

$$c = |c|e^{j\varphi} = |c| \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Tento tvar se s výhodou používá pro násobení a podíl.
Například:
$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Operace s komplexními čísly (pro algebraický tvar)

- Sčítání, odčítání
  $a + jb = (a \pm c) + j(b \pm d)$

- Násobení
  $(a + jb) \cdot (c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$

- Podíl (dělení)

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb) \cdot (c - jd)}{(c + jd) \cdot (c - jd)} = \frac{(ac - bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} =$$

$$= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + j\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

Použitá literatura: Lineární algebra – Olšák Petr, vydání 2007, www.olsak.net