A1B15MAA-Matematické aplikace

1.Komplexní čísla, komplexní funkce reálné proměnné, komplexní funkce komplexní proměnné, fázory

Poznámka úvodem k této kapitole:

Nebýt subordinace bychom některé části látky této kapitoly zcela pominuli: ne, že by nebyly zajímavé a že do vypiplaní příslušných teorií nebylo investováno hodně a teorie (komplexních) funkcí komplexní proměnné je bezesporu *krásná*. Nicméně na ně nemáme čas. Nejsou *nutným* nástrojem „silnoproudého“ inženýra. V jisté etapě vývoje výpočetních prostředků ale byly *důležité*, dodnes jsou *použitelné*. V podstatě jde o jednu či dvě generace: když by chtěl Karel Kyncl v roce 1960 vypočítat rozložení elektrického pole mezi eliptickými elektrodami, použil by spoustu chytrých triků a teorii konformního zobrazení (nikoli úslužného, jde o zobrazení v jistém smyslu zachovávající tvar, formu), převedl problém na analyticky řešitelný (koule, válec, rovina…), vypočetl v řešitelné transformované geometrii to, co by potřeboval, povedl přepočet do skutečné geometrie, odhadl chybu… byl to *nejsnazší* a často *jedině dostupný* postup. Trvalo to asi tak den.

V roce 2012 shodný problém vyřešíme za jednotky minut v nějakém free SW, např. Agros2D. Teorie funkcí komplexní proměnné má dál své použití, nicméně elektrotechnika ji použila a jdeme dál. Je mnoho krásných teorií, které bychom rádi znali, ale není na ně čas.

Některé části stále slouží, bez teorie harmonického ustáleného stavu se „silnoproudý“ inženýr neobejde. Vybrané komplexní funkce reálné proměnné jsou stále nástrojem inženýra: nástrojem pochopení i nástrojem pro usnadnění výpočtů.

Začněme něčím, co nám akreditace nepředepisuje, ale je to užitečné. Následující text obsahuje mnoho duplicit s výukou teorie obvodů na FEL. Nechceme jejich výklad suplovat, ale chceme ukázat jeho implementace v SW Mathematica a usnadnit studentům jak studium teorie obvodů, tak i její použití.

A nyní k té subordinaci Pokud nějaká autorita dočetla až sem, je jistě tak poctivým člověkem, že nebude vykládat následující fakta podle §70, odst. 1 zákona 111/1998 Sb., ve znění pozdějších předpisů. Ostatně podle judikátů ÚS a Nejvyššího soudu nemůže být kritika zaměstnavatele jediným důvodem propuštění… ale kdo ví, v těchto časech My všem nekritizujeme, ale považujeme tento fakt za výsledek svobodného bádání.
Tedy: studijní programy schvaluje na návrh děkana Vědecká rada FEL po projednání těchto v AS FEL. A tyto autority, tak vědecky vysoko, že i když studujeme učení Dyonýsia Areopagity, jejich superioritu nenazříme, učinily rozhodnutí, později posvěcené ČVUT a MŠMT, že se má v programu EEM vyučovat teorie funkcí komplexní proměnné. Dá se jí věnovat celý život, je krásná, nástrojem současného „silnoproudého“ inženýra není… Možná to ale nějaký důvod má, kdo ví.
Pokusíme se tedy pod tlakem nutnosti cosi o ní povědět, přičemž matematik pravý by měl výhrady, které bez výhrady přijímáme. Ovšem inženýři zpravidla řeší nesplnitelná zadání manažerů, takže tedy do toho

Množinu komplexních čísel budeme značit *C*, stejně jako v předchozím textu a označení ostatní také podržíme.
Komplexní funkcí komplexní proměnné budeme chápat $f_{kompl}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, tedy zobrazení z množiny komplexních čísel do množiny komplexních čísel. f_{kompl} je *jméno* tohoto zobrazení. Hodnota $f_{kompl}(z)$ je tedy hodnota funkce f_{kompl} „“zavolané“ na *parametr z*, nikoli „funkce“. Funkce je *sinus*, nikoli *sin(x)*.

Jelikož komplexní čísla máme zavedena jako lineární obal báze $\{1, j\}$, tedy jako „reálná čísla plus jedno jediné imaginární číslo *j* a algebra lineárního prostoru“, budeme chápat komplexní funkci komplexní proměnné analogicky.
Buďtež: $u: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $v: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ reálné funkce dvou proměnných. V dalším budeme chápat komplexní funkci komplexní proměnné takto:
$x, y \in R, \quad f_{kompl}(z = x + j \cdot y) = u(x, y) + j \cdot v(x, y)$
Tak jako můžeme chápat komplexní číslo jako *uspořádanou dvojici* čísel, *vektor*, tak můžeme chápat komplexní funkci komplexní proměnné jako uspořádanou dvojici funkcí dvou reálných proměnných, vektorovou funkci atd.

Abychom více pochopili moc a sílu linearity a teorie lineárních prostorů: takto nám stačí „pravidla práce s *j*“, ostatní dodá linearita. Jelikož reálné číslo je speciálním případem komplexního čísla, je logické chtít, aby pravidla měla stejný tvar obě čísla, pro oba prostory. A opět logicky chceme, aby –pokud bude smysluplně existovat- derivace f_{kompl}, tedy $f_{kompl}' = \dfrac{df_{kompl}}{d\#}\&$, méně přesně zapsáno $f_{kompl}'(z) = \dfrac{df(z)}{dz}$ byla definována formálně shodně jako u reálných funkcí reálné proměnné.
Je-li tedy $f: R \to R, \quad f'(t) = \dfrac{df}{dt}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ reálná funkce reálné proměnné, požadujeme aby pro komplexní funkci a parametr platilo:

$$f_{kompl}: C \to C, \quad f_{kompl}'(z) = \frac{df_{kompl}}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f_{kompl}(z + \Delta z) - f_{kompl}(z)}{\Delta z}.$$

Jenže formální shoda zápisu neznamená shodu všech vlastností. V komplexních číslech shodně odčítáme a dělíme, ale různě „se blížíme“. V prostoru reálných čísel se k zadanému číslu blížíte „zleva, zprava“, v komplexních jako na mapě „od Kbelnice, od Kopidlna, od Sadské, od Jičína…“. Blížit a plížit se k dané kótě můžeme nekonečně mnoha způsoby.
Ale tak jako u derivace reálné funkce reálné proměnné nesmělo –měla-li by limita existovat- záležet na tom, blížíme-li se zprava nebo zleva, aby měla derivace komplexní funkce komplexní proměnné dobrý smysl, nebude smět záležet v definici derivace záležet na tom, jakým způsobem, kudy se Δz blíží nule.

„Nesmí záležet v definici derivace záležet na tom, jakým způsobem, kudy se Δz blíží nule“ obsahuje velký kvantifikátor, protože znamená „pro všechna blížení dá shodný výsledek“.
Zkusme tedy dvě blížení, která se nabízejí: po reálné ose, tedy $\Delta z = t,\ t \in R,\ t \to 0$ a po imaginární ose (ty pojmy si představte tak, aby tvrzení fungovala), tedy
$\Delta z = j \cdot t,\ t \in R,\ t \to 0$.

Pak ovšem musí platit:

$$f_{kompl}'(z)=\frac{df_{kompl}}{dz}(z=x+j\cdot y)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f_{kompl}(z+\Delta z)-f_{kompl}(z)}{\Delta z}=\left|\Delta z=\Delta t,\Delta t\in R\right|=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(x+\Delta t,y)+j\cdot v(x+\Delta t,y)-u(x,y)+j\cdot v(x,y)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(x+\Delta t,y)-u(x,y)}{\Delta t}+j\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(x+\Delta t,y)-v(x,y)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+j\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ale také musí platit:

$$f_{kompl}'(z)=\frac{df_{kompl}}{dz}(z=x+j\cdot y)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f_{kompl}(z+\Delta z)-f_{kompl}(z)}{\Delta z}=\left|\Delta z=j\cdot\Delta t,\Delta t\in R\right|=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(x,y+\Delta t)+j\cdot v(x,y+\Delta t)-u(x,y)+j\cdot v(x,y)}{j\cdot\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(x,y+\Delta t)-u(x,y)}{j\cdot\Delta t}+j\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(x,y+\Delta t)-v(x,y)}{j\cdot\Delta t}=$$

$$=\frac{1}{j}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

Zřejmě tedy musí platit:

$\frac{1}{j}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}==\frac{\partial u}{\partial x}+j\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, tedy

$\frac{\partial v}{\partial y}==\frac{\partial u}{\partial x}$ a zároveň $\frac{1}{j}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}==j\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}==-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Předpokládejme existenci následujících výrazů:

$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}==\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}==-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$. Pak ovšem zřejmě: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}==-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}==0$.

Obdobně předpokládejme existenci následujících výrazů:

$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}==\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}==-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Pak ovšem zřejmě: $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}==\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}==-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}==0$.

Předpokládáme ovšem „slušné“ funkce *u* a *v*, takové, že platí $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}==\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ a $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}==\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$.

Pro v technice se vyskytující funkce je uvedená podmínka obvykle se záměnností smíšených derivací i postačující, zájemci mohou studovat skripta ČVUT.

A teď proč se to všechno učíme:komplexní funkce, které mají derivaci podle komplexního parametru ve výše zmíněném smyslu, popisují s dobrou přesností některá vyskytující se fyzikální pole.

Rovnice tvaru $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}==0$ jsou poměrně důležité: v nerelativistické fyzice kontinua popisují fyzikální pole, kde hustoty toků jsou konstantním násobkem gradientu intenzivní veličiny (difuze, potenciál v lineárním prostředí atd.). Znamenají vlastně fakt, že „to co zleva dostanu, dám doprava, to co zleva dostanu, je úměrné o kolik jsem chladnější, než soused vlevo atd…“
Těmto rovnicím se říká Laplaceovy rovnice. Popisují zajímavé jevy. Jevy důležité v elektrotechnice.
Vystihují „snahu být průměrným“, ale o tom více říká teorie parciálních diferenciálních rovnic.

Existence derivace komplexní funkce komplexní proměnné tedy má vztah k fyzikálním polím popsaným Laplaceovou rovnicí.

Budiž dále: $g:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, funkce g má derivaci. Pak funkce g popisuje nějaké fyzikální pole popsané Laplaceovou rovnicí (přesněji její reálná a imaginární část, stejně jako v předchozím).

No a proto se to asi učíme
Funkce g mající derivaci nám definuje tzv. *konformní* zobrazení. Zobrazuje část Gaussovy roviny komplexních čísel do ní samé.
Často zobrazujeme nějaké křivky, odpovídající například řezu (nekonečných) elektrod rovinou. Elektrody jsou v elektrostatice ekvipotenciály, siločáry jsou na ně kolmé.
Takové zobrazení, kde zobrazovací funkce má derivaci, zachovává úhly a obecně nezachovává délky. Kupodivu je to možné

V notebooku konformita1b.nb máte naprogramované trošku víc cool kódem v Mathematice zobrazení „šachovnice“ zadanou funkcí.
Hrajte si, vymýšlejte zobrazovací funkce.

Tímto považujeme požadavek na komplexní funkci komplexní proměnné za splněný.

2. Použití Laplaceovy transformace pro popis lineárních systémů

V matematice jste se učili některá pravidla o Laplaceově transformaci.
Budiž $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nejvýše exponenciálního růstu. Laplaceovým obrazem této funkce rozumíme $L(f) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt \overset{!}{=} F(p)$. Někteří autoři používaní označení $L(f) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \overset{!}{=} F(s)$, což je ovšem ekvivalentní, na tom, jaké písmenko zvolíme za označení parametru v definičním integrálu, nezáleží.

Pravděpodobně jste se setkali s řešením Cauchyho úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice.

Stále se to učí, v praxi se však pro řešení diferenciálních rovnic Laplaceova transformace nepoužívá z následujících důvodů:

- Pro řád soustavy či diferenciální rovnice pět a výše jsou výsledné algebraické rovnice analyticky neřešitelné (kromě triviálních speciálních případů).
- Vstupem reálných systémů nejsou funkce sinus a kosinus, ale třeba písnička „Hajný je lesa pán“. Takový vstup svůj Laplaceův obraz má, nicméně bez počítače ručně neobsáhnutelný.
- Tak jako v kanceláři nepožadujeme po sekretářce, aby nepsala na stroji, ale násadkou a krasopisem, tak nezakazují zaměstnavatelé silnoproudým inženýrům používat počítač. Pak není jediný důvod Laplaceovu transformaci pro řešení diferenciálních rovnic používat a naopak je dost důvodů proti tomu.

Nicméně Laplaceovu transformaci používáme pro popis lineárních systémů: je to úspornější zápis, ve skutečnosti se samotnou Laplaceovou transformací nemá mnoho společného.

V notebooku MAALaplace.nb
Je ukázáno použití funkce LaplaceTransform pro zápis rovnice $7y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) == u(t)$, kde $u(t)$ je nějaký vstup a $y(t)$ je výstup zkoumaného systému. Obrazy budeme od vzorů odlišovat velkým písmenem a parametrem p.

Vidíme, že můžeme pro obraz psát:

$$Y(p) = U(p) \cdot \frac{1}{7p^2 + 2p + 3} + y(0^+) \cdot \frac{7p}{7p^2 + 2p + 3} + y'(0^+) \cdot \frac{7}{7p^2 + 2p + 3}.$$

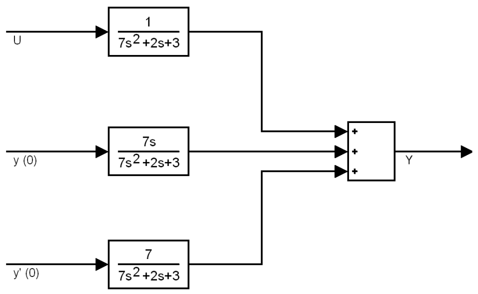
Počáteční podmínky jsou také vstupem našeho systému (musí být zadané!) a předchozí vztah nám tedy říká, jak systém přenáší vstup a počáteční podmínky.

Pokud uvažujeme počáteční podmínky nulové, zjednoduší se vztah na:

$Y(p) = U(p) \cdot \frac{1}{7p^2 + 2p + 3}$ a výrazu $\frac{1}{7p^2 + 2p + 3}$ říkáme *přenos* systému.

Poznámka: dobře popsané systémy zpravidla „zapomínají“ počáteční podmínky, teplota kuřete po hodině v troubě již nezávisí na teplotě kuřete před týdnem, proto se počáteční podmínky často uvažují nulové s tím, že je-li čas řešení dostatečně dlouhý, nebudou již mít na výsledek vliv.

V programech jako je například Simulink můžeme zapsat systém popsaný rovnicí $7y''(t)+2y'(t)+3y(t)==u(t)$ graficky, pro nulové i nenulové počáteční podmínky takto:



Obr.0 Použití SW Simulink pro nulové i nenulové počáteční podmínky

Mějme na paměti, že tyto programy v žádném případě Laplaceovu transformaci pro řešení nepoužívají!!! Přeloží takové obrázky do systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a ty pak řeší numericky.

3.Základy software Mathematica

Mathematica je program založený na architektuře klient - server. To co právě vidíte je klient nazývaný Front-end. Front-end vám dává k dispozici okno, v kterém je možné psát a tvořit dokument, dělat výpočet či psát program. To, co napíšete do tohoto okna, tvoří dohromady takzvaný notebook, který můžete uložit v souboru *.nb. Front-end vám kromě okna s notebookem dává k dispozici hlavní menu, v kterém najdete spoustu nastavovacích i ovládacích prvků celého prostředí *Mathematica*. Také je možné si zapnout zobrazení množtví různých pomocných sad tlačítek, tzv. palet, pro usnadnění některých postupů, jako například psaní řeckých znaků. Standartně je při zapnutí Mathematicy obvykle zobrazena paleta pojmenovaná BasicMathInput.

Nyní by všichni měli mít otevřený prázdný notebook. Notebook je oproti klasickým textovým dokumentům strukturován nikoliv ("jen") do odstavců, ale do tzv. buněk.
Zkusme si do Notebooku napsat naše dva první výpočty

```
1 + 1
2 * 3
```

V pravo se nám objevila modrá čára ohraničující buňku, kterou jsme teď vytvořili. Teď bychom ale chtěli, aby nám *Mathematica* naše výpočty provedla a vypsala výsledek. Jakékoliv výpočty v Mathematice neprování Front-end, ale servrová část systému Mathematicy zvaná Kernel. Kernel je samostatný program, který může dokonce běžet i na jiném počítači. Funguje to tak, že umístíte kurzor do buňky, kterou chcete spočítat, zmáčknete Shift-Enter (nebo též samotný pravý Enter u numerické klávesnice) a Front-end odešle obsah buňky do Kernelu. Kernel provede všechny příkazy a výpočty a vrátí Front-endu případné výsledky. Front-end vypíše výsledky do buněk, které si vytvoří pod spuštěným výpočtem.

```
1 + 1
23^35
```

```
2
```

```
457 587 614 181 485 537 342 488 537 004 525 777 796 719 632 007
```

Chcete-li nyní vytvořit další buňku, najedete s kurzorem pod buňky či mezi buňky tak, aby se místo klasického kurzoru objevila dlouhá vodorovná čára a začnete psát.
Buňky můžeme do Kernelu posílat v jakémkoliv pořadí, ale Kernel je samozřejmě spracovává postupně za sebou tak, jak k němu přišly. To znamená, že například může být nedříve odeslán a proveden výpočet, který je v notebooku v poslední buňce. Proto jsou příkazy (řádky) přicházející do Kernelu postupně číslovány a Front-end při odeslání buňky vypíše toto pořadové číslo zpracování prvního příkazu v buňce (modře vlevo od buňky). Stejnými čísly jsou pak označeny případné vypisované výsledky jednotlivých příkazů.

```
a
```

```
5
```

```
a = 5
```

```
5
```

```
a
```

```
a
```

S buňkami lze dělat spoustu dalších věcí jako : označovat je, kopírovat, mazat, měnit jejich styl písma, grafiku, zobrazování, povolovat a zakazovat jejich odeslání do Kernelu, dát více buněk do jedné "nadbuňky", sbalit "podbuňky" jedné buňky tak, aby byla vidět jen první, přiřazovat jim nastavení pomocí stylů atd... Takto lze použít notebooky v *Mathematice* nejen k výpočtům, ale i např. pro psaní textu či vytváření presentací. V Mathematice byly dokonce napsány celé knihy. Toto však nyní necháme a budeme se věnovat především možností programování a výpočtů v *Mathematice*. Udělejme si první příklad

Napišme program, který vypočítá řešení algebraické rovnice5*x^5 + 1 == Sin$\left(\frac{2}{3}\pi\right)$.

```
reseni = Solve[5 x^5 + 1 == Sin[2 * Pi / 3], x]
```

$$\left\{\left\{x \to \left(\frac{1}{5}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{1/5}\right\}, \left\{x \to (-1)^{2/5}\left(\frac{1}{5}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{1/5}\right\}, \left\{x \to -(-1)^{3/5}\left(\frac{1}{5}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{1/5}\right\}, \left\{x \to (-1)^{4/5}\left(\frac{1}{5}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{1/5}\right\}, \left\{x \to -\left(-\frac{1}{5}\right)^{1/5}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/5}\right\}\right\}$$

Nyní vidíme základy syntaxe v *Mathematice*
 - *Mathematica* je case-senzitiv
 - Všechny názvy vnitřních příkazů, funkcí i výrazů *Mathematicy* začínají velkým písmenem (Solve, Sin, Pi, I, LaplaceTransform)
 - vaše proměnné a symboly mohou začínat pouze písmenem a nesmí obsahovat speciální znaky (nepoužívat podtržítka)
 - mezera je interpretována jako krát. Pozor může být zdroj chyb

```
b1
b 2
```

```
b1
```

```
2 b
```

 - ";" na konci řádku potlačí vypsání výstupu

```
a = 3;
```

 - "=" značí definici (od chvíle kdy je do kernelu odesláno:

```
Petr = prase
```

```
prase
```

bude jakýkoliv Petr nahrazen

```
Petr + Zuzana
```

```
prase + Zuzana
```

Jestliže použijeme funkci, symbol, či obecně něco co *Mathematica* nezná, *Mathematica* provede všechna nahrazení, která zná a zbytek opět vrátí jako výraz

```
Petr = prase;
rande[Petr, Zuzana]
```

```
prase
```

```
rande[prase, Zuzana]
```

Zrušit definici lze například příkazem ClearAll (lze to též důkladněji příkazem Remove, který má syntaktickou zkratku "=.", ale to je jen pro zvídavé. Více viz. help)

```
ClearAll[Petr]
```

```
Petr + Zuzana
```

```
Petr + Zuzana
```

- "==" značí rovnici (patří mezi základní bilanční znaménka >, <, >=, <=, ==, !=)

```
Petr = velkePrase
```

```
velkePrase
```

```
Petr == velkePrase
```

```
True
```

 - "( )" jsou závorky upřesňující pořadí vyhodnocování (čili přednost operátorů)

```
5 + 3 * 7
(5 + 3) * 7
```

26

56

- "[ ]" jsou závorky pro parametry funkcí a příkazů (jednotlivé parametry se oddělují čárkou)

```
Sin[2 * Pi / 3]
```

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

```
Integrate[x^5 * Sin[x], x]
```

$-x\left(120-20x^2+x^4\right)\operatorname{Cos}[x]+5\left(24-12x^2+x^4\right)\operatorname{Sin}[x]$

Pro funkce s jedním parametrem lze místo syntaxe:

```
nazevFce[parametr ]
```

nazevFce[parametr]

"nazevFce[parametr]" použít též dva ekvivalentní způsoby zadávání parametrů fce:

```
nazevFce@parametr
parametr // nazevFce
```

nazevFce[parametr]

nazevFce[parametr]

takže funguje např.:

```
Sin@(2 * Pi / 3)
(2 * Pi / 3) // Sin
```

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

- "{ }" jsou závorky sdružující více věcí do jedne usporadane mnoziny, jednotlivé objekty se od sebe oddělují čárkou. V prostředí *Mathematica* se uspořádaná množina vytvořená pomocí "{ }" nazývá "List".

Listy používáme pro sofistikované uspořádávání svých dat

```
basaPiv = {Budwar, Prazdroj, Gambrinus}
```

{Budwar, Prazdroj, Gambrinus}

```
basaPiv2 = {Kozel, Branik}
```

{Kozel, Branik}

```
hromadaBasPiv = {basaPiv, basaPiv2}
```

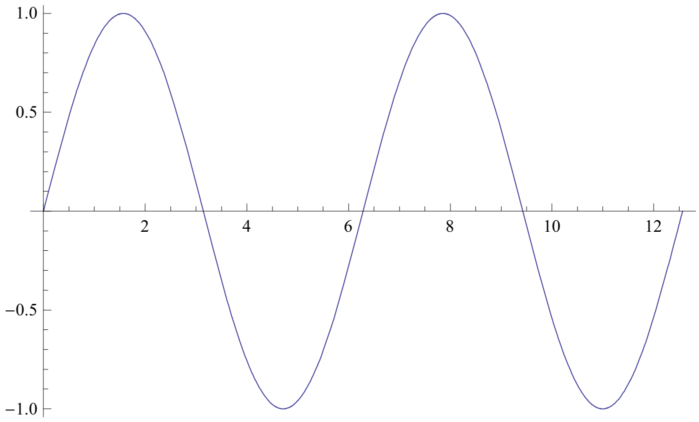
{{Budwar, Prazdroj, Budwar}, {Kozel, Branik}}

```
skladPiv = {basaPiv, basaPiv2, Bernard, CernaHora}
```

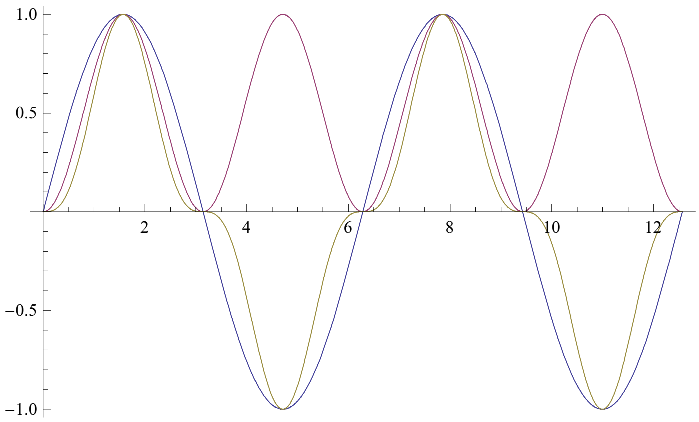
{{Budwar, Prazdroj, Budwar}, {Kozel, Branik}, Bernard, CernaHora}

Listy lze často použít tam kde funkce očekává jedinný parametr pro zadání více objektů.
Např. příkaz Plot očekává dva parametry: 1. výraz, který bude kreslit 2.za kterou proměnnou a v jakých mezích má dosazovat

```
Plot[Sin[x], {x, 0, 4 π}]
```




```
Plot[{Sin[x], Sin[x]^2, Sin[x]^3}, {x, 0, 4 π}]
```



Listy se v Mathematice používají pro reprezentaci vektorů a matic

```
ctvercovaMatice = {{1, 3, 5, 6}, {6, 5, 8, 2}, {9, 54, 56, 78}, {74, 25, 19, 3}}
```

```
{{1, 3, 5, 6}, {6, 5, 8, 2}, {9, 54, 56, 78}, {74, 25, 19, 3}}
```

```
ctvercovaMatice // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 2 \\ 9 & 54 & 56 & 78 \\ 74 & 25 & 19 & 3 \end{pmatrix}$$

```
Det[ctvercovaMatice]
```

44 153

- "[[ ]]" jsou závorky, kterými z listu vybíráme prvek dle jeho pořadí od začátku (pomocí kladných čísel), nebo od konce (pomocí záporných čísel)

```
basaPiv
```

```
{Budwar, Prazdroj, Gambrinus}
```

```
basaPiv[[1]]
```

```
Budwar
```

```
basaPiv[[2]]
```

```
Prazdroj
```

a teď od konce

```
basaPiv[[-1]]
```

```
Gambrinus
```

nebo vícestupňový výběr

```
skladPiv
```

```
{{Budwar, Prazdroj, Budwar}, {Kozel, Branik}, Bernard, CernaHora}
```

```
skladPiv[[2]]
```

```
{Kozel, Branik}
```

```
(skladPiv[[2]])[[1]]
```

```
Kozel
```

```
skladPiv[[2, 1]]
```

```
Kozel
```

Nejdůležitější věc v *Mathematice*

Nejdůležitější věc v systému *Mathematica* : Help

Otevření nápovědy:
- Menu,
- Příkaz "?" nebo "??" vypíše základní nápovědu do notebooku

```
? Plot
```

Plot[f, {x, x_{min}, x_{max}}] generates a plot of f as a function of x from x_{min} to x_{max}.
Plot[{f_1, f_2, …}, {x, x_{min}, x_{max}}] plots several functions f_i. ≫

- Nejjednodušeji klávesa F1 (tip: jestliže napíšete v notebooku příkaz, umístíte do něj kurzor a zmážknete F1 otevře se vám přímo stránka helpu k tomuto příkazu)

otevření nápovědy k příkazu Plot

```
Plot
```

Co najdete v Helpu:

- stránku s nápovědou ke každému příkazu (například pro příkaz Plot)
  všechny helpy k jednotlivým příkazům mají stejnou strukturu:
  - nahoře je krátký popis, který se zobrazuje též v notebooku příkazem "?"
  - podrobný popis všech vlastností a možností nastavení
  - příklady použití, které si můžete vyzkoušet, klidně změnit a spouštět, nebo zkopírovat do svého notebooku a používat
  - odkazy na podobné a související příkazy
  - odkazy na tutoriály o tématu, do kterého příkaz patří

stránku s nápovědou ke každému příkazu
  - odkazy na rozcestníky příkazů uskupené podle témat

- celá elektronická knížka o Mathematice od základů až po pokročilé věci, která je složená z tutoriálů pro jednotlivá témata. Každý tutoriál obsahuje na spoustě dalších příkladů ukázané základní postupy a možnosti. Např. tutoriál o základním vykreslování fcí. Opět si můžete beztrestně příkazy upravovat a spouštět.

- v Mathematice 7 jsou v helpu nahoře, kromě vyhledávače, tlačítka pro otevření rozcestníku fcí a pro otevření rozcestníku tutoriálů

Základní práce s Helpem:
- zkusit odhadnout jméno příkazu nebo alespoň podobného příkazu

- najít podobný příkaz a projít související příkazy nebo ještě lépe rozcestník se souvisejícími příkazy
- najít vhodný příklad, ten zkopírovat do svého notebooku a upravit

Např najděte příkaz pro otočení pořadí prvků v listu (List - List Manipulation)

```
List
```

```
Reverse[{a, b, c, d}]
```

```
{d, c, b, a}
```

Některé základní příkazy v *Mathematice*

Ukažme si nyní některé základní příkazy, které byste si měli projít

```
Plot
```

```
Solve
```

```
Table
Range
```

```
% (Out)
```

Programování v *Mathematice*

Pravidla nahrazování

pravidlo = coNahradit → cimNahradit

pravidlo = x → y^2

x → y^2

necoUpravene = necoPredUpravou /. pravidlo

```
x + 3 /. pravidlo
```

3 + y^2

Další příklady:

```
x + y + z /. {x → z, y → z}
```

```
3 z
```

```
x /. x → 25
```

```
25
```

Výsledkem řešení rovnic pomocí Solve je list pravidel. Vyřešte rovnici x^4 + x^2+1==0 a získejte první řešení ve formě výrazu

rovnice = $x^4 + x^2 + 1 == 0$
vsechnaReseniPravidla = Solve[rovnice, x]
prvniReseniPravidlo = vsechnaReseniPravidla[[1]]
prvniReseniVyraz = x /. prvniReseniPravidlo

$1 + x^2 + x^4 == 0$

$\{\{x \to -(-1)^{1/3}\}, \{x \to (-1)^{1/3}\}, \{x \to -(-1)^{2/3}\}, \{x \to (-1)^{2/3}\}\}$

$\{x \to -(-1)^{1/3}\}$

$-(-1)^{1/3}$

získejte vsechna řešení ve formě výrazů

```
vsechnaReseniVyraz = x /. vsechnaReseniPravidla
```

$\{-(-1)^{1/3}, (-1)^{1/3}, -(-1)^{2/3}, (-1)^{2/3}\}$

Základy o funkcích v Mathematice

- Tvoření vlastních funkcí

základní syntaxe:
nazevFce[parametry s podtrzitkem] := coVracet

```
mojeFce[par1_, par2_] := par1 + par2
```

```
mojeFce[2, 5]
mojeFce[Manka, Rumcajz]
```

```
7
```

```
Manka + Rumcajz
```

- Aplikace funkce na každý prvek listu

příkaz Map aplikuje funkci na každý prvek z listu

Map[f, {x1,x2,...}] = {f[x1], f[x2], ...}
nebo jiným zápisem
f/@{x1,x2,...} = {f[x1], f[x2], ...}

```
Map[g, {x1, x2, x3}]
```

```
{g[x1], g[x2], g[x3]}
```

```
g /@ {x1, x2, x3}
```

```
{g[x1], g[x2], g[x3]}
```

Příklad na rozmnožování havěti:

```
f[x_] := 10 * x
havet = {blecha, ves, mys}
Map[f, havet]
f /@ havet
```

```
{blecha, ves, mys}
```

```
{10 blecha, 10 ves, 10 mys}
```

```
{10 blecha, 10 ves, 10 mys}
```

- Aplikace funkce na celý list

Apply z prvků listu udělá argumenty zadané funkce

Apply[f, {x1,x2,...}] = f[x1, x2, ...]
nebo jiným zápisem
f@@ {x1,x2,...} = f[x1, x2, ...]

```
Apply[g, {x1, x2, x3}]
```

```
g[x1, x2, x3]
```

```
g @@ {x1, x2, x3}
```

```
g[x1, x2, x3]
```

Příklad:
sečtěte prvky listu, když víte, že sčítání je v Mathematice reprezentováno fcí Plus

```
Plus[a, b, c]
```

```
a + b + c
```

```
Plus @@ {a, b, c}
```

```
a + b + c
```

- Vícenásobná aplikace funkce na jeden parametr

Příkaz Nest aplikuje fci na parametr několikrát

Nest[g, x, n] = g[g[..g[x]]..]

```
Nest[g, x, 3]
```

```
g[g[g[x]]]
```

Příkaz NestList také aplikuje fci na parametr několikrát, ale vrátí i mezivýsledky

NestList[g, x, n] = {x,g[x],g[g[x]], ..., g[g[..g[x]]..]}

```
NestList[g, x, 3]
```

```
{x, g[x], g[g[x]], g[g[g[x]]]}
```

4.Elektrické obvody

Poznámka úvodem
Tento spisek nemá za cíl nahrazovat obvyklé učební texty týkající se teorie a řešení elektrických obvodů, jde spíše o ukázání jedné z cest, jak lze k obvodům přistupovat. Cílem je dokázat pro korektně zadané schéma napsat program, který vypočte hodnoty hledaných veličin. Omezíme se tedy na analýzu obvodů (zadané schéma, hledáme „co to dělá“, úloha „najdi schéma a hodnoty součástek aby to „dělalo co chci“ je podstatně složitější problém a koho to zajímá, může si zapsat příslušnou látku u odborníků například z FEL).

Veškeré výpočty, které můžeme svěřit strojům, strojům svěříme. Půjde zejména o řešení rovnic různých typů, derivování, integrování a grafické znázornění výsledků. Cílem je získat elementární představu o fungování některých obvyklých zapojení, nikoli vychovat odborníky na elektrické obvody.

Co nás zajímá je elektrický proud a elektrické napětí

Jelikož omyl není možný, v dalším textu budeme slovo „elektrický“ často vynechávat, tedy dále jen proud a napětí.

S proudem a napětím se v běžném životě setkáváme: „Pozor, vysoké napětí!“ Nebezpečné ovšem není napětí, ale proud, který námi teče… ale aby tekl, potřebuje napětí. Napětí přivádíme do reproduktoru, aby proud tekoucí cívkou vyvolal sílu, která pohne membránou a my můžeme poslouchat hudbu. Napětí a proudy budou vstupy i výstupy našich úloh: budeme vědět, že někde nějaké napětí *je*, nebo někde nějaký proud *teče* a bude nás zajímat, jaké *je* napětí jinde a jaký proud *teče* tam a tam.

Napětí v naší nejbližší zásuvce závisí na mnoha faktorech (jestli je na ní něco připojeno, ostatně obecně na všem, co je připojeno v celé soustavě UCPTE, na tom, jak dobře hoří uhlí v Elektrárně Poříčí, na tření v ložiscích turbín….), na některých ovšem více a na některých méně (poblíž sepne elektrokotel, v Portugalsku si dá ředitel železnic nabíjet mobil).

Někde ovšem řešení problému musí začít a to, kde začneme, záleží na požadované přesnosti: pečeme-li kuře, doba, za kterou se upeče hodně závisí na nastevené teplotě trouby a málo na teplotě v kuchyni, pro účely pečení kuřete obvykle nastavení teploty trouby v závislosti na teplotě v kuchyni nekorigujeme. „Pečeme“-li ovšem například křemíkové destičky a máme pro správný průběh rozličných difuzí udržovat teplotu s přesností 1/20°C, už nastavení teploty pece na teplotě okolí záležet bude, okolní teplota by nám by nám mohla proces pokazit.

Jelikož našimi *vstupy* budou proudy a napětí, omezíme naše úlohy zavedením zdrojů proudu a napětí; do těchto zdrojů schováme velmi široký zajímavý svět, napětí a proudy mohou být vyvolány elektrochemicky, přeměnou mechanické energie rotačního pohybu, „šoustáním ebonitové tyče liščím ohonem“ (jak se psalo pře dvěma sty lety); nebo jsou napětí a proudy výsledkem činnosti nějakého obvodu, jehož činnost neřešíme –například výstup zvukové karty počítače, kde je opravdu mnoho analogově realizovaných číslicových obvodů. Celou problematiku elektroenergetiky rovněž schováme do zavedení zdrojů proudů a napětí. Pro proudy bude platit totéž, co pro ideální zdroje proudů a pro napětí totéž, co pro ideální zdroje napětí: je-li někde napětí, v naší teorii vždy existuje někdo, či něco, co dotyčné napětí může zajistit a s proudy je to zcela stejné. Ideální zdroje ovšem existují jen v naší teorii, neideální ovšem do teorie začleňujeme jako ideální obklopené větším či menším počtem rezistorů, kondenzátorů, cívek a dalších obvodových prvků: modely reálných (pochopitelně je lepší říci „reálnějších“, „reálnost zdroje“ záleží na zvolené přesnosti rozlišování, co ještě je a co není ideální) zdrojů vždy obsahují ideální zdroje.

Proud a napětí

Obě tyto veličiny jsou abstrakce, zájemcům o větší porozumění těmto veličinám doporučujeme například skvělé Feynmanovy přednášky z fyziky.

Proud budeme značit $i, I, i(t), \hat{I}...$ tedy budeme pro něj mít vyhrazeno písmeno *i* s tím, že připsáním argumentu *t* budeme například upozorňovat, že jde o časově proměnnou veličinu a podobně.
Jednotkou proudu je ampér, označovaný velkým A, jednotky veličin budeme také někdy psát do kulatých závorek, tedy (A). Tato jednotka je základní a z ostatních základních jednotek ji nevytvoříte.
Proud měříme ampérmetry rozličných konstrukcí.

Napětí budeme značit $u, U, u(t), \hat{U}...$ tedy budeme pro něj mít vyhrazeno písmeno u s tím, že připsáním argumentu *t* budeme například upozorňovat, že jde o časově proměnnou veličinu a podobně. Jednotkou napětí je volt, značkou V, volt není základní jednotkou systému SI a jej možno vyjádřit pomocí ampéru a ostatních základních jednotek.
Napětí měříme voltmetry rozličných konstrukcí.

Obvyklé definice proudu se odkazují na veličinu elektrický náboj (např. česká Wikipedie uvádí: „**Elektrický proud** je uspořádaný pohyb nositelů elektrického náboje. Stejnojmenná fyzikální veličina, obvykle značená *I*, vyjadřuje množství náboje prošlého za jednotku času.“) a v některých speciálních případech si můžeme představit mechanickou analogii: Teče-li nestlačitelná tekutina potrubím, odpovídá to stejnosměrnému proudu.
Mají-li ovšem podobné definice mít univerzální platnost, budeme pro proudy tekoucí vakuem potřebovat virtuální částice, kontinuální teorii a také by bylo slušné říci, co je to ten elektrický náboj o kterém na Wikipedii zjistíme („Základní elektrickou vlastností těles je elektrický náboj. Těleso s elektrickým nábojem se nazývá *elektricky nabité* a je schopno působit elektrickou silou na jiné elektricky nabité těleso.“), že je vázán na pojem tělesa a síly... alev kvantové mechanice sílu smysluplně definovat nelze atd. atd.
Zájemcům doporučujeme navštěvovat přednášky prof. Petra Kulhánka a číst knihy Terry Pratchetta.

Co je elektrické napětí? Definice se odkazují buď na práci, nebo na potenciál, což kdybychom chtěli podrobněji zkoumat, potřebovali bychom rozsáhlý matematický aparát a nakonec bychom v došli k tomu, že napětí někdy ani smysluplně a jednoznačně zavést nelze.
Napětí měříme voltmetry rozličných konstrukcí.

Podobně ovšem máme docela dobrou představu, co znamená, že je venku teplota vzduchu 27°C, ačkoliv je definice teploty svou značnou abstrakcí nepřístupná většině lidí; bez přesné definice proudu (a jak uvidíme dále, s napětím to bude stejné) se dobře obejdeme. V našich

řečových hrách se naučíme, jak při použití slova „proud“ v našem úzce vymezeném kontextu teorie obvodů nechybovat a k tomu definici nepotřebujeme.
Podstatné je, že proud TEČE. Pokud říkáme, že proud neteče, myslíme tím, že teče proud velikosti nula ampér.
U proudů vždy budeme volit jejich orientaci a budeme ji označovat šipkou; abychom co nejlépe odlišili šipku označující zvolenou orientaci proudu od zvolených orientací napětí, budeme používat „proudovou šipku“ a „napěťovou šipku“.

Obdobně jako v případě proudu a teploty, ani v případě napětí nám absence pochopitelné a jednoznačné definice nebude činit žádné obtíže; v úzce vymezené oblasti našeho zájmu k nejednoznačnostem nedojde.

Podobně jako v případě proudů, budeme zvolené orientace, tedy kladné smysly napětí, značit šipkami a budeme pro lepší rozlišení používat „napěťové šipky“.

Pro proudy a napětí platí určitá pravidla; shrneme je formou vět a rovnic.

Věta 0:
Proud v obvodech nevzniká ani nezaniká, ve výsledku vždy „teče dokola“.

Věta 1:
Platí, že pokud *teče* z bodu A do bodu B proud I_{AB}, je to to samé, jako když *teče* z bodu B do bodu A proud $-I_{AB}$.

Odtud i názvy odkazující k této skutečnosti „obvody“ „circuits“ , kde v anglickém „circ“ máme odkaz na kruhové arény starých Římanů a kruhové půdorysy cirkusových stanů.

Možná více než polovina zákonů a pravidel, které budeme při řešení obvodů používat, je přesnější formulací faktu, že „proud je něco, co nevzniká a nezaniká a tudíž to teče dokola“.

Věta 2:
Je-li mezi bodem A a bodem B napětí U_{AB}, *je* mezi bodem B a bodem A napětí $-U_{AB}$.

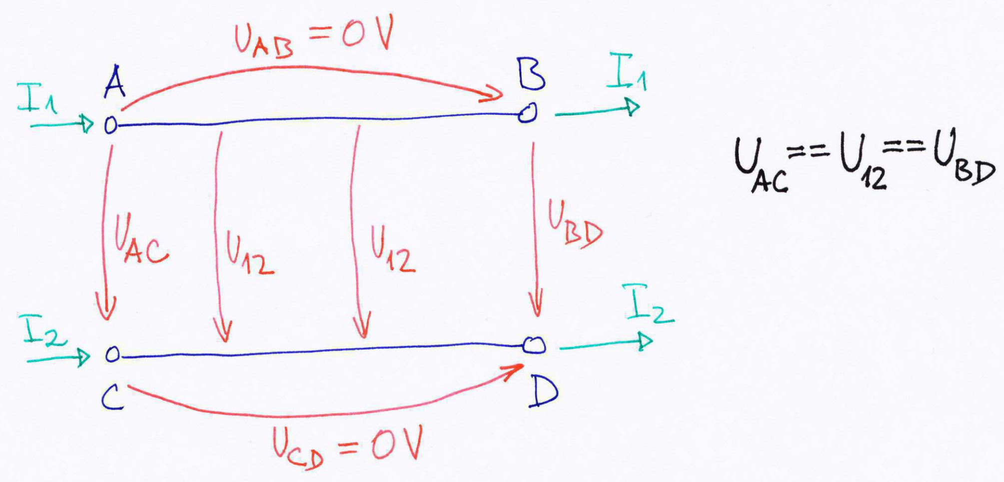
Zvykněme si na vyjádření odlišující napětí a proud: proud *teče*, napětí *je*.

<u>Vodiče, svorky, zdroje proudu a zdroje napětí, společný vodič</u>

Zdroji proudu a napětí budeme v dalším textu rozumět tzv. *ideální* zdroje proudu a napětí a vodiči budeme rozumět *ideální* vodiče. Slovo *ideální* budeme v dalším textu někdy vynechávat, zdroji a vodiči budeme vždy rozumět *ideální* zdroje a vodiče, budeme-li naopak hovořit o reálných zdrojích a vodičích, explicitae to uvedeme.

Ideální vodiče a svorky, společný vodič

Vodič („ideální“ budeme vynechávat) je takovým prvkem obvodu, který „nic nemění“. Mezi začátkem vodiče a nějakým jakýmkoli jiným bodem je stejné napětí, jako mezi koncem vodiče a oním bodem. Vstupuje-li do vodiče proud, vystupuje z něj stejný (samozřejmě se může větvit do více vodičů, uvidíme, že pak se zachovává součet proudů). Pro dva vodiče to ukazuje Obr. 1, spolu s pravidlem, že mezi začátkem a koncem vodiče je napětí nulové.



Obr. 1

Na Obr. 1 vidíme dva vodiče se *svorkami* A, B a C, D. Mezi *svorkami* A a C je napětí stejné, jako mezi *svorkami* B a D a jako mezi kterýmkoli bodem horního vodiče a kterýmkoli bodem spodního vodiče. Napětí mezi svorkami A a B je nulové nezávisle na tom, jaká je velikost proudu I_1 a napětí mezi svorkami C a D je nulové nezávisle na velikosti proudu I_2 Proudy se zachovávají, do svorky A vtéká proud stejné velikosti, jako vytéká ze svorky B a zcela shodně je tomu se svorkami C a D.

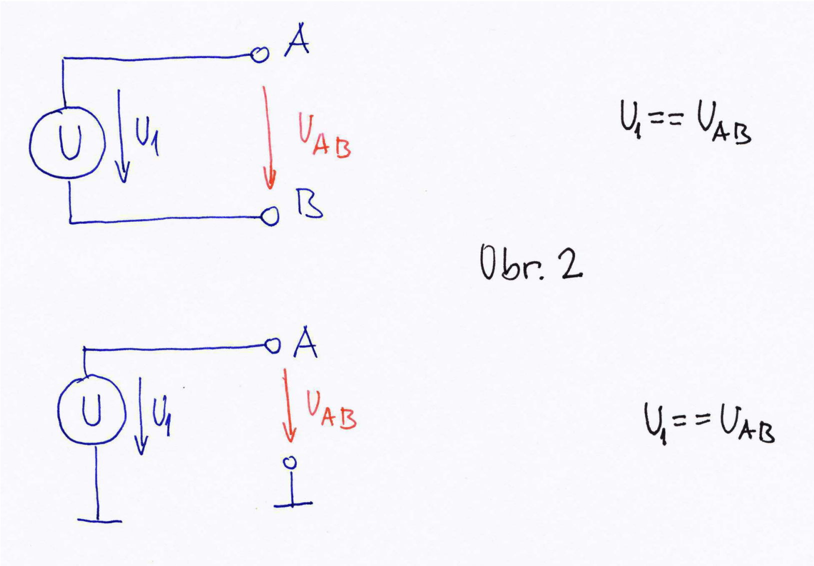
Svorkami nerozumíme skutečné svorky, ale místa, kde „je nebo může být něco připojeno“.

Je-li $I_1 \neq 0A$, tak na svorky A a B „něco“ být připojeno musí, proud nemůže vznikat ani zanikat.

Pokud je více svorek spojeno vodiči, můžeme ve schématu s výhodou použít symbol .

Napětí každé svorky je stejné vůči kterémukoli symbolu .

Zdroje proudu a napětí
Jak jsme uvedli výše, příčiny proudů a napětí „schováme“ do ideálních zdrojů proudu a napětí.



Zdroje napětí budeme značit podle Obr. 2, kde nahoře je zdroj napětí U_1 zapojen mezi svorky A a B a ve spodní části je zdroj napětí U_1 zapojen mezi společný vodič a svorku A a svorka B je spojena se společným vodičem.

V matematickém popisu odpovídá těmto schématkům rovnice

$$U_{AB} == U_1 \qquad (1)$$

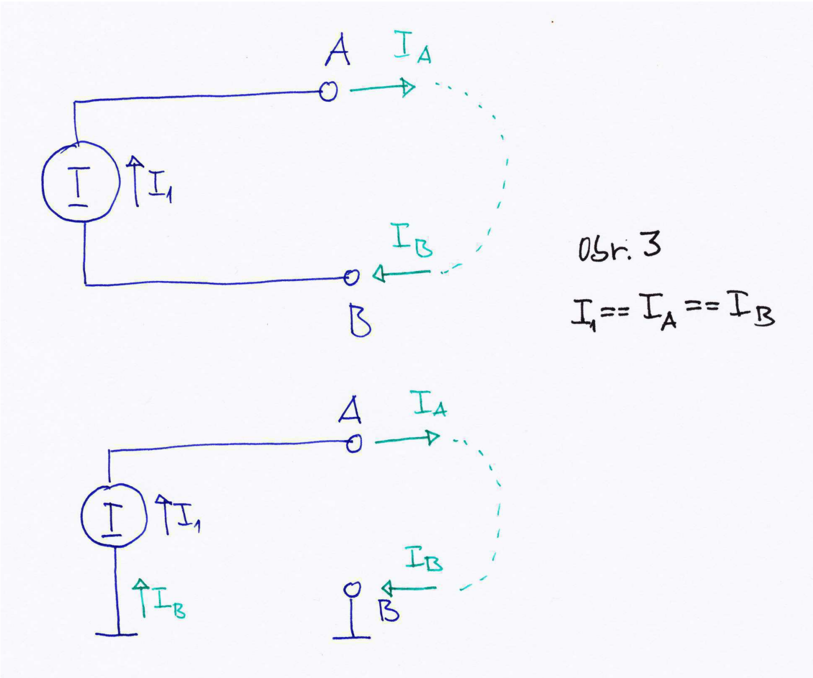
Proud tekoucí zdrojem napětí se v rovnici (1) nevyskytuje, napětí ideálního zdroje napětí na protékaném proudu nezávisí.
Ideální zdroj napětí 0V má rovnici stejnou, jako ideální vodič mezi dvěma svorkami, jsou tedy z hlediska řešení obvodů ekvivalentní.

Podobně jako v sw Mathematica budeme pro zvýraznění, že jde o rovnici, používat zdvojených znaků rovnosti.

Zdroje proudu budeme ve schématech značit podle Obr. 3. Vyjádření rovnicemi situace v horní části obrázku je

$$I_A == I_1, \quad I_B == I_1 \qquad (2)$$

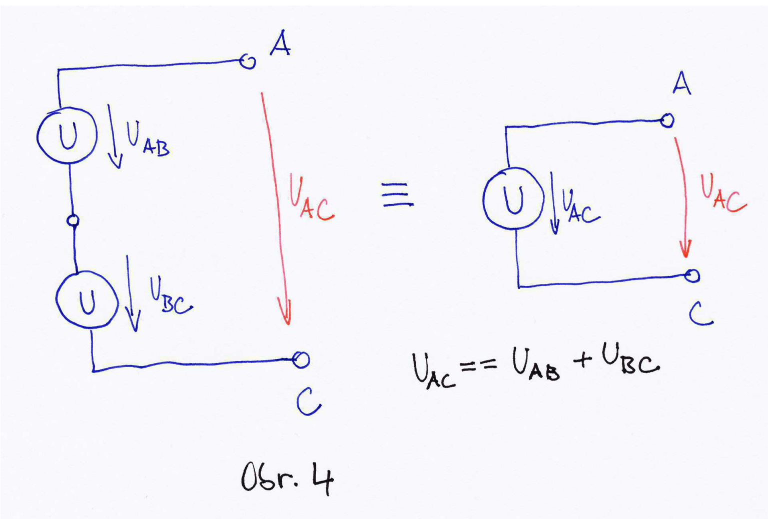
Napětí na svorkách zdroje proudu se v rovnici (2) nevyskytuje, proud protékaný ideálním zdrojem proudu nezávisí na napětí na jeho svorkách.



V dolní části Obr. 3 je naznačena situace se společným vodičem, rovnice jsou shodné, čárkovaná čára naznačuje, že se proud vytékající ze svorky A musí „nějakým způsobem“ uzavřít do svorky B, tedy do společného vodiče.

Pravidla řazení zdrojů napětí

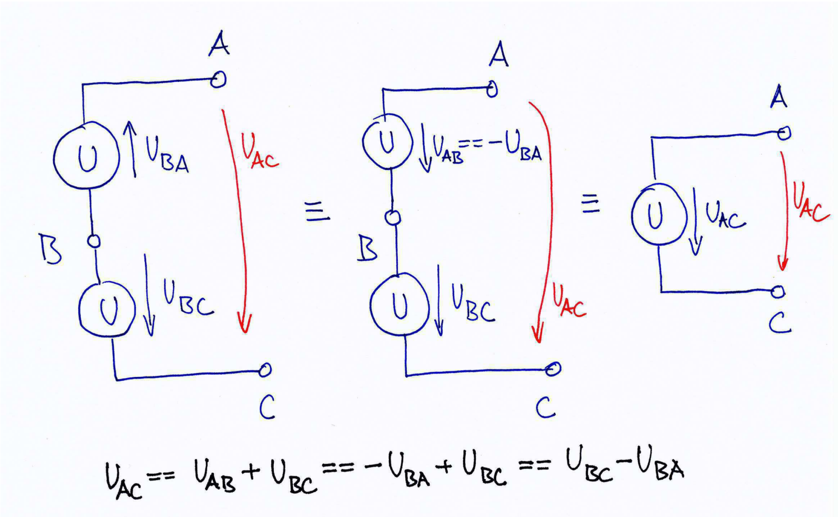
Sériové řazení dvou zdrojů napětí



Obr. 4 ukazuje tzv. *sériové* řazení dvou zdrojů napětí, někdy také nazývané řazení *za sebou*. Pro napětí mezi svorkami A a C platí rovnice

$$U_{AC} == U_{AB} + U_{BC} \qquad (3)$$

Sériová kombinace zdrojů napětí může být nahrazena jedním zdrojem napětí, jehož napětí je rovno součtu napětí obou zdrojů.



Obr. 5

Součet podle rovnice (3) platí pro orientaci šipek podle Obr. 4, v případě, že šipky označující orientace napětí nesměřují stejným směrem, použijeme podle Obr. 5, použijeme větu 2 a nahradíme (ekvivalentně) zdroj napětí U_{BA} zdrojem $U_{AB} = -U_{BA}$ s opačnou orientací a použijeme pravidlo podle rovnice 3:

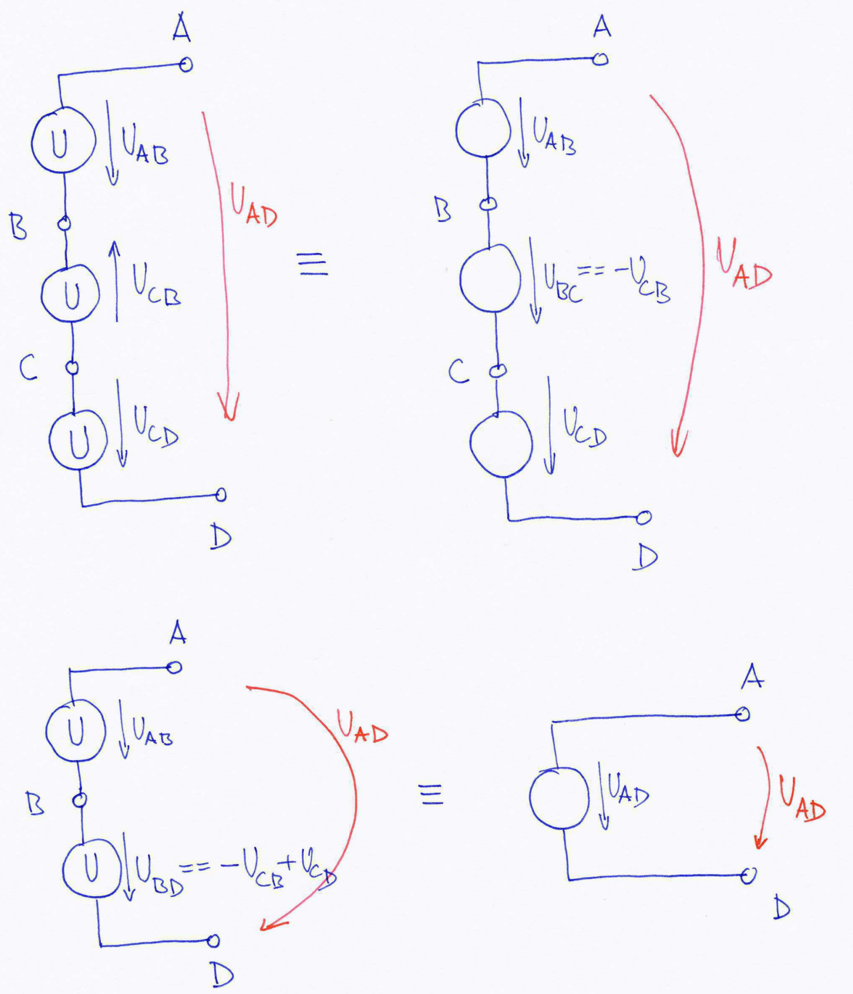
$$U_{AC} == U_{AB} + U_{BC} == -U_{BA} + U_{BC} \qquad (4)$$

Sériové spojení dvou zdrojů napětí s libovolnými orientacemi napětí zdrojů a napětí výsledného můžeme vždy pomocí věty 2, tedy $U_{XY} = -U_{YX}$, tedy přehozením orientace zdroje a změnou znaménka jeho napětí převést na situaci podle Obr. 4 a nahradit toto spojení jedním zdrojem napětí výsledné velikosti.

Poznamenejme, že v našem nástinu teorie elektrických obvodů je toto pravidlo řazení zdrojů postulované a nelze jej z jiné části teorie odvodit. Ty, kteří jsou již s teorií obvodů obeznámeni, si možná všimnou, že zde postulujeme pravidla řazení zdrojů a z nich později obdržíme Kirchhoffovy zákony, přičemž se jinde volí i postup opačný: postulují se Kirchhoffovy zákony (nebo vyvodí z teorie elektromagneticého pole) a pravidla řazení zdrojů jsou pak jejich důsledkem. Případně je pravidlo o řazení zdrojů napětí spolu s větou 2 speciálním případem pravidla platícího pro veličinu napětí obecně. Rozdíly těchto přístupů se při konkrétním vyšetřování chování obvodů podle zadaného schématu neprojeví.

Sériové řazení více zdrojů napětí

Řešení sériového řazení více zdrojů napětí je jednoduché: např. v případě tří zdrojů napětí nejprve nahradíme dva z nich, které mají společnou svorku, jedním zdroje výsledného napětí, obdržíme schéma se dvěma zdroji sériově řazenými a ty opět nahradíme zdrojem jedním, např. podle Obr. 6, případ 4 zdrojů lze převést náhradou dvou zdrojů zdrojem jedním na případ tří zdrojů atd.

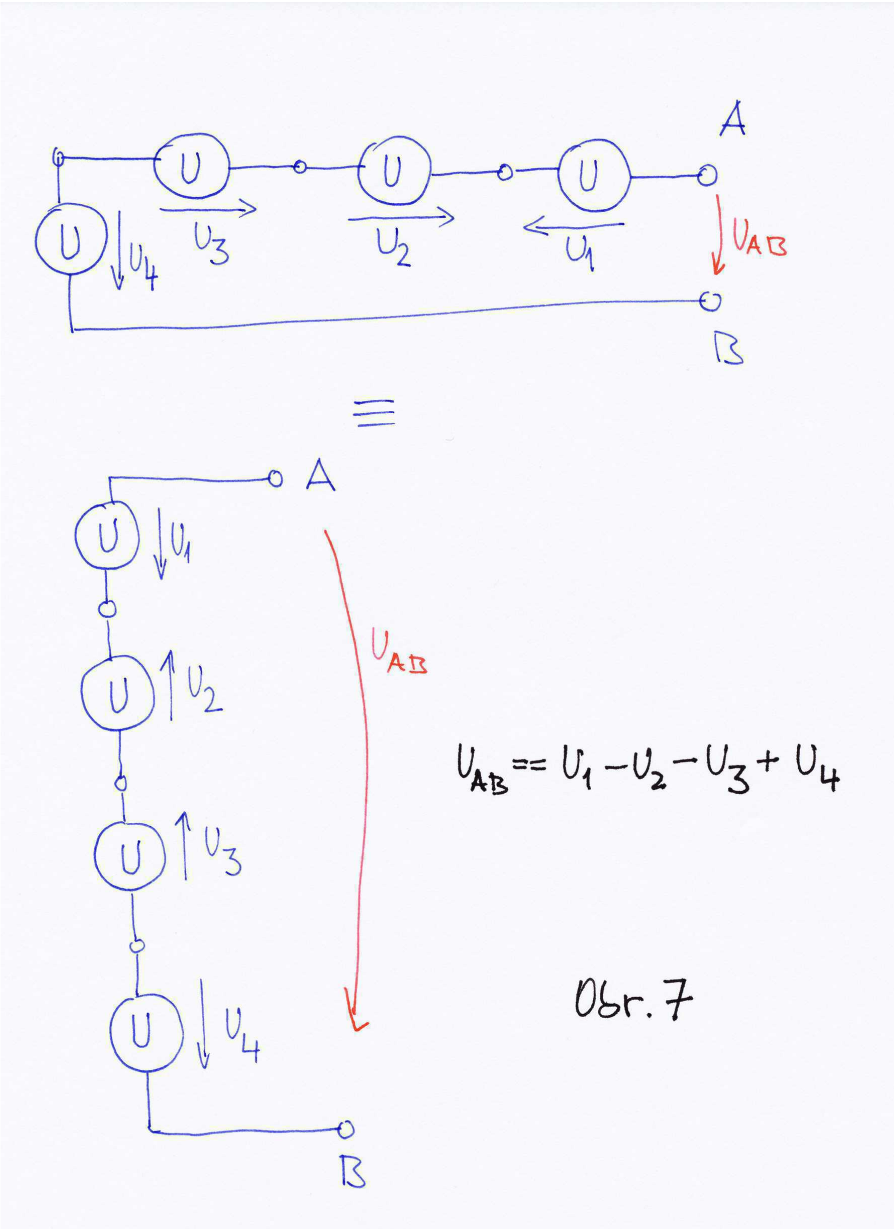


$$U_{AD} == U_{AB} + U_{BD} == U_{AB} - U_{CB} + U_{CD}$$

Obr. 6

Při praktickém řešení úloh ovšem takto krkolomně nepostupujeme, uvedený postup je jen důkazem, že pravidlo o sériovém řazení zdrojů napětí pro dva zdroje stačí k vyřešení sériového řazení libovolného počtu zdrojů a nějaké další pravidla nepotřebujeme. Při rutinním řešení postupujeme tak, že napětí, jejichž šipky mají při rozkreslení obvodu podle Obr.6 shodný směr se šipkou označující napětí výsledné bereme kladně a napětí s šipkou opačnou záporně.

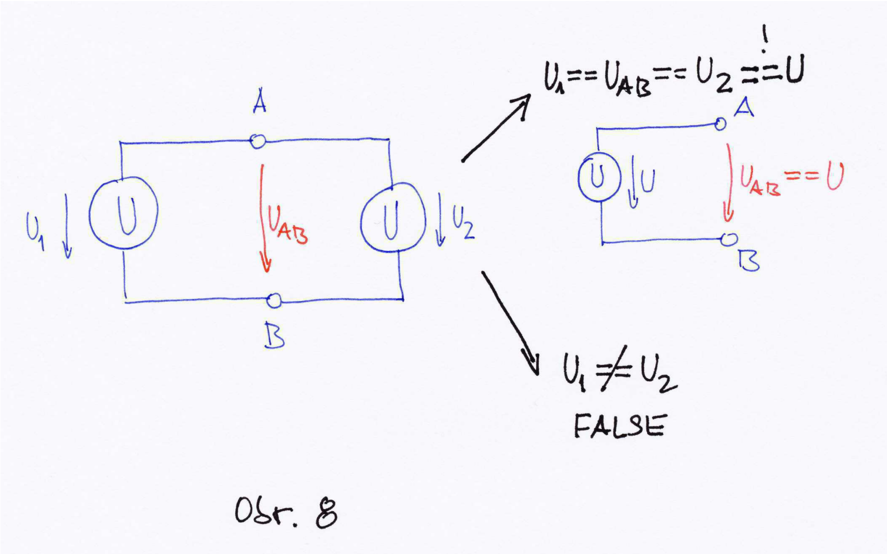
Pro čtyři zdroje je způsob ukázán na Obr. 7.



Obr. 7

Poznamenejme, že pravidlo o sériovém řazení zdrojů napětí je ekvivalentním Kirchhoffovu zákonu, který říká, že součet všech napětí v uzavřené smyčce je nulový.

Paralelní řazení dvou zdrojů napětí



Uvažme situaci podle Obr. 8, kde je zakresleno tzv. *paralelní řazení* zdrojů napětí, také zvané *řazení vedle sebe*. Je-li zdroj napětí U_1 připojen mezi svorky A a B, odpovídá to rovnici

$$U_{AB} == U_1 \qquad (5a)$$

Je-li zdroj napětí U_2 připojen mezi svorky A a B, odpovídá to rovnici

$$U_{AB} == U_2 \qquad (5b)$$

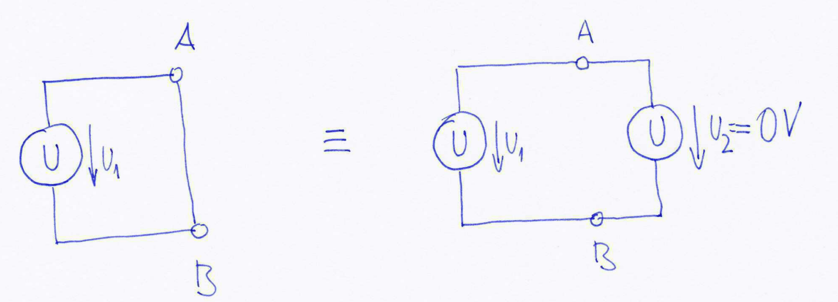
Platí-li $U_1 = U_2 \overset{!}{=} U$, obdržíme dvě identické rovnice, z nichž je zřejmě jedna zbytečná; dva zdroje stejného napětí (pochopitelně s uvážením orientace, zde podle Obr. 8) můžeme nahradit jedním zdrojem napětí.

Platí-li $U_1 \neq U_2$, soustava rovnic (5a) a (5b) nemá řešení, rovnice jsou kontradiktorické. Přidáním dvou kontradiktorických rovnic k jakémukoli systému rovnic ovšem způsobí, že celý systém nemá řešení

Paralelní řazení ideálních zdrojů napětí je tedy ryze neužitečné: v případě stejných napětí je zbytečné a v případě nestejných napětí jakýkoli obvod, který takové zapojení zdrojů napětí obsahuje, nemá řešení, nelze matematicky určit hodnoty hledaných veličin a kdybychom se jej pokusili realizovat, „nefungovalo by to“, v lepším případě by zafungoval nějaký ochranný prvek (třeba pojistka), v horším případě by například shořela nějaká součástka případně objekt.

Poznámka: proti paralelnímu řazení reálných zdrojů nemáme námitky. Modely neideálních zdrojů napětí obsahují další prvky tak, že nikdy nemůže dojít k paralelnímu spojení ideálních zdrojů přímo.

Zkrat na zdroji napětí

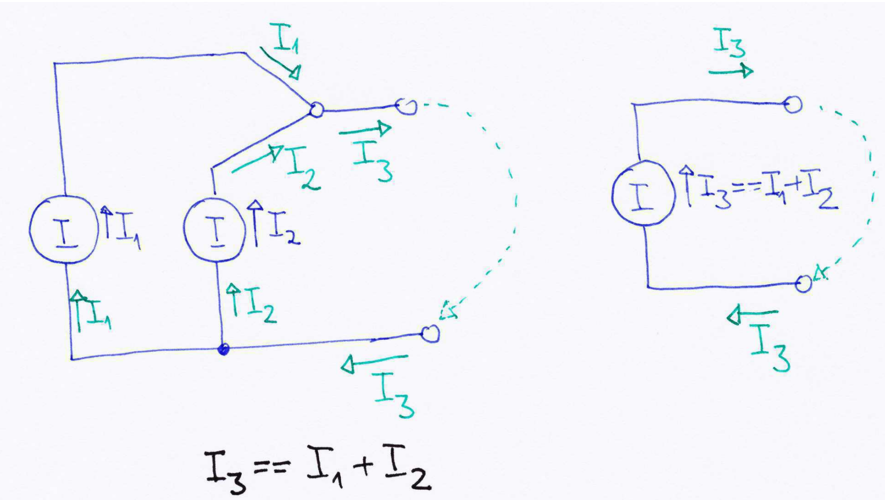


Obr. 9

Uvažme situaci podle Obr. 9, kde je zakreslen tzv. zkrat či tzv. krátké spojení na zdroji napětí. Podle výše uvedeného je ovšem rovnice popisující úsek vodiče mezi svorkami A a B shodné s rovnicí ideálního zdroje napětí o velikosti 0V. Platí tedy o tomto spojení vše, co o paralelním spojování dvou zdrojů napětí: je-li $U_1 = 0V$ je toto spojení zbytečné a postačí svorky propojit buď jen vodičem, nebo jen zdrojem napětí $U_1 = 0V$, platí-li $U_1 \neq 0V$, obvod nemá řešení, zadání je nesmyslné.
Poznámka: zkraty na reálných zdrojích napětí se někdy dějí a v případě reálných zdrojů, které nejsou proti nim chráněny svojí konstrukcí nebo nějakým dalším chránícím prvkem, mohou způsobit značné škody („kdo si tam místo nich (pojistek) nastrká hřebíky, vyhoří a začne od píky“).

Pravidla řazení zdrojů proudu

Pravidla řazení dvou zdrojů proudu

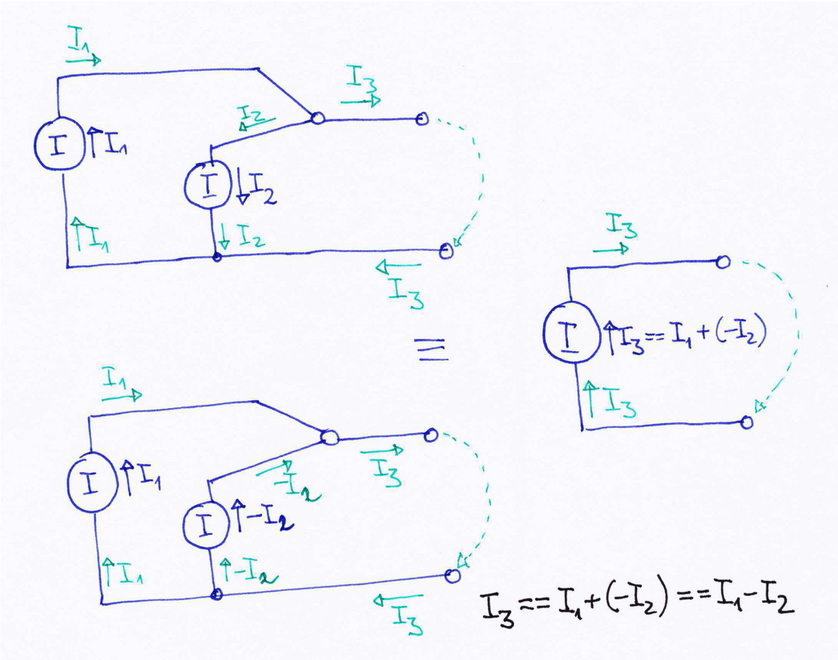


Obr. 10

Uvažme situaci podle Obr. 10, pak platí

$I_1 + I_2 == I_3$ (6)

Je tedy možno nahradit takovouto paralelní kombinaci (někde se tomu říká paralelní řazení, nebo řazení vedle sebe) jedním zdrojem proudu I_3 v orientaci podle Obr. 10.



Obr. 11

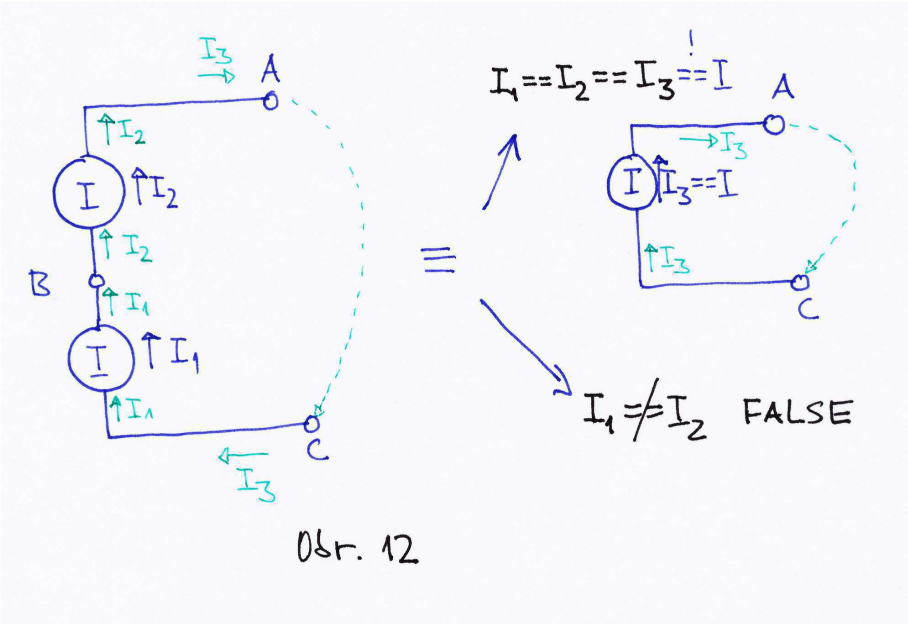
Pro jiné orientace proudů použijeme větu 1, například podle Obr. 11, kde zřejmě
$I_1 + (-I_2) == I_3$, čili $I_1 - I_2 == I_3$.
Obdobným způsobem zcela analogicky jako v případě zdrojů napětí převedeme schéma s libovolnými orientacemi proudů pomocí věty 1 na případ podle Obr. 10.

Pravidla řazení více zdrojů proudu

Bylo by podceňováním inteligence čtenáře, kdybychom podrobně popisovali postup důkazu řešitelnosti úlohy, který je zcela analogický a praktický způsob rovněž.
Pravidlo řazení více zdrojů proudu je ekvivalentní větě 1 a tudíž lze formulovat jako Kirchhoffův zákon:
Věta 3:
Celkový proud I_Σ vtékající do uzlu je nulový; celkovým proudem rozumíme
$I_\Sigma = \Sigma I_{vtékající} - \Sigma I_{vytékající}$, tedy $I_\Sigma = \Sigma I_{vtékající} - \Sigma I_{vytékající} == 0$ (7)
Věta 3 je tak důležitá, že jsme si ji označili zároveň jako rovnici (7). Jde ovšem jen o jinou formulaci věty 0.

<u>Sériové řazení zdrojů proudu</u>

Čtenáři je již jasné, že má-li být příběh o řešení elektrických obvodů správným příběhem, bude se na tomto místě skrývat opět nějaký čert.



Obr. 12 ukazuje situaci analogickou k Obr. 8: Pokud jsou proudy I_1 a I_2 stejné a tedy můžeme psát $I_1 == I_2 == I_3$, je použití dvou zdrojů zbytečné, dostáváme dvě shodné rovnice, pokud jsou proudy I_1 a I_2 různé, dostaneme dvě kontradiktorické rovnice a tudíž obvod obsahující takové zdroje nemá řešení. Každopádně je sériové řazení zdrojů proudu neužitečné. *Proti sériovému řazení reálných zdrojů proudu nemáme námitky;modely neideálních zdrojů proudu obsahují další prvky tak, že nikdy nemůže dojít k bezprostřednímu sériovému spojení jen ideálních zdrojů proudu.*

<u>Rozpojený zdroj proudu</u>

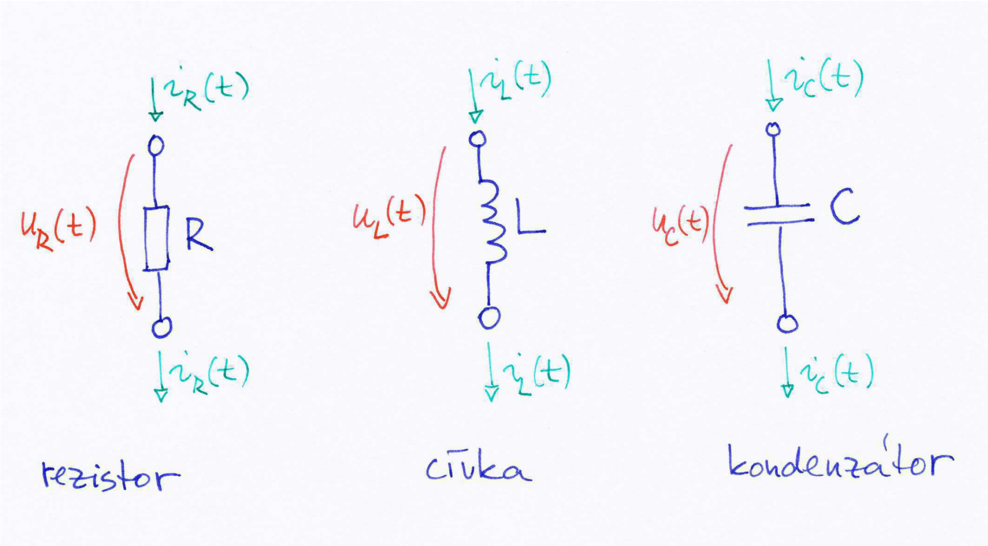
Odporuje větě 0, pokuj nejde o zdroj proudu 0A. Zdroj proudu 0A je ovšem veskrze neužitečné zavádět: mimo vodiče v našich schématech proud neteče a nemá žádný dobrý smysl na ta místa přikreslovat zdroje nulového proudu.
Při rozpojování neideálních zdrojů proudu hoří oblouky a velikosti napětí stoupají na nebezpečné hodnoty. Ve schématu se rozpojený zdroj proudu vyskytovat nesní, reálné zdroje proudu raději rozpojujeme po souhlasu cvičícího.

<u>Základní prvky elektrických obvodů</u>

V elektrických obvodech se vyskytují zejména tři základní prvky: *rezistor*, jehož vlastností je *elektrický odpor*, *cívka* (někdy nazývaná *induktor*, postaru *samoindukce*, také *indukční cívka*), jejíž vlastností je *indukčnost* a kondenzátor, jehož vlastností je elektrická kapacita.
V běžném elektrotechnickém žargonu se často zaměňuje pojem rezistor (součástka) a jeho vlastnost (elektrický odpor) a zákazník u pultu požaduje po prodavačce odpory, nikoli

rezistory. Pokud víme, co máme na mysli, není třeba si s přesným vyjadřováním dělat velké starosti.
Jelikož v rámci předmětu MAA nehrozí omyl, budeme v dalším slovo „elektrický“ vynechávat, možnost záměny např. s hydraulickým odporem a tepelnou kapacitou nehrozí.

Rezistory budeme značit písmenem velké R s indexem rozlišujícím je navzájem, kondenzátory písmenem velké C s indexy a cívky velkým L opět s indexy, pokud jich v jednom schématu bude více. Hodnoty odporu, indukčnosti a kapacity odpovídajících obvodových prvků budeme značit shodně s těmito prvky.



Obr. 13

Obr. 13 ukazuje schématické značky prvků a rovnice popisující prvky prvky pro zvolené orientace proudů a napětí.
Pro označení veličin a orientací napětí a proudů podle Obr. 13 (povšimněme se, že proudová a napěťová šipka mají stejný směr!) platí rovnice, které je pro úspěšné absolvolvování MAA dobré si pamatovat:

Rezistor:

$$u_R(t) == R \cdot i_R(t) \tag{8}$$

Rovnice (8) vyjadřuje dobře známý Ohmův zákon, vyjadřuje, že napětí na rezistoru je (v každém okamžiku) přímo úměrné protékajícímu proudu a konstanta úměrnosti je elektrický odpor rezistoru *R*.

Označíme-li jednotku odporu (R), musí platit $V = (R) \cdot A \;\Rightarrow (R) = \dfrac{V}{A} = \Omega$.

Jednotkou odporu je ohm, značený velkým řeckým písmenem omega.

Cívka:

$$u_L(t) == L \cdot i_L{}'(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \tag{9}$$

Rovnice (9) vyjadřuje, že napětí na cívce je v každém okamžiku přímo úměrné derivaci cívkou protékajícího proudu podle času a konstantou úměrnosti je indukčnost cívky *L*.

Připomeňme si definici derivace:

$$i_L'(t) = \frac{di_L(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{i_L(t+\Delta t) - i_L(t)}{\Delta t} \qquad (10)$$

V čitateli je rozdíl dvou proudů, tedy veličina s jednotkou ampér, ve jmenovateli je délka časového intervalu, tedy veličina s jednotkou sekunda; že jde o veličiny malé nemůže změnit fakt, že jednotkou derivace proudu podle času je $A/s = A \cdot s^{-1}$.
Označme jednotku indukčnosti (L), pak musí platit

$$V = (L) \cdot A \cdot s^{-1} \Rightarrow (L) = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega \cdot s = H \ .$$

Jednotkou indukčnosti je henry a značíme ji velkým *H*.
Kondenzátor:

$$i_C(t) == C \cdot u_C'(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \qquad (11)$$

Analogicky předchozímu, označíme-li jednotku kapacity (C), platí:

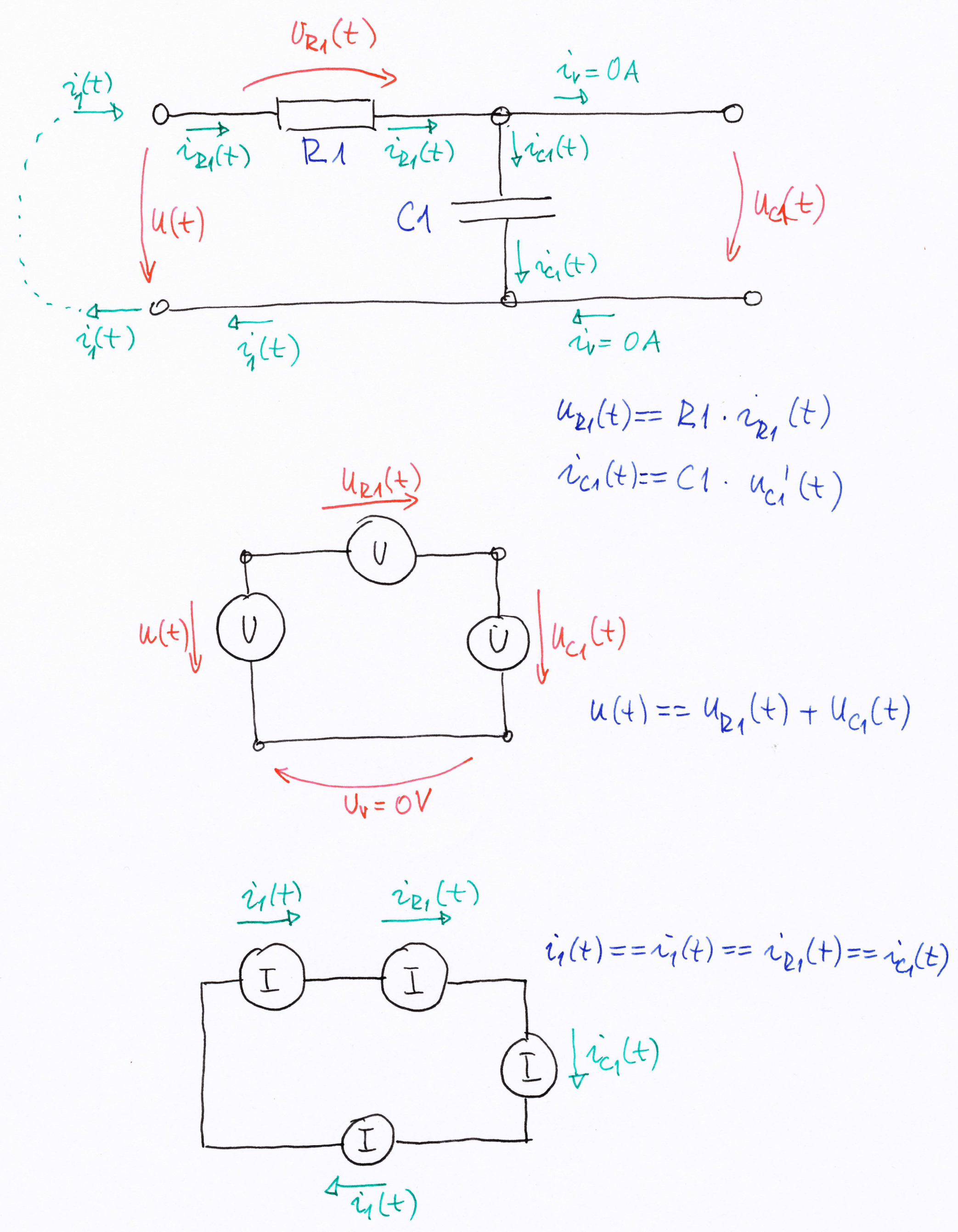
$$A = (C) \cdot V \cdot s^{-1} \Rightarrow (C) = \frac{A \cdot s}{V} = s \cdot \Omega^{-1} = F$$

Jednotkou kapacity je farad, značený velkým F.

Poznámka: hodnoty kapacit, indukčností a odporů mohou být velice různé, s výhodou používáme obvyklé předpony kilo, mili, mega, piko, mikro a podobně. Znalost vyjádření pomocí v technice obvyklých předpon piko až giga v předmětu MAA předpokládáme.

Povšimněme si, že veličinu s rozměrem sekunda můžeme vytvořit jednoduše třemi způsoby:
Rozměr sekunda mají zřejmě výrazy $R \cdot C$, $\frac{L}{R}$, $\sqrt{L \cdot C}$. Tyto výrazy skutečně budou rozhodovat o časových konstantách a frekvencích v elektrických obvodech: o věcech času mohou v konečném důsledku rozhodovat jen veličiny rozměru času.

Ukažme si, že to, co už víme (z teorie obvodů, matematiku teď s důvěrou svěříme strojům), stačí k vyřešení jednoduchého obvodu. Uvažme obvod podle Obr. 14:



Obr. 14

Napišme rovnice, které platí pro rezistor a kondenzátor:

$$u_R == R \cdot i_R(t), \quad i_C == C \cdot u_C'(t) \qquad (12)$$

Dále použijeme fakt, ža co platí pro napětí, platí i pro (ideální) zdroje napětí a uvažme prostřední schémátko na Obr. 14.

Zřejmě, pokud nemá být řešení „False“, musí platit rovnice odpovídající tomu, jak jsou rezistor, zdroj napětí a kondenzátor zapojeny:

$$u(t) == u_R(t) + u_C(t) \qquad (13)$$

Co platí pro proudy, platí ovšem i pro zdroje proudů, uvažme dolní schémátko na Obr. 14.

Aby řešení nebylo „False“, musí platit:

$$i(t) == i_R(t) == i_C(t) \qquad (14)$$

Obdržíme dosazením z (12) do (13) a (14)

$$u(t) == u_C(t) + R \cdot C \cdot u_C{}'(t) \qquad (15)$$

Získali jsme tzv. diferenciální rovnici pro napětí $u_C(t)$, které je zároveň rovno výstupnímu napětí.

Rovnice (15) určuje časový vývoj napětí $u_C(t)$ v závislosti na vstupu $u(t)$ a pro dané spojení na hodnotě součinu $R \cdot C$.
Mimochodem, je zajímavé, že jde o hodnotu součinu $R \cdot C$, nikoli o obě hodnoty, *R* a *C*, $1\mu F \;\; a \;\; 1000\Omega$ dá co se týče $u_C(t)$ stejný výsledek jako $10\mu F \;\; a \;\; 100\Omega$, proudy ovšem budou jiné, součin $R \cdot C$ značíme někdy τ (tau) a $\tau = R \cdot C$ říkáme časová konstanta obvodu.

Jak tuto rovnici řešit? Na to je ještě brzy, musíme si nejprve uvědomit, co ještě musíme znát pro nalezení konkrétního řešení rovnice (15).

Představme si představitelnější časový vývoj: jaká bude teplota piva za deset minut záleží nejen na tom, jak na něj působí okolí (je v lednici a chladí se, stojí na stole a teplá), ale také na tom, jakou má teplotu teď.

Napětí v čase *t* na kondenzátoru tedy také záleží na tom, jaké je napětí na kondenzátoru teď.

Známe-li hodnotu napětí na kondenzátoru v čase t_0, tedy $u_C(t = t0) == u_{C0}$, de u_{C0}je známá hodnota a je –li známa rovnice (15) –tedy známe-li hodnotu $\tau = R \cdot C$ a známe-li, jak na obvod působí okolí, tedy známe-li časový průběh $u(t)$, můžeme rovnici vyřešit.
Řešitelný je tedy systém

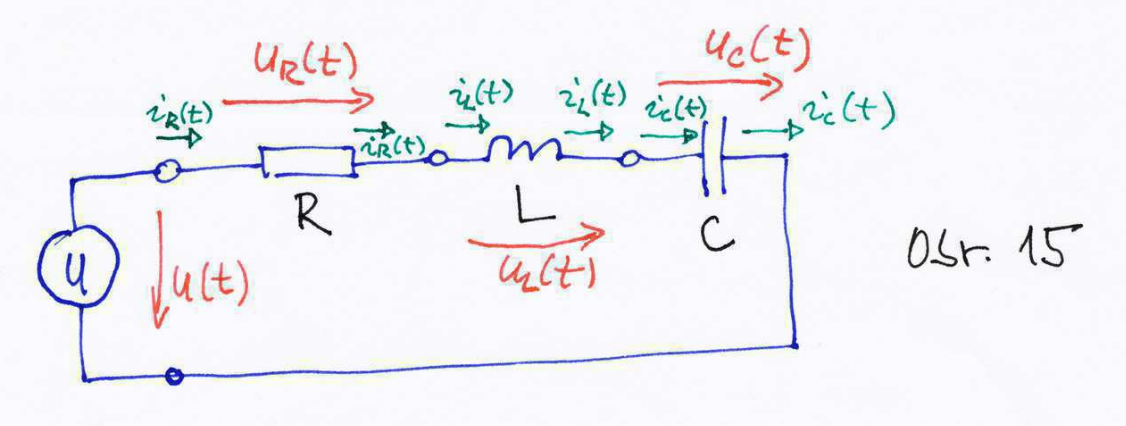
$$u(t) == u_C(t) + R \cdot C \cdot u_C{}'(t)$$

$$u_C(t = t0) == u_{C0}$$

Kde rovnici obsahující derivaci říkáme diferenciální rovnice s neznámou funkcí $u_C(t)$ a rovnici obsahující zadání hodnoty neznámé funkce $u_C(t)$ v nějaké konkrétní hodnotě parametru říkáme počáteční podmínka.

Další ukázka: sériový RLC obvod

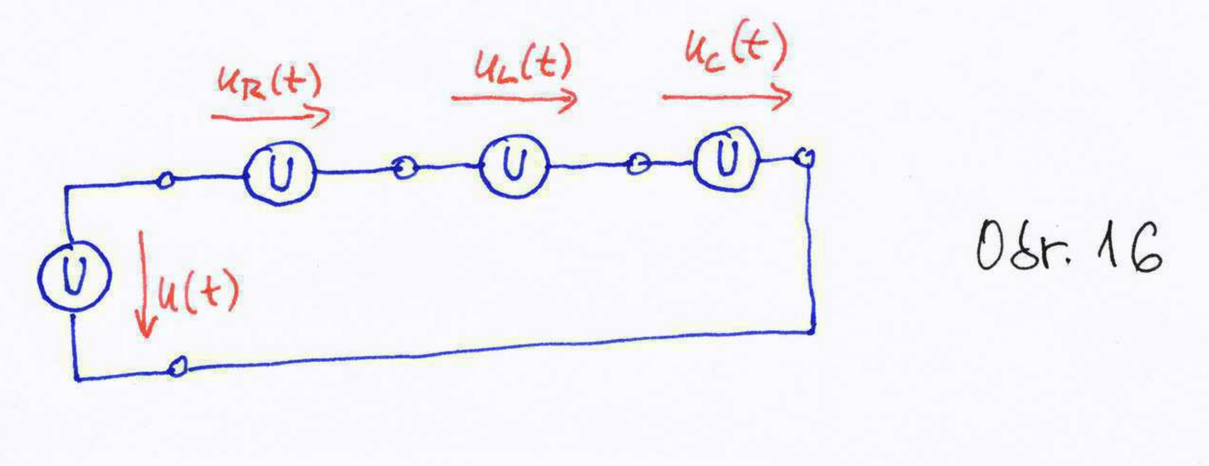
Ukažme si postup sestavení rovnic na dalším příkladu: na Obr. 15 je schéma zapojení rezistoru R, cívky L a kondenzátoru C v sérii.



Vyznačili jsme si zvolené orientace napětí na R, L, C a směry proudů jsme zvolili tak, aby byla zvolená orientace proudu na R, L, C ve stejném směru jako orientace napětí. Pak můžeme mechanicky napsat rovnice jednotlivých prvků:

$$u_R(t) == R \cdot i_R(t)$$
$$u_L(t) == L \cdot i_L{}'(t) \qquad (16)$$
$$i_C(t) == C \cdot u_C{}'(t)$$

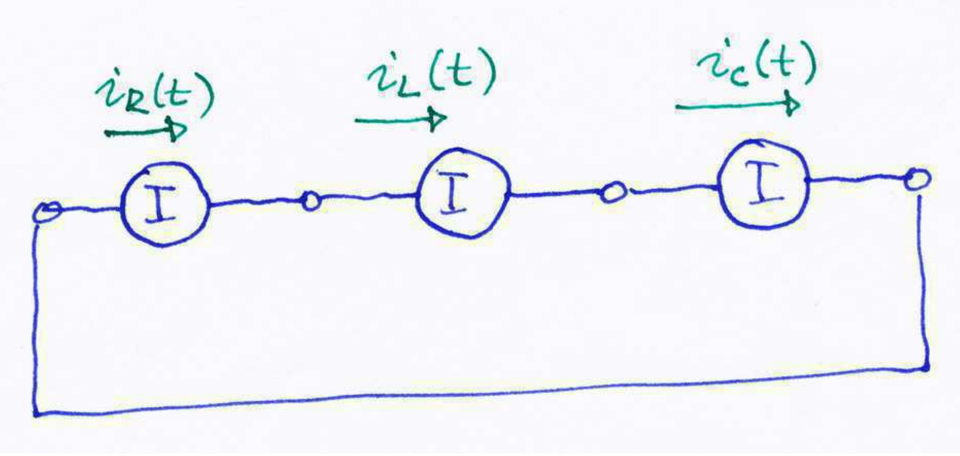
Překreslíme si Obr. 15 tak, že uvažovaná napětí nahradíme (ideálními) zdroji napětí a získáme Obr. 16.



Z pravidel pro řazení zdrojů napětí plyne rovnice:

$$0 == u(t) - u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) \qquad (17)$$

Překresleme si schéma na Obr. 15, kde místo tekoucích proudů zakreslíme (ideální) zdroje proudů, získáme Obr. 17:



Obr. 17

Spojení zdrojů proudu odpovídají rovnice:

$$
\begin{aligned}
i_R(t) &== i_L(t) \\
i_L(t) &== i_C(t)
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

Rovnic (16), (17), (18) je celkem šest a máme šest neznámých: tři neznámé proudy a tři neznámá napětí.
Veličiny, které se v rovnicích vyskytují v derivacích (tedy napětí která jsou na kondenzátorech a proudy tekoucí cívkami), vyžadují ještě počáteční podmínky, tedy

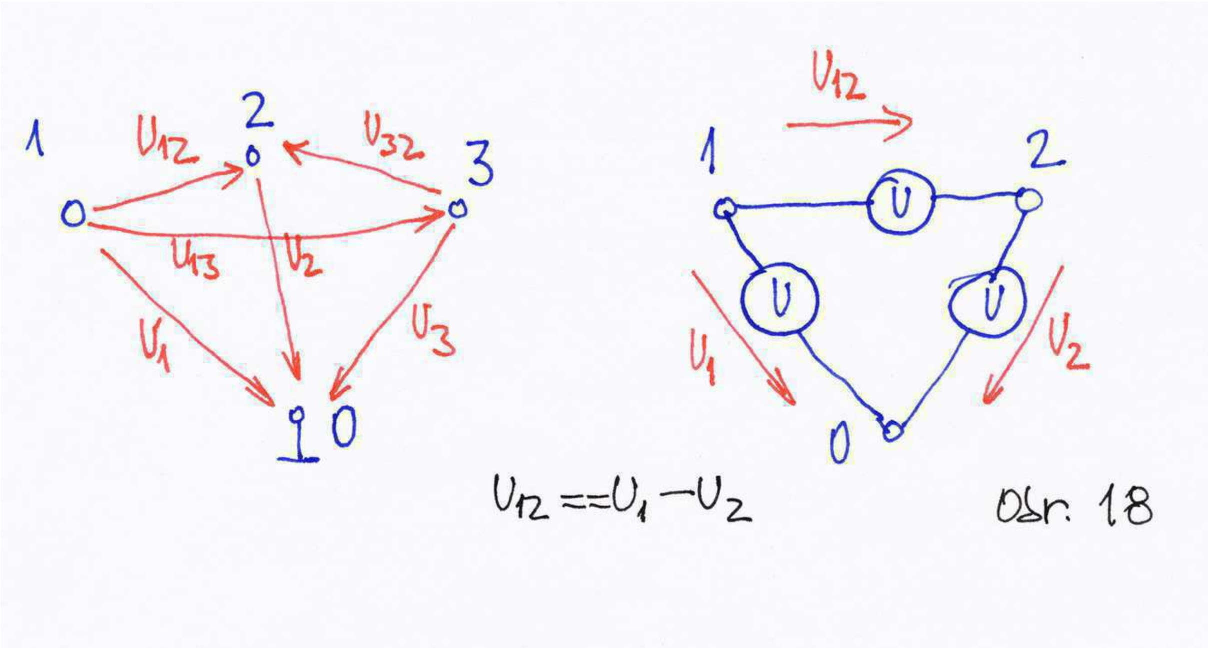
$$
\begin{aligned}
&u_C(t = t_0) == u_{C0}, \quad u_{C0} \text{ je zadané} \\
&i_L(t = t_0) == i_{L0}, \quad i_{L0} \text{ je zadané}
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

Systém rovnic (16), (17), (18), (19) je pro zadané hodnoty *R* ,*L*, *C* snadno řešitelný, viz. Notebook MAARLCNDSolve.nb

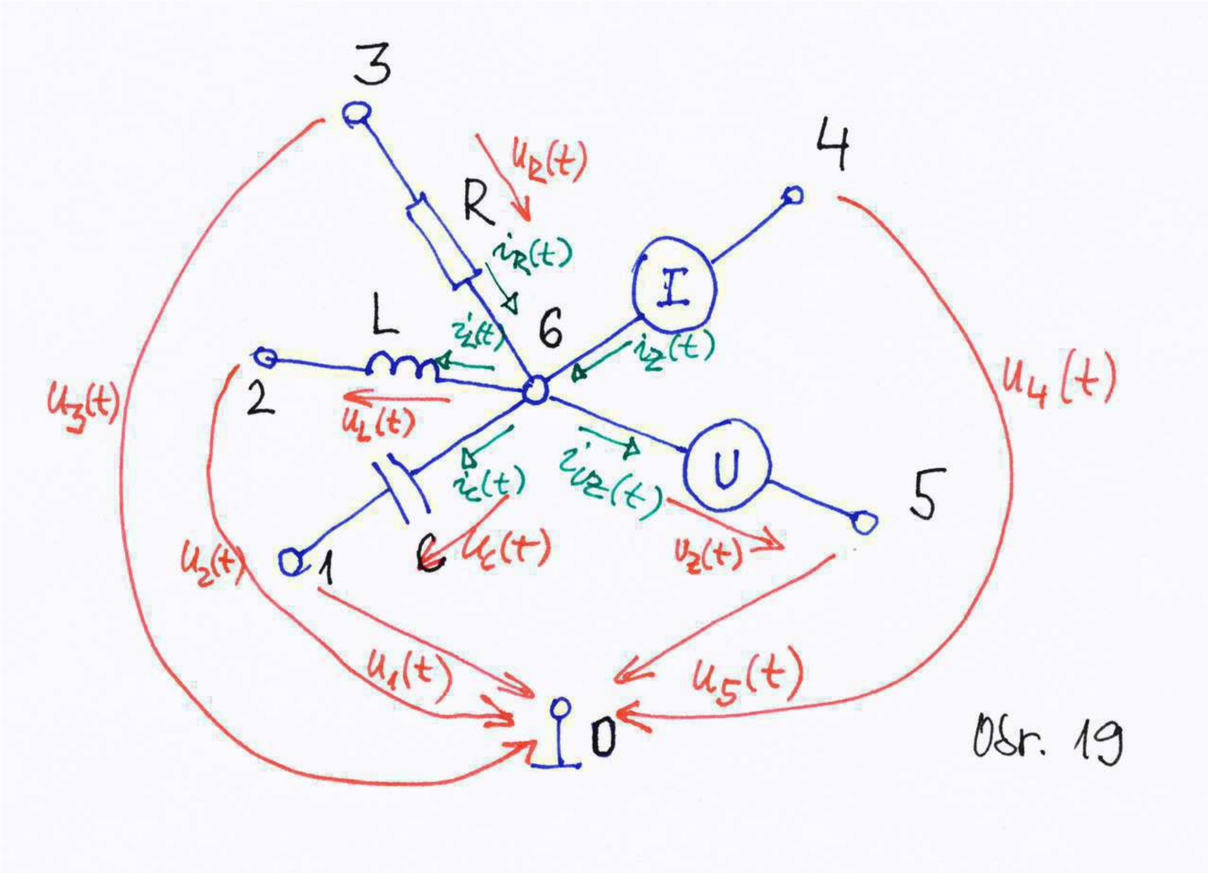
Získali jsme úplné řešení: máme k dispozici časové průběhy všech obvodových veličin. Ovšem je zřejmé, že některé rovnice jsou velmi jednoduché, kdybychom si již na začátku označili, že obvodem teče jeden proud (to je nám ostatně zřejmé téměř od počátku), ušetřili bychom si dvě neznámé a dvě rovnice.
Navíc v našem velice jednoduchém obvodu bylo jasné, jak rovnice týkající se řazení napětí napsat, to nemusí být vždy jednoznačné. Ukážeme si nyní spolehlivý postup, jak každý korektně zapojený (například neporušíme pravidla řazení zdrojů proudu a napětí) popsat rovnicemi a to pomocí tzv. metody uzlových napětí.

Metoda uzlových napětí

Metoda uzlových napětí využívá zachování proudů, proudy však vyjadřujeme pomocí napětí☺.



Na Obr. 18 jsou zakresleny tzv. uzly 1, 2, 3 a uzel 0 označený značkou pro společný vodič. Známe-li napětí uzlů 1, 2 a 3 proti uzlu 0, tedy napětí U_1, U_2, U_3, pak můžeme určit napětí mezi kterýmikoli dvěma uzly, například platí:
$U_1 == U_{12} + U_2 \;\Rightarrow U_{12} == U_1 - U_2$. Ke znalosti napětí mezi kterýmikoli dvěma body stačí, abychom znali napětí bodů vůči společnému vodiči. Budeme-li napětí na prvku mezi dvěma uzly počítat z rozdílu napětí těchto uzlů proti (libovolně zvolenému) společnému uzlu, splníme vlastně automaticky rovnice plynoucí z řazení napětí (a tedy i zdrojů napětí).



Obr. 19

S prvky, se kterými jsme se zatím z teorie obvodů seznámili, přichází v úvahu pro každý uzel situace podle Obr. 19: uvažovaný uzel může být spojen s dalšími uzly rezistorem, kondenzátorem, cívkou, zdrojem napětí a zdrojem proudu, na obrázku jsou vyznačeny také (libovolně zvolené) orientace napětí mezi uzly a shodně s orientací napětí orientace proudů (aby platily rovnice (8), (9) a (11) popisující vztahy mezi proudem a napětím na rezistoru, cívce a kondenzátoru).
Vyjádříme všechny proudy tekoucí do a nebo z uzlu 6 a uvedeme, jestli dotyčný proud vtéká nebo vytéká: abychom správně dosadili do rovnice (7).

Uzly 3 a 6:

$$u_R(t) == R\cdot i_R(t),\ u_R(t) == u_3(t)-u_6(t)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow i_R(t)=\frac{u_3(t)-u_6(t)}{R} \qquad \textit{vtéká} \qquad (20)$$

Uzly 1 a 6:

$$i_C(t) == C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}, \;\; u_C(t) == u_6(t) - u_1(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt}\left(u_6(t) - u_1(t)\right), \qquad vyt\acute{e}k\acute{a} \tag{21}$$

Ke kondenzátoru ještě vždy patří počáteční podmínka s napětím:

$u_C(t = t_0) = u_6(t = t_0) - u_1(t = t_0) == u_{C0}, \qquad u_{C0}$ zadané

Uzly 4 a 6:

Zde je situace nejjednodušší, daný definicí zdroje proudu:

$i_Z(t), \qquad vt\acute{e}k\acute{a}$.

Zatím jsme tedy získali proudy, které budeme dosazovat do rovnice (7), bylo to jednoduché, protože z rovnic pro rezistor a kondenzátor jde při známém napětí vyjádřit snadno proud pomocí dělení nebo pomocí derivace napětí a proud ze zdroje proudu je zadaný z definice zdroje proudu. V rovnici pro ideální zdroj napětí se proud nevyskytuje, nelze z ní tedy vyjádřit. Pomůžeme si tak, že tento proud pojmenujeme, čímž získáme novou neznámou. Pro další neznámou ale potřebujeme další rovnici: bude to rovnice zdroje napětí.

Uzly 5 a 6

$i_{UZ}(t), \qquad vyt\acute{e}k\acute{a}$

Nová rovnice:

$$u_Z(t) == u_6(t) - u_5(t) \tag{22}$$

Obdobně naložíme s cívkou, proud jí tekoucí označíme jako novou proměnnou a rovnici pro cívku přidáme k systému rovnic.

Uzly 2 a 6

$i_L(t), \qquad vyt\acute{e}k\acute{a}$

$$u_L(t) == L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}, \;\; u_L(t) == u_6(t) - u_2(t)$$

Nová rovnice

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} == u_6(t) - u_2(t) \tag{23}$$

K cívce ještě vždy patří počáteční podmínka s proudem:

$i_L(t = t_0) == i_{L0}, \qquad i_{L0}$ zadané

Dosaďme za proudy do bilance (7)

$$\Sigma I_{vtékající} = \frac{u_3(t) - u_6(t)}{R} + i_Z(t)$$

$$\Sigma I_{vytékající} = i_L(t) + i_{UZ}(t) + C \cdot \frac{d}{dt}\big(u_6(t) - u_1(t)\big)$$

Rovnice popisující zachování proudu v uzlu:

$$\Sigma I_{vtékající} - \Sigma I_{vytékající} = \frac{u_3(t) - u_6(t)}{R} + i_Z - \left(i_L(t) + i_{UZ}(t) + C \cdot \frac{d}{dt}\big(u_6(t) - u_1(t)\big) \right) == 0 \qquad (24)$$

Další rovnice vzniklé z důvodu nově zavedených neznámých:

$$u_Z(t) == u_6(t) - u_5(t)$$

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} == u_6(t) - u_2(t) \qquad (25)$$

Počáteční podmínky pro kondenzátory a indukčnosti:

$u_C(t = t_0) = u_6(t = t_0) - u_1(t = t_0) == u_{C0}, \qquad u_{C0}$ zadané

$i_L(t = t_0) == i_{L0}, \qquad i_{L0}$ zadané .

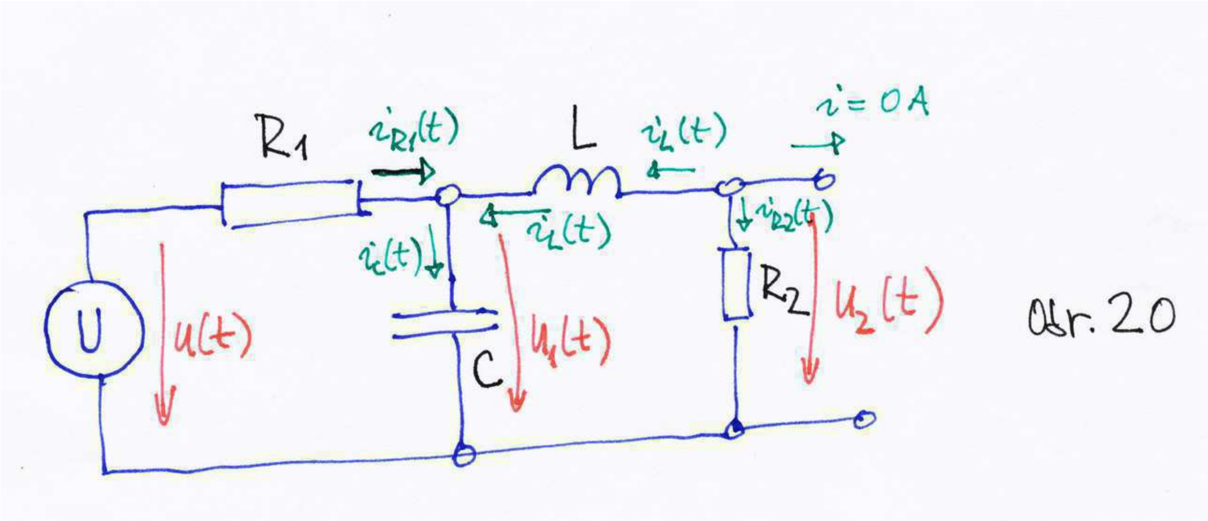
Pro každý uzel můžeme napsat 1 rovnici popisující zachování proudu, jako jsme napsali rovnici (24). Zavádíme-li nové proměnné, ke každé okamžitě máme rovnici. Máme tedy tolik rovnic, kolik je neznámých.

Je tedy naděje, že má-li schéma dobrý smysl, můžeme nalézt neznámá napětí uzlů a hodnoty nově zavedených proměnných. Veličiny, které jsme vyloučili dosazením vlastností obvodových prvků, můžeme snadno dopočíst, například $i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt}\big(u_6(t) - u_1(t)\big)$ a podobně.

Poznámka 1: Pokud zavádíme novou proměnnou a rovnici, učiníme tak když ji poprvé u některého z uzlů potřebujeme; podruhé bychom dělali totéž zbytečně znovu: to není chyba, ale je to hloupé.

Poznámka 2: ne vždy má *n* rovnic o *n* neznámých právě jedno řešení a to ani v případě rovnic diferenciálních. Pokud má být ale obvod použitelný v praxi, chtěli bychom právě jedno řešení a to dokonce omezené, nekonečná napětí a proudy by v praxi nefungovaly.
Pokud nedokážeme získat jedno řešení srozumnými výsledky, buď jsme obvod popsali špatně, nebo je schéma nesmyslné, nebo se ptáme na veličinu, kterou nelze určit (například napětí mezi tzv. galvanicky zcela oddělenými obvody…)

Ukažme si to na obvodu podle Obr. 20:



Uzel 1:
Rovnice popisující zachování proudu:

$$i_{R1}(t)+i_L(t)==i_C(t)\Rightarrow\frac{u(t)-u_1(t)}{R_1}+i_L(t)==C\cdot\frac{d}{dt}\left(u_C(t)-0\right)$$

Rovnice z důvodu nově zavedené proměnné:

$$u_2(t)-u_1(t)==L\cdot\frac{di_L(t)}{dt}$$

Počáteční podmínka pro cívku:

$i_L(t=t_0)==i_{L0},\qquad i_{L0}$ zadané

Počáteční podmínka pro kondenzátor:

$u_C(t=t_0)==u_{C0},\qquad u_{C0}$ zadané .

Uzel 2:

Rovnice popisující zachování proudu:

$$0-\left(i_L(t)+\frac{u_2(t)-0}{R_2}+0\right)==0$$

Rovnice z důvodu nově zavedené proměnné:
-nejsou, opakovali bychom se

Počáteční podmínky:
Nepřibyla žádná nová cívka ani kondenzátor, nejsou.

Řešení je provedeno v notebooku MAAUzlyUkazka.nb

Diferenciální rovnice a předpovídání budoucnosti, co vlastně dělá NDSolve

Podíváme-li se na notebook MAAUzlyUkazka.nb, vidíme, že jsme se k cíli, tedy k vyřešení úkolu „když je zadané napětí nebo proud někde, jaké bude napětí nebo proud jinde“, dostali přímočaře a snadno, tak snadno, že byla nálada vyhrát si trochu i s barvičkami a vlastně stačilo mechanicky použít návod pro metodu uzlových napětí a znát syntaxi NDSolve.
To, že cesta k výsledku byla tak jednoduchá, bylo způsobeno právě tím, že máme NDSolve: nevadilo nám zavádění dalších neznámých a zvyšování počtu rovnic, nevadilo nám, že rovnice jsou diferenciální i algebraické (obsahující derivace neznámých funkcí i neobsahující derivace neznámých funkcí).
Velká část obtížnosti studia teorie elektrických obvodů spočívá jinde v obtížnosti řešení získaných rovnic. Získali jsme velikou moc velmi snadno, ale nenechme se mýlit, zjistit, „co obvod dělá“ ještě vůbec neznamená rozumět tomu, jak to dělá a proč. Fakt, že umíme po pár obrázcích mnoho ještě neznamená, že jsme nějak lepší: jen my máme sbíječku a oni majzlík; jak rychle dílo dokončíme je důležité ekonomicky, ale kvalita díla nemusí být větší.
O NDSolve by šlo říci tak asi „…a všichni se podivovali, jakou moc dal Stephen Wolfram lidem.“

Funkce NDSolve[rovnice, neznámé, interval řešení] hledá numerickou aproximaci řešení diferenciálních rovnic. A co to je a proč to můžeme dělat bychom si měli trochu více vysvětlit: nikoli podrobně teorii numerických řešení diferenciálních rovnic, k tomu jsou povolanější jiní (zejména www.wolframalpha.com a help sw Mathematica u NDSolve). Jde nám o to, získat představu, o co tak asi jde. Ostatně jak funguje karburátor víme také jen tak mlhavě a detaily mísení ve více komorách běžný řidič nezná. Ale i běžný řidič ví, že se tam něco s benzínem a vzduchem děje.

Proč vlastně numerické metody? Matematická analýza pracuje s představou souvislé číselné osy plné reálných čísel z nichž naprostá většina jsou čísla iracionální. Kdybychom chtěli iracionální číslo vyjádřit desetinným číslem přesně, potřebovali bychom nekonečný počet desetinných míst, což není v konečném čase možné, navíc to není ani praktické: *kdyby* byla Mléčná dráha kruhová a *kdybychom* znali její poloměr a *kdyby* nebyl vesmír zakřivený a platil by vzoreček pro obvod kruhu, pak vynecháme-li všechna desetinná místa za čtyřicátým v čísle π, chyba vzniklá tímto zaokrouhlením by byla menší než průměr protonu.
Z uživatelského hlediska jsou tedy všechny další cifry pro řešení podobných úloh zbytečné.

Dnešní matematika nese v sobě velkou část dědictví geometrie starých Řeků, kde byl kladen důraz na konstrukce ve světě geometrických objektů zcela přesné, úplná správnost pak měla být dokazatelná v konečném počtu myšlenkových kroků. Navíc obrovský úspěch Newtonovy a Lagrangeovy mechaniky utvrzoval vědce v představě světa spojitého, nekonečně dělitelného v prostoru a čase a tak byla vypracována spousta chytrých metod řešení matematických a inženýrských problémů vycházejících z představy spojitého světa.
Ani objev kvantové povahy jevů a částicové struktury hmoty příliš spojité teorie neoslabil: částic je v běžných situacích jednoduše příliš mnoho na to, abychom s nimi mohli počítat jednotlivě a s chytrou obezličkou kontinuální teorie (neuvažujeme veličiny lokální, ale jejich střední hodnoty přes objemy, které jsou „mikroskopicky velké a makroskopicky malé“) naše rovnice platí, pokud neuvažujeme jevy mikrosvěta.

Problém je, že s iracionálními čísly pracujeme jinak, než s čísly racionálními: jelikož je nemůžeme zapsat v konečné formě desetinným (nebo dvojkovým, to je jedno) rozvojem, nebývá nám, než je pojmenovat.

Taková čísla jsou například π, e, $\sqrt{5}$, Sin[5]...Pokud chceme s těmito čísly pracovat přesně, používáme pravidla pro úpravy, například $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5}$.
Pokud nás zajímá „kolik to je, alespoň přibližně“, máme přibližné vyčíslení v tabulkách; jde často o výsledek programu, který by nám dal všechna desetinná čísla, kdyby běžel věčně, ale my jsme jej zastavili a spokojili se s nepřesným výsledkem, zato získaným v konečném čase. Z tohoto pohledu jsou v číslech π, e, $\sqrt{5}$, Sin[5]... „do pojmenování schované výsledky nekonečných procesů“ a úlohy se opět řeší v klasickém stylu: řešení úlohy vtipným použitím konečného počtu kroků s použitím připravených hodnot čísel typu π, e, $\sqrt{5}$, Sin[5]... se považuje za cosi pěkného a ukazuje to jak je matematik chytrý, chcete-li ovšem použitím triků řešit složitější úlohy, brzy narazíte.

Toto pojetí má výhodu (pro technika naprosto zbytečné) absolutní přesnosti, nevýhodou je, že kromě za staletí vynalezených a vyzkoušených postupů nemáme žádný návod, jak příslušné triky vynalézat, naopak často umíme dokázat, že řešit úlohu s použitím již známých „do pojmenování schovaných výsledků nekonečných procesů“ nelze. Pokud chceme pracovat nadále přesně, nebývá, než si hledané přesné řešení pojmenovat.

Například řešení rovnice
$a_1 \cdot x + a_0 == 0, \quad a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0,$
$a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0, \quad a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0$
lze vyjádřit pomocí sčítání, násobení, dělení a odmocňování, tedy existují vzorce, které nám dají hodnotu neznámých kořenů x a tyto vzorce jsou konečné délky zápisu.
Pro rovnici:
$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0$
lze dokázat, že vzorec konečné délky obecně neexistuje (jasně, pro zvláštní hodnoty koeficientů existovat může, těchto zvláštních případů je však mnohem méně než obecných a pravděpodobnost, že půjde najít vzorec pro náhodně zvolených 6 koeficientů, je nula).
Chceme-li mít vzorec pro rešení v konečném tvaru, musíme si jej pojmenovat. Často pak těmto pojmenováním říkáme „speciální funkce“, pro polynomiální rovnice například v Mathematice máme funkci Root. Není o nic horší, než funkce druhá odmocnina nebo sinus, jenom je mladší a nejsme na ni zvyklí.

Postup, kdy můžeme o každém výsledku v konečném počtu kroků dojít ekvivalentními úpravami až k axiomům a tak rozhodnout o správnosti nebo nesprávnosti nemusí existovat (Gödel, Tarski, Banach...).
Požadavek absolutní přesnosti a ostrosti pojmů, kterou jsme předpokládali po staletí (muž nebo žena, živý nebo mrtvý, vlna nebo částice, je a nebo to není babička...) je neaplikovatelný a ostatně na proudu a napětí a teplotě jsme viděli, že používáme v životě pojmy bez znalosti přesných definic a v konečném důsledku bez naprosto přesných výpovědí a nikterak nám to nevadí. Koho to zajímá více, pěkně o tom pojednává Ludwig Wittgenstein ve svých Filosofických zkoumáních.

My v toto chvíli přesná řešení opustíme: ostatně i naše vstupy jsou poměrně nepřesné.

Podívejme se na definici derivace funkce f, parametrem této funkce bude čas t.

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{26}$$

Limitní proces dokonalého „blížení se“ je ve světě konečného počtu dostupných čísel nemožný: i v intervalu $\langle 0, 10^{-17} \rangle$ je ve smyslu reálných (ten název „reálná čísla je trochu výsměch“) nekonečněkrát více čísel, která kdy použijí všechny počítače a to i kdyby vesmír s počítači trval věčně. Mezi „bez pojmenování“ dostupnými čísly jsou mezery a nikdy nebude dost jmen pro ta pojmenovaná.

Učiníme tedy troufalý krok: vypustíme znak limity, Δt budeme uvažovat v „nějakém dobrém smyslu malé“ a znak přesné rovnosti nahradíme znakem „rovná se přibližně“ $\approx$.
Obdržíme:

$$f'(t) \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{27}$$

Z rovnice (27) ovšem již můžeme vyjádřit $f(t+\Delta t)$:

$$f(t+\Delta t) \approx f(t) + f'(t) \cdot \Delta t \tag{28}$$

Pokud příslušná limita a tedy i derivace existuje, bude pro „dostatečně malé Δt“ chyba „dostatečně malá“.

Pokud je naše nezávisle proměnná čas, můžeme rovnici (28) chápat jako „předpovídání budoucnosti“, znalost $f(t)$ a $f'(t)$ nám pro zvolené Δt poskytne *přibližnou informaci* o hodnotě funkce f o Δt později, tedy přibližnou hodnotu $f(t+\Delta t)$.

Problém je, že samotná existence konečné derivace $f'(t)$ nám zajistí jen to, že zvolíme-li si nějakou hodnotu nepřesnosti ve vztahu (28), *existuje* takové Δt, že pro každé menší Δt bude nepřesnost menší, než zvolená hodnota. Samotná existence konečné derivace nám ale neřekne, jak malé Δt máme volit pro zvolenou míru nepřesnosti.
Ukázka, jak například řešit Eulerovou metodou případ dvou neznámých funkcí je v MAAPr2RLCdif2.nb. V podstatě jakmile dokážeme z rovnic získat funkci, která vrací vektor derivací neznámých proudů a napětí a jejímiž parametry jsou ona neznámá napětí a čas, je vyhráno. V první buňce je syntaxe, jak takovou funkce získat z rovnic poměrně obecně, dále je naprogramován postup již jen pro dvě neznámé funkce: přepis druhé části na obecný tvar ponecháváme zvídavému čtenáři coby cvičení.

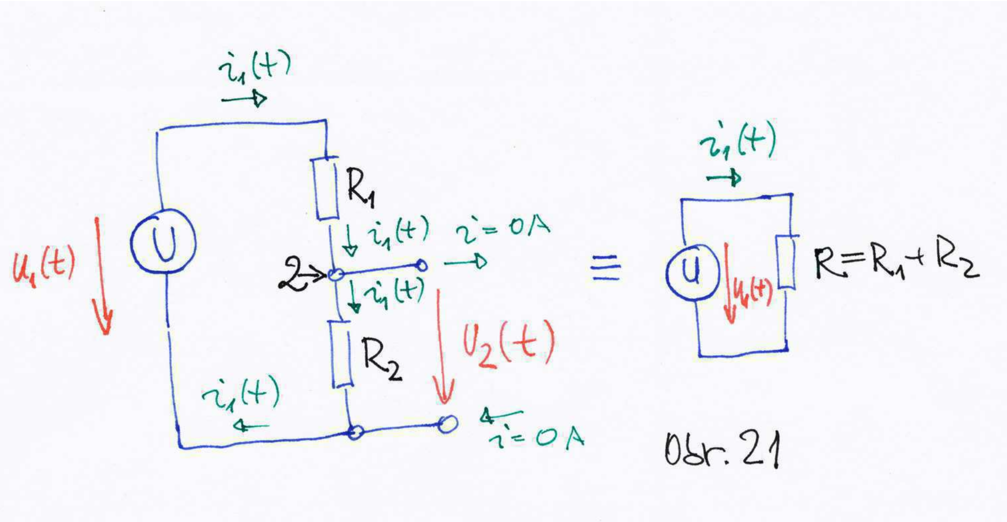
Metoda vycházející z uvedeného postupu se jmenuje Eulerova metoda řešení obyčejných diferenciálních rovnic. NDSolve používá mnoho různých metod, které navíc mají nastavitelné parametry (nepovinnými parametry funkce NDSolve) , například proměnlivý krok Δt, což zrychluje výpočet: tam, kde se hodnoty mění rychle, volí NDSolve menší Δt, aby dosáhlo zvolené přesnosti, byť za cenu delšího výpočetního času, v oblastech málo se měnících

hodnot vstupů a hledaných veličin se krok prodlužuje, čímž výpočet zrychlujeme: v podstatě je to jako chování řidiče v serpentinách a na dálnici.
Metody obsažené v NDSolve jsou však v podstatě stejného principu jako metoda Eulerova, alespoň v tom smyslu, že využívají derivací k odhadu změn veličin podobně jako ve vztahu (28), ovšem podstatně sofistikovanějším způsobem.

Nyní umíme vyřešit všechny řešitelné obvody obsahující rezistory, kondenzátory, cívky a zdroje proudu a napětí. Naprostá většina takových obvodů je zhola neužitečná, některé jednoduché případy se ale vyskytují často a je dobré znát řešení těchto jednoduchých a často se vyskytujících případů zpaměti: ostatně při počítání bez pomoci strojů si pro výsledek násobení malých čísel saháme do paměti, teprve pro násobení větších použijeme algoritmus převádějící problém na sčítání a vícenásobné sahání do paměti.

<u>Základní jednoduché případy: děliče a spojování součástek stejného typu</u>
Rovnice řešeny notebooku MAAJednoduchePripady.nb

Uvažme situaci podle Obr. 21:



Napišme rovnice pro uzel 2:

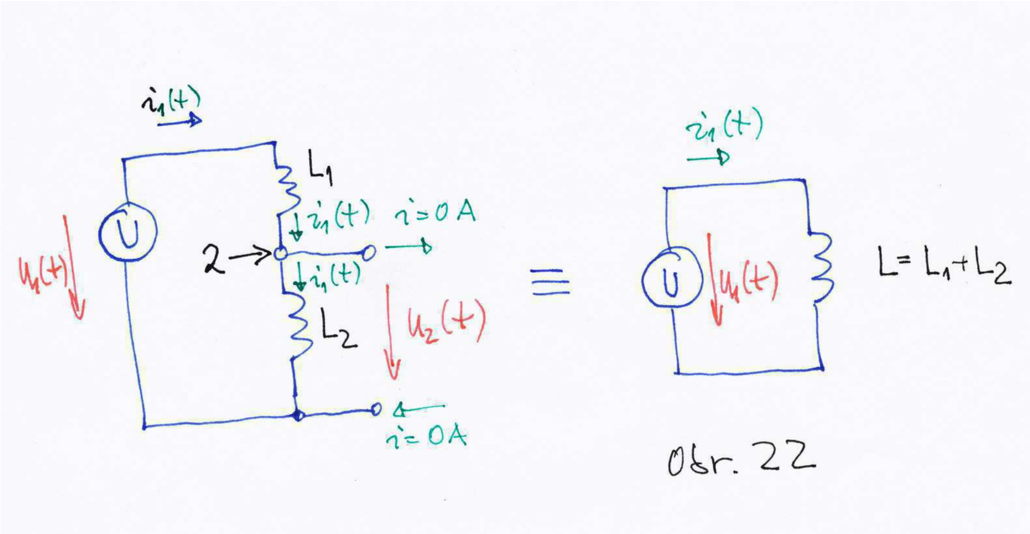
$$\frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_1} == \frac{u_2(t)}{R_2} \quad \Rightarrow \; u_2(t) \to u_1(t) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad (29)$$

Získali jsme vztah pro napětí tzv. odporového děliče.
Vyjádřeme proud:

$$i_1(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = \frac{u_1(t)}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow u_1(t) \to (R_1 + R_2) \cdot i_1(t) \qquad (30)$$

Je tedy zřejmé, že jde o stejnou rovnici, jako kdyby protékal proud $i_1(t)$ rezistorem o odporu $R_1 + R_2$. Získali jsme pravidlo sériového řazení rezistorů:
Sériově řazené dva rezistory můžeme (pokud se z uzlu, ve kterém se stýkají, neodebírá žádný proud!) nahradit jedním, jehož odpor je roven součtu odporů těchto dvou rezistorů.
Zobecnění pro více rezistorů je elementární, podobné jako v případě řazení zdrojů napětí.

Uvažme situaci podle Obr. 22



Napišme rovnice pro uzel 2:

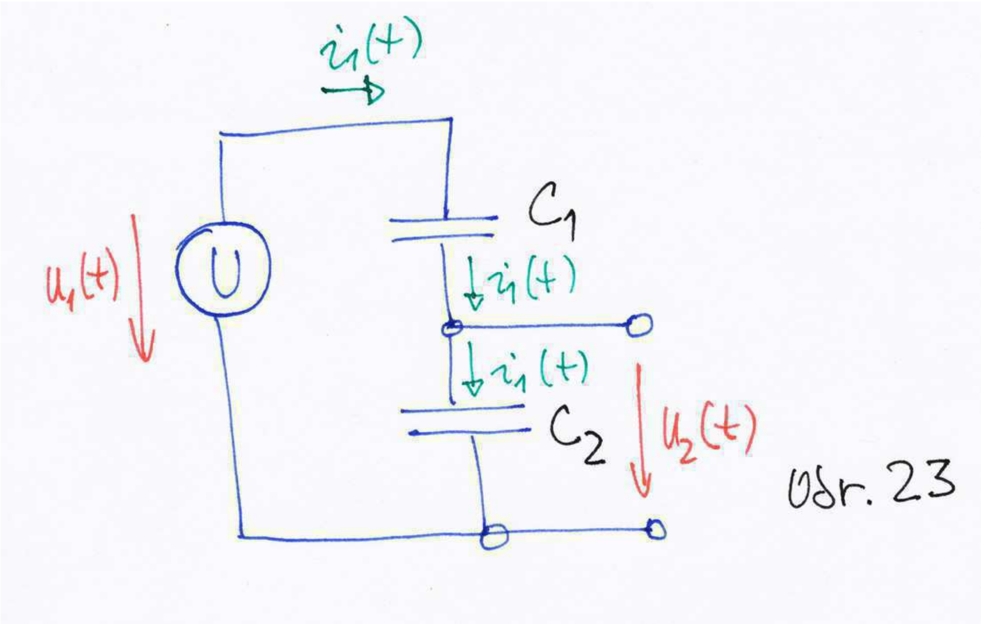
$u_1(t) - u_2(t) == L_1 \cdot i_1^{'}(t), \quad u_2(t) == L_2 \cdot i_1^{'}(t)$

Proud jsme si pojmenovali, rovnici uzlu psát nemusíme, v tomto případě je vyřešená tím, že jsme pojmenovali shodně proud oběma cívkami.
Řešení je

$$u_2(t) \to u_1(t) \cdot \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \qquad u_1(t) \to (L_1 + L_2) \cdot i_1^{'}(t) \tag{31}$$

Získali jsme pravidlo sériového řazení cívek:
Sériově řazené dvě cívky můžeme (pokud se z uzlu, ve kterém se stýkají, neodebírá žádný proud!) nahradit jednou, jejíž indukčnost je rovna součtu indukčností těchto dvou cívek.
Zobecnění pro více cívek je elementární.

Sériové řazení kondenzátorů je řešeno v notebooku MAAJednoduchePripady.nb.



Obr. 23

Napíšeme rovnici uzlu 2:

$$C_1 \cdot \frac{d}{dt}\left(u_1(t) - u_2(t)\right) == C_2 \cdot \frac{d}{dt} u_2(t) \;\; \Rightarrow \frac{d}{dt} u_2(t) \to \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{d}{dt} u_1(t)$$

$$i_1(t) = C_2 \cdot \frac{d}{dt} u_2(t), \;\; i_1(t) == \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{d}{dt} u_1(t)$$

Je tedy možno nahradit sériovou kombinaci dvou kondenzátorů jedním o kapacitě

$$\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\frac{1}{C_1 \cdot C_2}}{\frac{1}{C_1 \cdot C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \tag{32}$$

Sériově řazené dva kondenzátory můžeme (pokud se z uzlu, ve kterém se stýkají, neodebírá žádný proud!) nahradit jedním, jehož kapacita je rovna $C = \dfrac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$.

V notebooku MAAJednoduchePripady.nb je také odvozeno paralelní řazení rezistorů a kondenzátorů; podceňovali bychom inteligenci čtenáře, kdybychom komentovali řešení obrázkem a rovnicemi. Ostatně zkusit si podle rovnic z notebooku MAAJednoduchePripady.nb nakreslit schémátko, navíc když víme, že má jít o paralelní řazení, je s tím, co už o elektrických obvodech víme, hezké jednoduché cvičení.

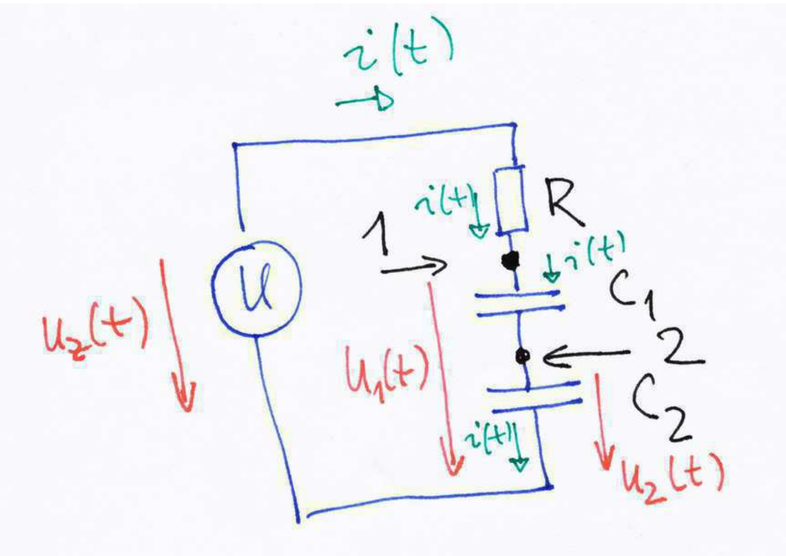
Paralelně řazené dva rezistory lze nahradit jedním, jehož odpor je roven převrácené hodnotě součtu převrácených hodnot odporů paralelně spojených rezistorů, tedy $R = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$.

Paralelně řazené dva kondenzátor lze nahradit jedním, jehož kapacita je rovna součtu kapacit těchto kondenzátorů, tedy $C = C_1 + C_2$.

Povšimněme si, že co do způsobu výpočtu výsledné hodnoty, jsou rezistor a cívka „na jedné lodi" a problém je pěkně symetrický: co platí o sériovém řazení cívek a odporů, platí o paralelním řazení kondenzátorů a naopak. Důvod toho je ukryt již v řazení zdrojů proudu a napětí a v definičních rovnicích součástek a vysledovat jej precizněji opět ponecháváme zvídavému čtenáři coby cvičení; pamatovat si odvozená pravidla bychom si alespoň do úspěšného zakončení předmětu MAA měli všichni☺.

Na pár místech jsme zmínili cosi ve smyslu, že každé schéma nemusí mít řešení a vidět to bylo v případě paralelního řazení zdrojů nestejných napětí a sériového řazení nestejných zdrojů proudu, kde jsme okamžitě obdrželi False, čili pokud se takové kombinace v obvodu vyskytne, obvod je nesmyslný, neužitečný a nerealizovatelný. Ukažme si ještě jeden nesmysl a poukažme na jeden omyl v případě napětí a sériového řazení kondenzátorů. Jasně, úplně duální problém by nastal v případě proudů a paralelního řazení cívek. Ideální rezistor je součástka, která žije vždy jen současností, popis jejího chování neobsahuje derivace, nemá požadavek na spojité změny ani proudu, ani napětí: kolize současnosti s minulostí nemůže nastat a tak problém, na který poukážeme, se ideálních rezistorů i netýká. Reálných ano, ty vykazují kapacitu i indukčnost, ostatně reálné cívky a kondenzátory vykazují vždy i odpor a „tu druhou" vlastnost: ukázaný problém bude tedy ve skutečnosti teoretický, v přírodě nastat nemůže.

Uvažme zapojení podle Obr. 24



Obr. 24

V notebooku MAAJednoduchePripady.nb je v poslední buňce tento obvod vyřešen. Vyzkoušíte-li si stav s nulovými počátečními podmínkami, uvidíte, že lze kapacitní nezatížený dělič používat stejně jako dělič odporový, obecně ovšem nikoli. Pro počáteční napětí kondenzátorů splňující podmínku, že jejich součet je v je roven napětí zdroje počátečním čase můžeme snižovat hodnotu odporu, pro podmínky toto nesplňující je velikost počátečního proudu se snižováním odporu stále větší a pro nulový odpor řešení bez zavedení (v přírodě se nevyskytujících) pulsů (v Mathematice pro analytická řešení například funkce DiracDelta) neexistuje.
Vyzkoušejte si změny hodnot počátečních podmínek a zmenšování odporu rezistoru k nule.

Další jednoduché případy – stejnosměrné obvody a harmonický ustálený stav

Stejnosměrné obvody

Pokud se v obvodu vyskytují zdroje proudu a napětí, které mají konstantní velikost (a samozřejmě nemění v čase orientaci) a v počátečním čase jsou hodnoty napětí na kapacitách a proudů tekoucích indukčnostmi obecné, budou se nejprve vlivem neshody velikosti proudů a napětí v obvodu měnit, s časem ovšem méně a méně. Odezní tzv. přechodný děj (transient phenomenon) a hodnoty se ustálí, čímž myslíme, že se mění tak málo, že je v rámci zvolené přesnosti již můžeme za konstantní považovat: přesně stanovená hranice, kdy končí přechodný děj, tedy neexistuje, záleží na naší volbě.
Abychom se podívali na ukázkový případ, nemusíme nic dalšího programovat, v notebooku MAAJednoduchePripady.nb je v poslední buňce. Když si zkusíte kromě odporů a počátečních podmínek také měnit tmax, ustálením obvodu uvidíte.

Podívejme se na rovnice jednotlivých součástek za předpokladu konstantních hodnot všech proudů a napětí:

$$
\begin{aligned}
&u_R(t) == R \cdot i_R(t) \quad \rightarrow u_R == R \cdot i_R \\
&i_c(t) == C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \quad \rightarrow i_c == 0A \\
&u_L(t) == L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad \rightarrow u_L == 0V
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

Odebráním argumentu ukazujeme, že místo konstantní funkce můžeme myslet konstantu.

Je-li na nějakém prvku (stále) nulové napětí, má stejnou rovnici jako kus vodiče nebo zdroj nulového napětí.

Teče-li nějakým prvkem (stále) nulový proud (jasně, žádný proud neteče), můžeme tento prvek z obvodu vypustit.

Stejnosměrné obvody samozřejmě můžeme řešit obecně se všemi součástkami, vyřešit diferenciální rovnice, přičemž si dáme pozor, abychom čas řešení zvolili dostatečně dlouhý, aby se průběhy ustálily a odečíst výsledné hodnoty na konci řešení.

Často se jeví jednoduší na základě vztahů (33) „kondenzátory rozpojit a cívky a zkratovat“, tedy kondenzátory zcela vyřadit ze schématu a cívky nahradit vodiči.

Rovnice popisující obvody však byly diferenciálními rovnicemi z důvodu, že vztahy mezi napětím a proudem obsahují v případě cívek a kondenzátorů derivace. Nejsou-li v obvodu cívky a kondenzátory, nejsou v jeho popisu derivace a vzniklé rovnice jsou algebraické. Máme-li již rovnice napsané v Mathematice, odstranění derivací provedeme z rovnic snadno například takto: rovnice/._‘[t]:>0.

V případech obvodů složených z námi dosud uvažovaných obvodových prvků jde o zjednodušení značné, navíc věty o řešitelnosti soustav lineárních rovnic jsou všeobecně známé a pokud řešení nalezneme, můžeme se i dosazením přesvědčit, jestli naše řešení původní rovnice splňuje.

V případech obvodů obsahujících tzv. nelineární prvky (jako jsou například diody, tranzistory, cívky a transformátorky s feromagnetickými magnetickými obvody a podobně) je často výhodnější řešit diferenciální rovnice s vyjádřitelnými derivacemi, než hledat ustálené stavy řešením soustav nelineárních algebraických rovnic.

5. Harmonický ustálený stav

Ukázky pro tuto část textu jsou v notebooku MAARLCNDSolveaHUS.nb
Pro vysvětlení použijeme stejné schéma, jako je na Obr. 15.
Pro lepší názornost jsme si vyjádřili derivace a eliminovali zbytečné algebraické rovnice.
Nejprve se podívejme na výsledné grafy, vidíme, že zpočátku není průběh napětí na kondenzátoru sinusový, po odeznění tzv. přechodného děje se ovšem stane sinusovým, se stejnou frekvencí, jako má zdroj napětí a obecnou amplitudou a fázovým posunem.
Počáteční přechodný děj je vyvolán počátečními hodnotami, v některých případech lze volit takové, že přechodný děj nenastává, případně alespoň není výrazný, což se někdy využívá k omezení zapínacích proudů v případě spínání velkých spotřebičů.

Harmonickým nazýváme stav proto, že všechny průběhu lze vyjádřit jako lineární kombinace funkcí sinus a kosinus, což jsou takzvané harmonické funkce; lineární kombinaci funkcí sinus a kosinus můžeme ovšem vyjádřit pomocí vhodně fázově posunuté harmonické funkce s vhodnou amplitudou.
Je-li frekvence uvažovaného průběhu $f\left(Hz\right)$, jednotkou frekvence je hertz (čti „herc“), perioda je $T=\dfrac{1}{f} \quad \left(s\right)$, říkáme veličině $\omega=2\cdot\pi\cdot f=2\cdot\pi\cdot\dfrac{1}{T} \quad \left(s^{-1}\right)$ kruhová frekvence.
Perioda funkcí sinus a kosinus je $2\cdot\pi$, takže funkce $\sin\left(\omega\cdot t\right)=\sin\left(2\cdot\pi\cdot f\cdot t\right)=\sin\left(2\cdot\pi\cdot\dfrac{t}{T}\right)$ má skutečně periodu *T*: pro $t=T$ má argument hodnotu $2\cdot\pi\cdot\dfrac{t=T}{T}=2\cdot\pi$.
Je-li například časový průběh napětí popsán vztahem $u\left(t\right)=U_M\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right),\quad U_M\geq 0,\quad \varphi\in(-\pi,\pi>.$, říkáme, že má amplitudu U_M a fázi (fázový posun) φ. Perioda, frekvence, kruhová frekvence, amplituda a fáze jsou reálná čísla, přičemž z podstaty vztahu mezi periodou a frekvencí a obvyklým chápáním harmonických funkcí přijmeme navíc pro účely MAA omezení:
$f>0Hz,\ f\neq\infty Hz,\ \Rightarrow T>0s,\ T\neq\infty s,\ \omega>0s^{-1},\ \omega\neq\infty s^{-1}.$

I když je nám to jasné, není špatné si pohrát s Manipulate v MAARLCNDSolveaHUS.nb a osvěžit si vliv amplitudy a fáze.
Souvislost fázově posunuté funkce sinus s vyjádřením pomocí sinu a kosinu s nulovým fázovým posunem plyne ze známého vzorečku:

$$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\left(\alpha\right)\cdot\cos\left(\beta\right)+\cos\left(\alpha\right)\cdot\sin\left(\beta\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_M\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right)=U_M\cdot\cos\left(\varphi\right)\cdot\sin\left(\omega\cdot t\right)+U_M\cdot\sin\left(\varphi\right)\cdot\cos\left(\omega\cdot t\right)$$

Proč nás harmonické funkce tolik zajímají? Zatím řešíme lineární obvody a harmonické funkce mají výsadní postavení právě jen v případě lineárních obvodů.
Hlavní důvod je v tom, že derivace harmonické funkce o frekvenci ω je harmonická funkce o frekvenci ω, obecně může mít jinou amplitudu a fázový posuv, ale to jsou vlastně detaily: tvar jejího průběhu se nijak (zásadně) nezměnil.

Harmonické funkce nás také zajímají proto, že jsou „informačně úsporné“: podíváte-li se v MAARLCNDSolveaHUS.nb na FullForm[res], dostanete odpověď „výstup je příliš rozsáhlý“.
Numerickou metodou bylo získáno poměrně hodně bodů, tolik, aby nám dobře popsaly řešené průběhy.
Pokud víme, nebo věříme, že výsledkem je harmonická funkce o zadané frekvenci ω, stačí nám k jejímu úplnému určení dvě čísla: amplituda U_M a fáze φ.
Podobně hledání harmonických funkcí, které jsou řešením obvodu, bude jednodušší, než hledání obecných průběhů, například namísto NDSolve budeme používat Solve.

V notebooku MAARLCNDSolveaHUS.nb je ukázka nalezení řešení „hrubou silou“ (a bez znalosti dalšího teoretického aparátu), kdy do obvodových rovnic dosadíme za hledaný proud a napětí harmonické funkce s neznámou amplitudou a fází. Každou rovnici nahradíme druhou mocninou rozdílu pravé a levé strany: druhá mocnina má v oboru reálných čísel minimum v nule, když tedy výsledné kvadráty rozdílů příslušných pravých a levých stran sečteme a vyčíslíme pro větší množství hodnot nezávislých časů a najdeme minimum blízké nule, jsme dostatečně blízko cíle. Berte tento postup jako ukázku, že problémy lze často řešit více způsoby a koneckonců záleží na výsledku. Pokud vám někdo říká, že jen jedna cesta k řešení je správná, velmi pravděpodobně v případě elektrických obvodů nemá pravdu.

Řešení „hrubou silou“ ovšem vyžaduje dostatečně mocný nástroj a pro složitější obvody také výrazně delší výpočetní čas. Naučíme se tedy obvyklým metodám řešení HUS, využívajících vlastností komplexních čísel a řešení soustav lineárních rovnic. Znalost základních pravidel počítání s komplexními čísly předpokládáme, imaginární jednotku budeme pro lepší odlišení od označení proudů značit — na rozdíl od matematiků — *j* a platí $j^2 == -1$.
Je-li $z = a + j \cdot b, \qquad a, b \in R$, kde *R* je označení množiny reálných čísel, pak *imaginární část* komplexního čísla z je $\operatorname{Im}(z) = b$ a *reálná část* komplexního čísla *z* je $\operatorname{Re}(z) = a$. Pro *absolutní hodnotu* (též zvanou modul, velikost) platí
$\operatorname{Abs}(z) = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Množinu komplexních čísel budeme značit *C*.

Pro komplexní čísla platí slavný Eulerův vztah, který si zaslouží očíslovat:
$$\forall \psi \in \mathbf{R}: \quad e^{j \cdot \psi} == \cos(\psi) + j \cdot \sin(\psi) \qquad (34)$$
Poznamenejme, že tento vztah platí pouze pro ψ „brané v radiánech“. Ostatně na počítání „ve stupních“ je dobré na vysoké škole zapomenout. V dalším textu všechny veličiny, které mohou mít v nějakém smyslu význam úhlu, budou mít jednotku radián.
Ze vztahu (34) vidíme, že platí
$$\sin(\psi) == \operatorname{Im}\left(e^{j \cdot \psi}\right) \qquad (35)$$
Pro funkci „imaginární část“, tedy zobrazení z **C** do **R**, ovšem platí:
$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \geq 0 \ \forall z \in \mathbf{C}: \quad \operatorname{Im}(\alpha \cdot z) == \alpha \cdot \operatorname{Im}(z) \qquad (36)$$
A tedy položíme-li $\psi -> \omega \cdot t + \varphi, \quad \alpha -> U_M$, obdržíme vyjádření obecného harmonického průběhu:
$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) == \operatorname{Im}\left(U_M \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi)}\right) \qquad (37)$$
Podle vět o počítání s mocninami ale platí $e^{j \cdot (\omega t + \varphi)} == e^{j \cdot \omega t} \cdot e^{j \cdot \varphi}$ a můžeme tedy přepsat rovnost (37) jako:

$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) == \mathrm{Im}\left(U_M \cdot e^{j\cdot\varphi} \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) == \mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) \qquad (38)$$

Přijali jsme přitom označení

$$\hat{U}_M = U_M \cdot e^{j\cdot\varphi} \qquad (39)$$

Veličině $\hat{U}_M$ budeme říkat „fázor v měřítku maximálních hodnot“: jelikož jsme se omezili na $U_M \geq 0$, může funkce $u(t)$ podle (37) nabývat hodnot jen $u(t) \in \langle -U_M, U_M \rangle$, U_M je tedy maximální hodnotou funkce $u(t)$.

Proč „fázor“? Omezíme-li se na hodnoty $U_M \geq 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi >$, obsahuje komplexní číslo $\hat{U}_M = U_M \cdot e^{j\cdot\varphi}$ jednoznačnou informaci nejen o maximální hodnotě U_M, ale i o fázi φ.

Omezení $U_M \geq 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi >$ volíme z pohodlnosti, neboť získáváme jednoznačný vztah mezi fázorem (tedy komplexním číslem) a analytickým vyjádřením průběhu podle $u(t)$ podle (37). Jelikož ve fyzikálně zjistitelných důsledcích chování elektrického obvodu nejde o formální vyjádření časových průběhů proudů a napětí, ale o tyto průběhy, jsou vlastně požadavky $U_M \geq 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi >$ nadbytečné: změna $\varphi \to \varphi + 2 \cdot k \cdot \pi$, k celé číslo, průběh nezmění a změnu $U_M -> -U_M$ lze kompenzovat změnou $\varphi \to \varphi + (2 \cdot k + 1) \cdot \pi$, k celé číslo. V dalším se uvedeného omezení ovšem budeme držet.

Z časového průběhu tedy získáme fázor snadno podle (39), vypočteme prostě $\hat{U}_M = U_M \cdot e^{j\cdot\varphi}$.
Z fázoru získáme časový průběh opět snadno, vypočteme podle (38) $u(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right)$, což je pro zadané ω a $\hat{U}_M$ reálná funkce reálné proměnné a v Matematice stačí o výpočet prostě požádat s tím, že imaginární část je funkce a tudíž musíme použít hranaté závorky.
Fázi získáme funkcí Arg a amplitudu funkcí Abs, tedy $\varphi = \mathrm{Arg}\left[\hat{U}_M\right], \quad U_M = \mathrm{Abs}\left[\hat{U}_M\right]$.
Druhý vztah plyne přímo z faktu, že $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} : \mathrm{Abs}(z_1 \cdot z_2) == \mathrm{Abs}(z_1) \cdot \mathrm{Abs}(z_2)$ a $\forall \psi \in \mathbf{R} : \quad \mathrm{Abs}\left(e^{j\cdot\psi}\right) == \sqrt{\cos(\psi)^2 + \sin(\psi)^2} == 1$.
Některé vlastnosti funkce Arg jsou ukázány v MAARLCNDSolveaHUS.nb.

Musíme-li realizovat výpočet v nějakém prostředí, ve kterém nejsou v dostatečné míře implementovány operace s komplexními čísly, použijeme v (38) vztah (35) a násobení komplexních čísel si naprogramujeme.

Proč to všechno děláme? Všechny proudy a napětí v případě HUS budou vyjádřeny jako $v_i(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{V}_i \cdot e^{j\cdot\omega t}\right)$. Uvidíme, že lze převést vztahy dané popisem obvodu diferenciálními rovnicemi na vztahy mezi hodnotami odporů rezistorů, kapacit kondenzátorů, indukčností cívek, fázorů $\hat{V}_i, \quad i = 1, 2, .., n$ a výrazu $j \cdot \omega$. Tyto veličiny neobsahují čas a příslušné rovnice tedy nemohou být diferenciální, budou lineární a algebraické a tedy snadno řešitelné, při správně popsaném realizovatelném obvodu dokonce řešitelné *vždy* a *jednoznačně*. Zpět do světa časových průběhů se pak dostaneme snadno podle $v_i(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{V}_i \cdot e^{j\cdot\omega t}\right)$.

Upozorněme, že dále následující odvozování a dokazování není pro řešení obvodů potřebné a nebudeme jej při praktickém řešení používat, je uvedeno pro porozumění a úplnost a abychom odlišili vzdělání vysokoškolské od školy střední.

Poznamenejme ještě, že v odvozování jsme nikde nepoužili chápání $u(t)$ jako napětí: i nadále budeme při odvozování používat označení $u_1(t)$, $u_2(t)$, jako by šlo o napětí, výsledné vztahy ovšem platí BUNO pro proudy a ostatně pro všechny harmonicky proměnné veličiny.

Dokážeme, že platí následující věta:

Buďtež $u_1(t)$, $u_2(t)$ harmonické funkce definované vztahy
$u_1(t) = U_{M1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1)$, $u_2(t) = U_{M2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2)$.
Pak platí: $u_1(t) == u_2(t)\ \ \forall t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \hat{U}_{M1} == \hat{U}_{M2}$.

Důkaz:
Přepíšeme vztahy podle příslušných definic a obdržíme:

a) Dokážeme, že $\hat{U}_{M1} == \hat{U}_{M2}\ \Rightarrow\ u_1(t) == u_2(t)\ \ \forall t \in \mathbf{R}$; důkaz je triviální,

$$\hat{U}_{M1} == \hat{U}_{M2},\ \hat{U}_{M1} \overset{!}{=} \hat{U}_M,\ \hat{U}_{M1} \overset{!}{=} \hat{U}_M\ \Rightarrow\ u_1(t) = \operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == u_2(t) = \operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)\quad \forall t \in \mathbf{R}$$

b) Dokážeme, že $u_1(t) == u_2(t)\ \ \forall t \in R \Rightarrow \hat{U}_{M1} == \hat{U}_{M2}$

Zde bychom mohli použít omezení možných hodnot φ_2 a φ_2, jelikož ovšem stran měřitelných důsledků záleží na rovnosti průběhů $u_1(t)$ a $u_2(t)$ a nikoli na shodě jejich analytických vyjádření, nebylo by to nesprávné, ale trochu metodicky nefér. Přepišme předpoklad tvrzení b) podle definice:

$$\operatorname{Im}\left(U_{M1} \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi_1)}\right) == \operatorname{Im}\left(U_{M1} \cdot e^{j\cdot\varphi_1} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == \operatorname{Im}\left((a_1 + j \cdot b_1) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) ==$$
$$== \operatorname{Im}\left(U_{M2} \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi_2)}\right) == \operatorname{Im}\left(U_{M2} \cdot e^{j\cdot\varphi_2} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == \operatorname{Im}\left((a_2 + j \cdot b_2) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$$
$\forall t \in \mathbf{R}$.

Tedy ovšem platí:

$\operatorname{Im}\left((a_1 + j \cdot b_1) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == \operatorname{Im}\left((a_2 + j \cdot b_2) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) \qquad \forall t \in R$, kde ovšem všude $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$.

Ovšem pro $\omega > 0s^{-1},\ \omega \neq \infty s^{-1}\ \ \exists t_1 \in \mathbf{R}:\ \ e^{j\cdot\omega\cdot t_1} == 1$; pak ovšem platí
$\operatorname{Im}\left((a_1 + j \cdot b_1) \cdot 1\right) == \operatorname{Im}\left((a_2 + j \cdot b_2) \cdot 1\right) \Rightarrow b_1 == b_2$.

Ovšem rovněž pro $\omega > 0s^{-1},\ \omega \neq \infty s^{-1}\ \ \exists t_1 \in \mathbf{R}:\ \ e^{j\cdot\omega\cdot t_2} == j$; pak ovšem platí
$\operatorname{Im}\left((a_1 + j \cdot b_1) \cdot j\right) == \operatorname{Im}\left((a_2 + j \cdot b_2) \cdot j\right) \Rightarrow a_1 == a_2$.
Označíme-li ovšem $a = a_1 == a_2$ a $b = b_1 == b_2$, obdržíme po dosazení pravdivý výrok
$\operatorname{Im}\left((a + j \cdot b) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == \operatorname{Im}\left((a + j \cdot b) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$.
Dvě harmonické funkce se tedy rovnají $\forall t \in \mathbf{R}$ právě tehdy, když se rovnají jim odpovídající fázory.
Nyní už bude snadné odvodit jednoduchá pravidla pro použití fázorů pro řešení elektrických obvodů pomocí fázorů. Postupy a předpoklady použité v důkazu jsou ovšem limitujícími

faktory použití fázorů. Ve skutečnosti můžeme „s rozumnou mírou nepřesnosti“ použít fázory i v jiných případech (například je-li změna parametrů použitých součástek podstatně pomalejší, než perioda harmonických funkcí); pak ovšem jen s patřičnou dávkou opatrnosti: mimo linearitu jistota obvykle mizí.

Vztahy mezi fázory proudu a napětí pro rezistory, cívky a kapacitory

a) Rezistor

Pro napětí a proud na rezistoru (pro dříve zavedené orientace proudu a napětí, tedy napěťová šipka má stejný směr jako šipka proudová) platí Ohmův zákon, tedy je-li odpor rezistoru *R*, pak platí $u(t) == R \cdot i(t)$. Předpokládejme, že napětí a proud jsou harmonické funkce času a můžeme tedy psát: $u(t) = \operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right), \quad i(t) = \operatorname{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right)$ a Ohmův zákon má tedy tvar: $\operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) == R \cdot \operatorname{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right)$. Jelikož ovšem platí $\forall a \in \mathbf{R}, \forall z \in \mathbf{C} : a \cdot \operatorname{Im}(z) == \operatorname{Im}(a \cdot z)$, můžeme „vtáhnout“ *R* do argumentu funkce Im a tedy $\operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) == \operatorname{Im}\left(R \cdot \hat{I}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right)$, kde rovnost samozřejmě platí $\forall t \in \mathbf{R}$. Ve smyslu výše uvedeného důkazu tedy platí:

$$\hat{U}_M == R \cdot \hat{I}_M \qquad (40)$$

Ohmův zákon platí tedy formálně shodně pro fázory i pro okamžité hodnoty proudů a napětí; je to způsobeno tím, že vztah mezi proudem a napětím na rezistoru neobsahuje derivace.

b) Cívka

Pro napětí a proud na rezistoru (pro dříve zavedené orientace proudu a napětí, tedy napěťová šipka má stejný směr jako šipka proudová) platí $u(t) == L \cdot \frac{di(t)}{dt}$, předpokládejme harmonické průběhy a postupujme obdobně jako u rezistoru; obdržíme:

$$\operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) == L \cdot \frac{d}{dt}\operatorname{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right).$$

Chápejme dále komplexní funkci jedné reálné proměnné, tedy zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ jako takovou funkci, kterou lze zapsat pomocí dvou reálných funkcí *g* a *h* jedné reálné proměnné, tedy $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(t) = g(t) + j \cdot h(t), \quad t \in \mathbf{R}$. Existují-li derivace funkcí *g* a *h*, je zřejmě nejlogičtějším způsobem, jak chápat derivaci funkce *f*, vztah $f'(t) = g'(t) + j \cdot h'(t)$.

Odtud snadno vidíme, že platí (položíme $f(t) = \hat{I}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}$)

$$\operatorname{Im}(f(t)) == h(t), \ \frac{d}{dt}\operatorname{Im}(f(t)) == h'(t) == \operatorname{Im}(f'(t)).$$

S použitím také $\forall a \in \mathbf{R}, \forall z \in \mathbf{C} : a \cdot \operatorname{Im}(z) == \operatorname{Im}(a \cdot z)$ můžeme psát

$\operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) == \operatorname{Im}\left(L \cdot \frac{d}{dt}\hat{I}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) == \operatorname{Im}\left(L \cdot \hat{I}_M \cdot \frac{d}{dt} e^{j\cdot\omega t}\right)$, neboť fázor (každý, tedy i $\hat{I}_M$) je na čase nezávislý; koneckonců je to jeden z hlavních důvodů jeho zavedení. Provedeme derivaci a konečně získáme:

$\operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) == \operatorname{Im}\left(L \cdot \hat{I}_M \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\cdot\omega t}\right)$. Zcela analogicky jako v případě rezistoru obdržíme:

$$\hat{U}_M == j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I}_M \tag{41}$$

c) Kondenzátor

Podceňovali bychom inteligenci čtenáře, kdybychom při odvozování uváděli všechny předpoklady; postup je zcela obdobný jako v případě cívky. Platí:

$i(t) == C \cdot u'(t)$, tedy $\mathrm{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == C \cdot \frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$ a konečně

$$\begin{aligned} \hat{I}_M &== j \cdot \omega \cdot C \cdot \hat{U}_M \\ \hat{U}_M &== \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I}_M \end{aligned} \tag{42}$$

<u>Shrnutí vztahů, jednotky fázorů, pojem impedance, použití a řazení impedancí</u>

V dalším vynecháme dolní index *M*, ostatně později, až se budeme zabývat výkony, uvidíme, že fázory nemusejí být jen „v měřítku maximálních hodnot"; změnu měřítka ovšem vždy budeme uvažovat lineární a měřítko všech fázorů (a tedy každého fázoru proudu i napětí) musí být stejné. Změna měřítka tedy znamená násobení rovnic (40), (41) a (42) konstantou, v námi zkoumaných případech zřejmě nutně reálnou a kladnou; násobení takovou konstantou ovšem platnost rovnic nemění. Nechceme zabřednout do mnoha indexů a chceme odlišit případy odporu, cívky a kondenzátoru indexy *R*, *L* a *C*. Přehledně tedy:

$$\begin{aligned} \hat{U}_R &== R \cdot \hat{I}_R \\ \hat{U}_L &== j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I}_L \\ \hat{U}_C &== \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I}_C \end{aligned} \tag{43}$$

Vztahy (43) nám vždy dávají fázor napětí na příslušné součástce (budeme se opakovat, ale opět jen vždy pro orientaci napětí shodnou s orientací proudu) jako násobek fázoru proudu tekoucího příslušnou součástkou. Odpor zůstal odporem a jeho jednotkou je tedy stále ohm (Ω); ať již z jednotek indukčnosti a kapacity, nebo z faktu, že jednotka fázoru je shodná s jednotkou veličiny, jejíž harmonický časový průběh fázor popisuje, mají zřejmě výrazy $j \cdot \omega \cdot L$ a $\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$ také jednotku ohm (Ω). Neuškodí tedy chápat vztahy (43) jako Ohmův zákon pro harmonický ustálený stav.

Poznámka pro zvídavé čtenáře: *Jednotky a fyzikální rozměry* (fyzikálním rozměrem jednotky rozumíme v tomto textu její vyjádření pomocí základních rozměrů SI, rozdíl mezi jednotkou a fyzikálním rozměrem je jen v tom, že si výraz vyjadřující jednotku, který často používáme, *pojmenujeme*, aby naše vyjadřování bylo stručnější: tak používáme N (newton) místo $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ a podobně) *jsou — pokud zkoumáme měřitelné veličiny z fyzikálního světa — důležité. Velmi důležité*. Koho by to zajímalo, ať si vyhledá pojmy jako „dimenzionální analýza" a „fyzikální podobnost". „Jak veliký je otvor" musí mít jednotku a fyzikální rozměr, nicméně řešení problému „vejde se předmět do otvoru" záleží na poměru velikosti otvoru a předmětu (ať již velikostí rozumíme cokoli). Fázory jsme zavedli podle vztahu $v_i(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{V}_i \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$. Funkce $\mathrm{Im} : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ fyzikální rozměr měnit nemůže a imaginární jednotce nelze fyzikální rozměr smysluplně přiřadit, naopak popření zvoleného smyslu je obvykle elementární, není ani v metrech, ani v ampérech, kilogramech atd. Výraz $j \cdot \omega \cdot t$ je bezrozměrný (tj. má stejný rozměr jako číslo 1), rozměr kruhové frekvence a času se vyruší. Výraz $e^{j \cdot \omega \cdot t}$ je také bezrozměrný: číslu *e* nelze fyzikální rozměr smysluplně přiřadit také a tudíž jeho mocnině na bezrozměrný výraz také nikoli. Suma sumárum, fázor veličiny má shodný fyzikální rozměr jako veličina, kterou popisuje.

V harmonickém ustáleném stavu (a v jiných případech nikoli!) můžeme tedy zavést pojem *impedance* jako „to, čím musíme násobit fázor proudu, abychom získali fázor napětí“. Impedance má jednotku ohm (Ω).

Impedance na rozdíl od zvyklostí na některých vysokých školách a fakultách nebudeme odlišovat stříškou, tu si ponecháme pro fázory. Impedance je komplexní číslo s jednotku ohm (Ω): komplexní no a co. Rozdíl mezi reálným číslem a komplexním číslem je mnohem menší, než mezi číslem a fázorem.

Přepišme tedy (43) pomocí impedancí:

$$\begin{aligned}
&\hat{U}_R == R \cdot \hat{I}_R == Z_R \cdot \hat{I}_R && Z_R = R \\
&\hat{U}_L == j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I}_L == Z_L \cdot \hat{I}_L && Z_L = j \cdot \omega \cdot L \\
&\hat{U}_C == \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I}_C == Z_C \cdot \hat{I}_C && Z_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}
\end{aligned} \tag{44}$$

Použití fázorů pro řešení elektrických obvodů, řazení impedancí , přenos, decibely

Fázory a metoda uzlových napětí

Ukažme, že platí věta:
Buďtež $i_1(t)$ a $i_2(t)$ dvě harmonické funkce (ve výše zmíněném smyslu) se stejnou kruhovou frekvencí ω, popsané fázory $\hat{I}_1$ a $\hat{I}_2$. Pak veličina $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$ je harmonická funkce se shodnou frekvencí ω popsaná fázorem $\hat{I}_3 = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$.

Využijeme toho, že platí:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}: \ \operatorname{Im}(z_1 + z_2) == \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_1)$$

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}: \quad \operatorname{Im}(a_1 + j \cdot b_1) + \operatorname{Im}(a_2 + j \cdot b_2) == b_1 + b_2 ==$$

$$== \operatorname{Im}(a_1 + j \cdot b_1 + a_2 + j \cdot b_2)$$

Tedy můžeme psát:

$$i_1(t) + i_2(t) == \operatorname{Im}\left(\hat{I}_1 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right) + \operatorname{Im}\left(\hat{I}_2 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right) == \operatorname{Im}\left(\hat{I}_1 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} + \hat{I}_2 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right) ==$$

$$== \operatorname{Im}\left(\left(\hat{I}_1 + \hat{I}_2\right) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right) == \operatorname{Im}\left(\hat{I}_3 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right)$$

Pro konečný počet harmonických funkcí je důkaz zobecnění věty pro *n* veličin, tedy že součet n harmonických funkcí o shodné frekvenci je harmonická funkce popsaná fázorem, který je součtem fázorů popisujících tyto harmonické funkce jednoduchý (například matematickou indukcí) a ponecháme jej čtenáři coby cvičení.

Rovněž zřejmě platí:
Buďtež $u_1(t)$ a $u_2(t)$ dvě harmonické funkce (ve výše zmíněném smyslu) se stejnou kruhovou frekvencí ω, popsané fázory $\hat{U}_1$ a $\hat{U}_2$. Pak veličina $u_3(t)=u_1(t)\text{-}u_2(t)$ je harmonická funkce se shodnou frekvencí ω popsaná fázorem $\hat{U}_3=\hat{U}_1\text{-}\hat{U}_2$.

Platí-li tedy, že součet proudů do uzlu vtékajících je roven součtu proudů z uzlu vytékajících, platí pro uvažované harmonické průběhy, že součet fázorů proudů do uzlu vtékajících je roven součtu fázorů proudů z uzlu vytékajících.

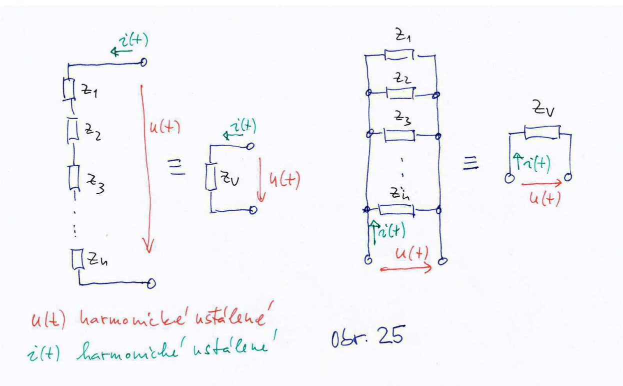
Platí-li, že je-li napětí *n*-tého uzlu vůči zvolenému vztažnému uzlu $u_n(t)$ a napětí *m*-tého uzlu vůči zvolenému vztažnému uzlu $u_m(t)$, je $u_{n,m}(t)=u_n(t)-u_m(t)$, platí též pro příslušné fázory $\hat{U}_{n,m}=\hat{U}_n-\hat{U}_m$.

Můžeme tedy shrnout použití metody uzlových napětí pro harmonický ustálený stav:

- Namísto napětí a proudů zdrojů píšeme příslušné fázory
- Namísto proudů v bilancích uzlů píšeme příslušné fázory proudů, vztahy pro proudy zůstávají formálně shodné
- Namísto napětí píšeme fázory napětí, vztahy pro napětí mezi uzly zůstávají formálně shodné
- Vztahy mezi fázory proudu a napětí na součástkách používáme podle rovnic (44)
- Počáteční podmínky nemají vliv, nezajímají nás, nepíšeme je.

<u>Sériové a paralelní řazení impedancí</u>

Při odvozování sériového a paralelního řazení rezistorů jsme nikde nepotřebovali fakt, že jejich odpory jsou kladná reálná čísla. Využili jsme metodu uzlových napětí a o ní nyní víme, že v ní můžeme v případě harmonického ustáleného stavu použít místo proudů a napětí jim odpovídající fázory formálně úplně stejně.
Celé odvození by platilo, kdybychom namísto *R* psali *Z* s jakýmkoli indexem.
Pro situaci podle Obr. 25 tedy platí:



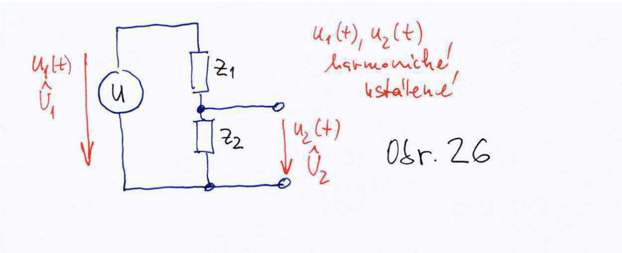
Je-li sériově řazeno *n* impedancí $Z_1, Z_2, Z_3.....Z_{n-1}, Z_n$, výsledná impedance je

$$Z_v = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{45}$$

Je-li paralelně řazeno *n* impedancí $Z_1, Z_2, Z_3 .....Z_{n-1}, Z_n$, výsledná impedance je

$$Z_v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}} \tag{46}$$

Také vztah pro odporový dělič platí pro „impedanční“ dělič podle Obr. 26



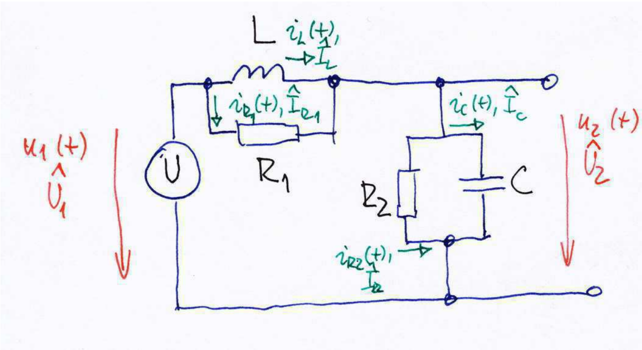
Obr. 26

$$\hat{U}_2 == \hat{U}_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{47}$$

Jelikož vztahy mezi fázorem proudu a napětí (44) jsou formálně shodné nezávisle na tom, přísluší-li impedance rezistoru, cívce nebo kondenzátoru, je zcela jedno, jestli ve vztazích (45), (46) a (47) jde o impedanci příslušející tomu či onomu prvku.
Pro obecné průběhy můžeme skládat v jeden prvek jen prvky stejného typu, při uvažování harmonického ustáleného stavu je můžeme skládat libovolně.

Poznámka: V literatuře týkající se teorie elektrických obvodů se můžete setkat také s pojmem *admitance*, přičemž ovšem nejde o nic jiného, než o převrácenou hodnotu impedance, tedy $Y = \frac{1}{Z}$, jednotkou admitance je Siemens, $S = \Omega^{-1}$, někdy též psaný jako „velké omega vzhůru nohama“, někde též „mho“, tedy pozpátku psaný ohm.
V případě rezistoru se říká převrácené hodnotě odporu *vodivost*, tedy $G = R^{-1}$ se stejnými jednotkami jako má admitance.
Vezmeme-li absolutní hodnotu impedance kondenzátoru či cívky, získáme tzv. induktivní či kapacitní *reaktanci*, tedy $X_L = \omega \cdot L, \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ s jednotkou stejnou jako impedance.
Převráceným hodnotám reaktancí se říká *susceptance*… Tyto pojmy snad usnadňují komunikaci mezi odborníky, nicméně pro další výstabu teorie elektrických obvodů mají značnou *redundanci*☺ Nepotřebujeme je a v tomto textu je nebudeme používat.

Některé možné postupy řešení obvodů si ukážeme, schéma obvodu je na Obr. 27 a řešení v notebooku MAAukazkaHUS.nb



Obr. 27

Nejprve je v tomto notebooku ukázáno řešení „v časové oblasti“, tedy normální metodou uzlových napětí s uvažováním obecných průběhů. Příslušné rovnice jsou:

Rovnice jediného uzlu, kde není známo napětí, tedy uzlu 2:

$$i_{R1}(t)+i_L(t)==i_{R2}(t)+i_C(t)$$

Pro proudy platí rovnice součástek:

$$i_{R1}(t)==\frac{u_1(t)-u_2(t)}{R_1}$$

$$u_1(t)-u_2(t)==L\cdot i_L^{'}(t)$$

$$i_{R2}(t)==\frac{u_2(t)}{R_2}$$

$$i_C(t)==C\cdot u_2^{'}(t)$$

A rovnice počátečních podmínek:

$$i_L(0)==0A,\quad u_C(0)==0V$$

Tento systém umožňuje jednoznačné řešení a toto řešení je v notebooku ukázáno.

V notebooku MAAukazkaHUS.nb je dále provedeno řešení metodou HUS tak, že mechanicky provedeme záměny:

$$i_L^{'}(t)\rightarrow j\cdot\omega\cdot\hat{I}_L,\ u_2^{'}(t)\rightarrow j\cdot\omega\cdot\hat{U}_2,\ \ i_{R1}(t)\rightarrow\hat{I}_{R1},\ \ i_{R2}(t)\rightarrow\hat{I}_{R2}$$

$$a\cdot Sin(\omega\cdot t+\varphi)\rightarrow a\cdot e^{j\cdot\varphi},\ u_2(t)->\hat{U}_2$$

Výsledná soustava algebraických rovnic je vyřešena a výsledné výstupní napětí je získáno z definičního vztahu „transformace do fázorů“, tedy $u_2(t)=\mathrm{Im}\left(\hat{U}_2\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$.

Touto ukázkou chceme připomenout, že metoda uzlových napětí jak byla uvedena ještě než se o fázorech začalo mluvit, je obecná a HUS lze pojmout i jako jen jako použitou transformaci jí získaných rovnic.

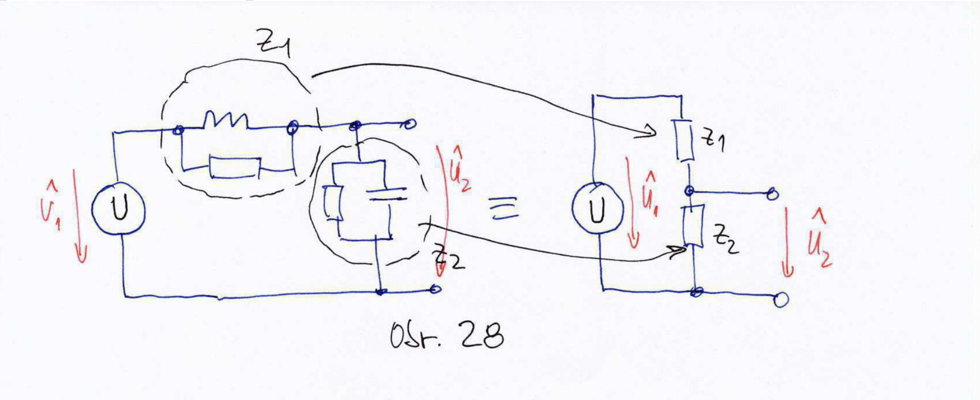
Mohli jsme ovšem napsat rovnice pro HUS bez mezistupně řešení „v časové oblasti“; jednoduše napíšeme bilanci proudů v uzlu s neznámým napětím s použitím vyjádření proudů z 44:

$$\frac{\hat{U}_1 - \hat{U}_2}{R_1} + \frac{\hat{U}_1 - \hat{U}_2}{j \cdot \omega \cdot L} == \frac{\hat{U}_2}{R_2} + \frac{\hat{U}_2}{\dfrac{1}{j \cdot \omega \cdot C}},$$

Řešením zjistit $\hat{U}_2$ a časový průběh opět podle $u_2(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{U}_2 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right)$.´

Vidíme, že jsme velmi snadno získali shodný fázor napětí $\hat{U}_2$.

Další jednoduchý způsob si ukážeme, když použijeme pravidla řazení impedancí a překreslíme obvod podle Obr. 28



Obr. 28

Vidíme, že můžeme určit fázor napětí $\hat{U}_2$ požitím vzorce pro „impedanční dělič“.

Pro paralelní řazení platí:

$$Z_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{j \cdot \omega \cdot L}}, \quad Z_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}}$$

$$\hat{U}_2 == \hat{U}_2 \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Opět jsme dostali fázor $\hat{U}_2$ a snad čtenář uzná, že poměrně krátkou a jednoduchou cestou.

Přenos, decibely, proč vlastně HUS

Čtenář by mohl z výše uvedeného nabýt dojmu, že stejnosměrné obvody jsou snad k něčemu, za málo peněz hodně muziky, zjednodušení je značné a není k němu třeba takových vlastně nepřirozených abstrakcí jako jsou komplexní čísla, věty a důkazy.
Řešení HUS bylo sice jednodušší, ale informace dávalo o chování konkrétního obvodu mnohem méně: Řešení „v časové oblasti“ pro jakýkoli (v přírodě možný) vstup jako funkci času poskytne (až na problematičnost numerických metod a HW) poměrně jistou předpověď, jaký bude výstup jako funkce času, funkcí je ovšem mnohem víc, než harmonických funkcí (a je to aspoň o alef nula), a tak ne až tak (když máme MATHEMATICU) velké zjednodušení drasticky zmenší množinu funkcí, na které je použitelné a samo o sobě explicitně neříká „po jakém čase je děj ustálený, kdy už můžeme řešení věřit“.
Vypadá to jako docela špatný obchod: za o něco méně peněz mnohem méně muziky.

Pokud víme o obvodech jenom z tohoto spisku, je takový názor oprávněný. Jenže není tomu tak.

Jde o rozdíl mezi výroky „každý kdo chce může pracovat“ a „všichni kdo chtějí mohou pracovat“ (ve smyslu být v placeném zaměstnaneckém poměru).

Je-li totiž v hypotetické zemi 10^5 nezaměstnaných a 10^4 volných pracovních míst, pak při veškeré snaze nemohou všichni pracovat. Prvních 10^4 nejsnaživějších zabere volná místa na trhu práce a pro zbytek již místo není.

Máme tři kuličky a dva otvory. Ve chvíli, kdy se ještě rozhoduje, může každá kulička být dána do otvoru. Všechny ovšem nikoli.

Navíc v analogii s kuličkami nastává problém, že kuliček a děr je velmi mnoho a možných kombinací jejich umístění ještě více.

Dokážeme vypočítat výstup a „podívat se na něj“ jen velmi málokrát za život člověka, množinu vstupů člověk nikdy neprozkoumá, neomezí-li se na nějaké úzké třídy. Lze to částečně obejít svěřením části práce počítači, ale pak mu musíme přesně říci, co nás na chování obvodu zajímá, jaká je účelová funkce.

HUS nám dává možnost najednou posoudit chování zadaného obvodu „z hlediska HUS“ pro obecné hodnoty rezistorů, kondenzátorů a cívek v obvodu a pro všechny v přírodě možné frekvence a fáze.
HUS nám poskytne v uzavřené algebraické podobě vztahy mezi vstupy, výstupy a parametry obvodu, pochopitelně jen mezi vstupy a výstupy povolenými konceptem HUS.

Uvidíme, že to byl nakonec velmi dobrý obchod☺

Základní myšlenky ukážeme v notebooku MAAPrenos.nb, ve kterém budeme zkoumat obvod podle obrázků 27 a 28, ovšem hodnoty $R_1, R_2, C, L, \omega, \hat{U}_1$ a tedy nutně i $\hat{U}_2$ ponecháme typu Symbol, nedáme jim konkrétní číselnou hodnotu.

Mimochodem, obecné a konkrétní ve vztahu k typu Symbol a ostatním typům v Mathematice zaslouží zvláštní pozornosti.

V notebooku MAAPrenos.nb je použit impedanční dělič. Získali jsme výstupní (neznámé) napětí –ovšem jako fázor- $\hat{U}_2$ jako výraz upravitelný do tvaru

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_2 \cdot P(R_1, R_1, L, C, \omega) \Rightarrow \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = P(R_1, R_1, L, C, \omega) \qquad (48)$$

Poměr dvou napětí v obvodu jsme vyjádřili jako funkci kapacit, indukčností a odporů v obvodu a kruhové frekvenci ω. $P(R_1, R_1, L, C, \omega)$ je racionální lomená funkce svých parametrů a lze dokázat, že pro řešitelný smysluplný obvod obecně.

Poznámka: někteří teoretici uvádějí jako parametr namísto ω výraz $j \cdot \omega$. Z didaktického hlediska je to správné v tom smyslu, že jelikož jsou hodnoty odporů, kapacit a indukčností nezáporné, bude koeficient u ω^{2+4k} pro celé *k* záporné. Na druhou stranu z matematického a Mathematického hlediska je to mnohem více funkce parametru ω než $j \cdot \omega$. Ale naprogramovat by to tak šlo☺.

Výrazu $P(R_1, R_1, L, C, \omega)$ říkáme přenos a původ je ve smyslu „jak se přenese vstup na výstup“, pochopitelně ve smyslu HUS.

Racionální lomená funkce je i intuitivně myšlenkově uchopitelná, její průběh lze vyšetřit. Je-li stupeň jmenovatele vyšší, než v čitatele, limita přenosu pro $\omega \to \infty$ je nula, hodně vysoké kmitočty se budou přenášet málo.

Získali jsme velmi mnoho, můžeme nastavovat hodnoty, aby přenos měl zvolené hodnoty (v jistých mezích) pro zvolené hodnoty ω. Při použití řešení „v časové oblasti“ bychom museli postupovat metodou „pokus omyl“, nebo nějakou optimalizační metodou…ale to je vlastně sofistikovaná metoda „pokus omyl“. Řešením soustavy lineárních rovnic (což je úloha řešitelná v konečném počtu kroků) jsme získali úplnou informaci a to v konečném tvaru o chování obvodu v rámci HUS.

Pro konkrétní hodnoty v našem případě R_1, R_1, L, C a obecně vlastností prvků obvodu můžeme vyčíslit $P(R_1, R_1, ...L_1, L_2..., C_1, C_2..., \omega) = P(\omega)$. Graficky můžeme vynést závislost

$$Abs\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_2}\right) = Abs(P(\omega)).$$

Tato závislost je v MAAPrenos.nb zobrazena a to jednou v dvojitém logaritmickém měřítku a jednou v lineárním měřítku.

Podívejme se, jakou má pro nás vypovídací hodnotu první a druhý graf.

Grafy jsou velmi odlišné; abychom přišli na kloub této odlišnosti, musíme si nejprve uvědomit rozdíl mezi *rozdíly* a *poměry*.

Informace, že někdo přišel o milión korun, sama o sobě nevypovídá nic o tom, co ta ztráta pro něj znamená. Pro pokladní v supermarketu pravděpodobně mnohem více, než pro stát nebo Billa Gatese.

Nicméně ztrátu *poloviny* svého majetku budou vnímat již podstatně podobněji.

V hudbě znamená „o oktávu výše" to, že se například vinylová deska točí dvakrát rychleji a interval $\langle 110Hz, 220Hz \rangle$ se změní v interval $\langle 220Hz, 440Hz \rangle$. Druhý interval je ovšem dvakrát delší!

Logaritmické měřítko zohledňuje to, co je pro nás (koho to zajímá, googlete Buckinghamův teorém) důležité, tedy podíly.

Podle vět o logaritmech platí:
$\log(a \cdot b) == \log(a) + \log(b)$
V logaritmickém měřítku znamenají rozdíly délek na osách (tedy rozdíly logaritmů veličin na osách) podíly hodnot veličin.

Ještě jednou, protože pochopení důležitosti poměrů *je důležité*: dostane-li malý dům o tunu uhlí méně, je to větší újma na tepelné pohodě, než dostane-li velký dům o tunu uhlí méně. Dostane-li jeden byt o 10% uhlí méně, je to při spravedlivém rozdělování tepla stejné, jako dostane-li výtopna pro 100 bytů o 10% uhlí méně.

V neposlední míře je v případě slyšitelných kmitočtů pocit posluchače mnohem bližší logaritmickému grafu: výšku tónu vnímá podle logaritmu frekvence a hlasitost přibližně také.

Pro vyjádření poměrů veličin nám předkové vynalezli *decibely*, které značíme *dB*.

Docela pěkně je to popsáno zde.

Poměr $\frac{A}{B}$ vyjádřený v decibelech je $20 \cdot \log\left(\frac{A}{B}\right)$.
Funkcí log rozumíme logaritmus při základu 10, tedy tzv. dekadický logaritmus.

Příklad: Útlum kabelu je 5*dB*, jaké je napětí na výstupu, je-li na vstupu 50mV?

Řešení je v notebooku MAAPrenos.nb.
Útlum znamená, že je výstupní napětí *o pět dB menší*. Je tedy

$$20 \cdot \log\left(\frac{u_2}{u_1}\right) == -5, \quad 20 \cdot \log\left(\frac{u_2}{50 \cdot 10^{-3}}\right) == -5 \Rightarrow u_2 \approx 28mV$$

Udávat útlum v decibelech je dobré: zapojíme-li kabely sériově a jeden má útlum p_1 a druhý útlum p_2, má jejich sériová kombinace (pokud nedělá nějaké problémy jejich spojení) útlum $p_1 + p_2$.

$$20\cdot\log\left(\frac{u_1}{u_2}\right) == -p_1,\quad 20\cdot\log\left(\frac{u_2}{u_3}\right) == -p_2 \Rightarrow$$

$$20\cdot\log\left(\frac{u_1}{u_2}\right) + 20\cdot\log\left(\frac{u_2}{u_3}\right) == -p_1 - p_2 \Rightarrow$$

$$20\cdot\left(\log\left(\frac{u_1}{u_2}\right) + \log\left(\frac{u_2}{u_3}\right)\right) == -p_1 - p_2 \Rightarrow$$

$$20\cdot\log\left(\frac{u_1}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_3}\right) == -p_1 - p_2 \Rightarrow$$

$$20\cdot\log\left(\frac{u_1}{u_3}\right) == -p_1 - p_2 == -\left(p_1 + p_2\right)$$

Útlum 5 dB znamená vlastně „o pět decibelů menší než jedna“.

Zkusme vyřešit úlohu: „pro jakou ω je absolutní hodnota přenosu uvažovaného obvodu minus 15dB“?

Přenos je již sám poměrem, absolutní hodnota poměru je poměr absolutních hodnot, v našem případě výstupního a vstupního napětí, tedy musíme řešit rovnici:

$$20\cdot\log\Big(Abs\big(\left(P\left(R_1, R_2, L, C, \omega\right)/.\{R->10_1, R_2->10, L->10^{-3}, C->10^{-6}\}\right)\big)\Big) == -15$$

Řešení je v notebooku MAAPrenos.nb a odpověď je pro $\omega \approx 85406.2\,s^{-1}$

Úroveň -15dBje také znázorněna v grafech vodorovnou čarou: tak který se vám zdá srozumitelnější, co? ☺

Uvedli jsme výše, že přenos je racionální lomená funkce svých parametrů; zadáme-li hodnoty součástek a zbude-li jako nezávisle proměnná je kruhová frekvence ω, bude přenos racionální lomenou funkcí ω. Zkoumejme chování absolutní hodnoty přenosu při velkých hodnotách ω.

Budiž absolutní hodnota přenosu vyjádřitelná ve tvaru:

$Abs\left(P\left(\omega\right)\right) = \dfrac{a\cdot\omega^n}{b\cdot\omega^m}$. Zkoumejme poměr

$$20\cdot\log\left(\frac{Abs\left(P\left(\omega_1\right)\right)}{Abs\left(P\left(\omega_2\right)\right)}\right) == 20\cdot\log\left(\frac{\dfrac{a\cdot\omega_1^n}{b\cdot\omega_1^m}}{\dfrac{a\cdot\omega_2^n}{b\cdot\omega_2^m}}\right) == 20\cdot\log\left(\frac{\omega_1^n\cdot\omega_2^m}{\omega_1^m\cdot\omega_2^n}\right) ==$$

$$== 20\cdot\log\left(\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^n\cdot\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^m\right) == 20\cdot\left(n\cdot\log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) + m\cdot\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_2}\right)\right) ==$$

$$== 20\cdot\left(n\cdot\log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) - m\cdot\log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\right) == 20\cdot\left(n - m\right)\cdot\log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

Je-li tedy $\frac{\omega_2}{\omega_2} == 10$, je poměr absolutních hodnot přenosů $20dB$ a podobně.

Mluvíme tedy například o „poklesu 20 dB na dekádu“, čímž míníme $n - m == 1$ a poměr kmitočtů $\frac{\omega_1}{\omega_2} == 10$ a podobně.

6. Diferenciální rovnice a předpovídání budoucnosti, co vlastně dělá NDSolve

Podíváme-li se na notebook MAAUzlyUkazka.nb, vidíme, že jsme se k cíli, tedy k vyřešení úkolu „když je zadané napětí nebo proud někde, jaké bude napětí nebo proud jinde“, dostali přímočaře a snadno, tak snadno, že byla nálada vyhrát si trochu i s barvičkami a vlastně stačilo mechanicky použít návod pro metodu uzlových napětí a znát syntaxi NDSolve.
To, že cesta k výsledku byla tak jednoduchá, bylo způsobeno právě tím, že máme NDSolve: nevadilo nám zavádění dalších neznámých a zvyšování počtu rovnic, nevadilo nám, že rovnice jsou diferenciální i algebraické (obsahující derivace neznámých funkcí i neobsahující derivace neznámých funkcí).
Velká část obtížnosti studia teorie elektrických obvodů spočívá jinde v obtížnosti řešení získaných rovnic. Získali jsme velikou moc velmi snadno, ale nenechme se mýlit, zjistit, „co obvod dělá“ ještě vůbec neznamená rozumět tomu, jak to dělá a proč. Fakt, že umíme po pár obrázcích mnoho ještě neznamená, že jsme nějak lepší: jen my máme sbíječku a oni majzlík; jak rychle dílo dokončíme je důležité ekonomicky, ale kvalita díla nemusí být větší.
O NDSolve by šlo říci tak asi „…a všichni se podivovali, jakou moc dal Stephen Wolfram lidem.“

Funkce NDSolve[rovnice, neznámé,intervalřešení] hledá numerickou aproximaci řešení diferenciálních rovnic. A co to je a proč to můžeme dělat bychom si měli trochu více vysvětlit: nikoli podrobně teorii numerických řešení diferenciálních rovnic, k tomu jsou povolanější jiní (zejména www.wolframalpha.com a help sw Mathematica u NDSolve). Jde nám o to, získat představu, o co tak asi jde. Ostatně jak funguje karburátor víme také jen tak mlhavě a detaily mísení ve více komorách běžný řidič nezná. Ale i běžný řidič ví, že se tam něco s benzínem a vzduchem děje.

Proč vlastně numerické metody? Matematická analýza pracuje s představou souvislé číselné osy plné reálných čísel z nichž naprostá většina jsou čísla iracionální. Kdybychom chtěli iracionální číslo vyjádřit desetinným číslem přesně, potřebovali bychom nekonečný počet desetinných míst, což není v konečném čase možné, navíc to není ani praktické: *kdyby* byla Mléčná dráha kruhová a *kdybychom* znali její poloměr a *kdyby* nebyl vesmír zakřivený a platil by vzoreček pro obvod kruhu, pak vynecháme-li všechna desetinná místa za čtyřicátým v čísle π, chyba vzniklá tímto zaokrouhlením by byla menší než průměr protonu.
Z uživatelského hlediska jsou tedy všechny další cifry pro řešení podobných úloh zbytečné.

Dnešní matematika nese v sobě velkou část dědictví geometrie starých Řeků, kde byl kladen důraz na konstrukce ve světě geometrických objektů zcela přesné, úplná správnost pak měla být dokazatelná v konečném počtu myšlenkových kroků. Navíc obrovský úspěch Newtonovy a Lagrangeovy mechaniky utvrzoval vědce v představě světa spojitého, nekonečně dělitelného v prostoru a čase a tak byla vypracována spousta chytrých metod řešení matematických a inženýrských problémů vycházejících z představy spojitého světa.
Ani objev kvantové povahy jevů a částicové struktury hmoty příliš spojité teorie neoslabil: částic je v běžných situacích jednoduše příliš mnoho na to, abychom s nimi mohli počítat jednotlivě a s chytrou obezličkou kontinuální teorie (neuvažujeme veličiny lokální, ale jejich střední hodnoty přes objemy, které jsou „mikroskopicky velké a makroskopicky malé“) naše rovnice platí, pokud neuvažujeme jevy mikrosvěta.

Problém je, že s iracionálními čísly pracujeme jinak, než s čísly racionálními: jelikož je nemůžeme zapsat v konečné formě desetinným (nebo dvojkovým, to je jedno) rozvojem, nebývá nám, než je pojmenovat.

Taková čísla jsou například π, e, $\sqrt{5}$, Sin[5]...Pokud chceme s těmito čísly pracovat přesně, používáme pravidla pro úpravy, například $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5}$.
Pokud nás zajímá „kolik to je, alespoň přibližně“, máme přibližné vyčíslení v tabulkách; jde často o výsledek programu, který by nám dal všechna desetinná čísla, kdyby běžel věčně, ale my jsme jej zastavili a spokojili se s nepřesným výsledkem, zato získaným v konečném čase. Z tohoto pohledu jsou v číslech π, e, $\sqrt{5}$, Sin[5]... „do pojmenování schované výsledky nekonečných procesů“ a úlohy se opět řeší v klasickém stylu: řešení úlohy vtipným použitím konečného počtu kroků s použitím připravených hodnot čísel typu π, e, $\sqrt{5}$, Sin[5]... se považuje za cosi pěkného a ukazuje to jak je matematik chytrý, chcete-li ovšem použitím triků řešit složitější úlohy, brzy narazíte.

Toto pojetí má výhodu (pro technika naprosto zbytečné) absolutní přesnosti, nevýhodou je, že kromě za staletí vynalezených a vyzkoušených postupů nemáme žádný návod, jak příslušné triky vynalézat, naopak často umíme dokázat, že řešit úlohu s použitím již známých „do pojmenování schovaných výsledků nekonečných procesů“ nelze. Pokud chceme pracovat nadále přesně, nebývá, než si hledané přesné řešení pojmenovat.

Například řešení rovnice
$a_1 \cdot x + a_0 == 0, \quad a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0,$
$a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0, \quad a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0$
lze vyjádřit pomocí sčítání, násobení, dělení a odmocňování, tedy existují vzorce, které nám dají hodnotu neznámých kořenů x a tyto vzorce jsou konečné délky zápisu.
Pro rovnici:
$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0$
lze dokázat, že vzorec konečné délky obecně neexistuje (jasně, pro zvláštní hodnoty koeficientů existovat může, těchto zvláštních případů je však mnohem méně než obecných a pravděpodobnost, že půjde najít vzorec pro náhodně zvolených 6 koeficientů, je nula). Chceme-li mít vzorec pro rešení v konečném tvaru, musíme si jej pojmenovat. Často pak těmto pojmenováním říkáme „speciální funkce“, pro polynomiální rovnice například v Mathematice máme funkci Root. Není o nic horší, než funkce druhá odmocnina nebo sinus, jenom je mladší a nejsme na ni zvyklí.

Postup, kdy můžeme o každém výsledku v konečném počtu kroků dojít ekvivalentními úpravami až k axiomům a tak rozhodnout o správnosti nebo nesprávnosti nemusí existovat (Gödel, Tarski, Banach...).
Požadavek absolutní přesnosti a ostrosti pojmů, kterou jsme předpokládali po staletí (muž nebo žena, živý nebo mrtvý, vlna nebo částice, je a nebo to není babička...) je neaplikovatelný a ostatně na proudu a napětí a teplotě jsme viděli, že používáme v životě pojmy bez znalosti přesných definic a v konečném důsledku bez naprosto přesných výpovědí a nikterak nám to nevadí. Koho to zajímá více, pěkně o tom pojednává Ludwig Wittgenstein ve svých Filosofických zkoumáních.

My v toto chvíli přesná řešení opustíme: ostatně i naše vstupy jsou poměrně nepřesné.

Podívejme se na definici derivace funkce f, parametrem této funkce bude čas t.

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{26}$$

Limitní proces dokonalého „blížení se“ je ve světě konečného počtu dostupných čísel nemožný: i v intervalu $\left\langle 0, 10^{-17} \right\rangle$ je ve smyslu reálných (ten název „reálná čísla je trochu výsměch“) nekonečněkrát více čísel, která kdy použijí všechny počítače a to i kdyby vesmír s počítači trval věčně. Mezi „bez pojmenování“ dostupnými čísly jsou mezery a nikdy nebude dost jmen pro ta pojmenovaná.

Učiníme tedy troufalý krok: vypustíme znak limity, Δt budeme uvažovat v „nějakém dobrém smyslu malé“ a znak přesné rovnosti nahradíme znakem „rovná se přibližně“ $\approx$.
Obdržíme:

$$f'(t) \approx \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{27}$$

Z rovnice (27) ovšem již můžeme vyjádřit $f(t + \Delta t)$:

$$f(t + \Delta t) \approx f(t) + f'(t) \cdot \Delta t \tag{28}$$

Pokud příslušná limita a tedy i derivace existuje, bude pro „dostatečně malé Δt“ chyba „dostatečně malá“.

Pokud je naše nezávisle proměnná čas, můžeme rovnici (28) chápat jako „předpovídání budoucnosti“, znalost $f(t)$ a $f'(t)$ nám pro zvolené Δt poskytne *přibližnou informaci* o hodnotě funkce *f* o Δt později, tedy přibližnou hodnotu $f(t + \Delta t)$.

Metody typu Runge-Kutta

Myšlenku Eulerovy metody jsme získali z definice limity. Podíváme-li se na výsledek, vidíme, že jde vlastně o první dva členy Taylorova rozvoje. U mnoha funkcí platí, že více členů Taylorova rozvoje poskytne lepší přesnost náhrady funkce. Ukázka zpřesňování náhrady je v notebooku RungeKutta.nb.
Přímo se tedy nabízí myšlenka využít v jenom kroku numerické metody více členů Taylorova rozvoje, tedy

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \frac{(\Delta t)^1}{1!} y'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y''(t) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} y'''(t) + \ldots$$

Jelikož uvažujeme diferenciální rovnici $y'(t) == f(t, y(t))$, tak máme-li funkci *f* zadanou analytickým předpisem, můžeme pomocí věty o derivování složené funkce více proměnných potřebné vyšší derivace získat:

$$y''(t)=\frac{d}{dt}y'(t)=\frac{d}{dt}f\left(t,y(t)\right)=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d}{dt}y(t)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d}{dt}y(t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f\left(t,y(t)\right)$$

S použitím SW Mathematica ani tuto větu znát nemusíme, pokud zapíšeme korektně požadavek, získáme správný výstup a snadno naprogramujeme Eulerovu metodu, jejíž jeden iterační krok využívá v podstatě kolik chceme členů Taylorova rozvoje.
Pokud však větu neznáme, nepoznáme, jestli je výstup správně a velmi pravděpodobně správně nebude:-)... a riskneme si chybu v zakázce za velké peníze?
Pokud programujeme v nějakém prostředí, které nemá symbolický diferenciální počet v sobě, musíme buď svěřit derivování velmi omylné lidské mysli, nebo si symboliku doprogramovat. Řešení by bylo ovšem pomalé a pro výpočty dráhy kamene vrženého hráčem po ufounovi v gamese (jasně, realita je v lepších gamesách, a hlavně v simulátorech, založena na rychlém numerickém řešení soustav diferenciálních rovnic) by zabralo moc času.
Ve školských příkladech při řešení podobných úloh zpravidla bojujeme s vlastním rozumem, v praxi ale hlavně s pomalostí vyčíslení hodnoty funkce $f\left(t,y\right)$ pro konkrétní hodnoty parametrů t a y.
Funkce $f\left(t,y\right)$ může být výsledkem řešení statisíců rovnic, optimalizačních úloh, interpolací v rozsáhlých mnohorozměrných datech a podobně. Analytický zápis derivovace je zpravidla delší, než původní funkce a tedy její vyčíslení vyžaduje déle času a vícenásobné vyčíslování funkce $f\left(t,y\right)$, protože vyšší derivace se na ni vždy odkazují. Numerické derivování vyžaduje ovšem vícenásobné vyčíslování funkce $f\left(t,y\right)$ také.
Takže tudy ne.

V notebooku RungeKutta.nb je ukázán postup, jak odvodit iterační krok Eulerovy metody využívající první tři členy Taylorova rozvoje. Použijeme ale trik: budeme hledat vyjádření tohoto rozvoje tak, abychom nemuseli vyčíslovat vyšší derivace než $y'(t)=f\left(t,y(t)\right)$.

Hledejme náhradu ve tvaru:

$$y\left(t0+\Delta t\right)\approx y\left(t0\right)+v1*p1+v2*p2$$
Kde *v1* a *v2* jsou váhy přírůstků *p1* a *p2*:
$p1=\Delta t\cdot f\left(t0,y(t0)\right)$ a
$p2=\Delta t\cdot f\left(t0+a\cdot\Delta t,y(t0)+b\cdot p1\right)$
Vyčíslujeme tedy derivaci $y'(t0)=f\left(t0,y(t0)\right)$ a výraz $f\left(t0+a\cdot\Delta t,y(t0)+b\cdot p1\right)$, tedy hodnotu, jakou by měla derivace splňující diferenciální rovnici $y'(t)==f\left(t,y(t)\right)$ kdyby její řešení procházelo bodem $\left(t=t0+a\cdot\Delta t,y=y(t0)+b\cdot p1\right)$.
V čase jsme se tedy posunuli o $a\cdot\Delta t$ a ve funkční hodnotě y o $b\cdot p1$, tedy o násobek přírůstku *p1*.
Budeme hledat hodnoty čísel *v1*, *v2*, *p1*, *p2* takové, aby jeden krok iterace
$\{t0,y(t0)\}\to\{t0+\Delta t,y(t0)+v1*p1+v2*p2\}$
dával shodné výsledky jako krok iterace

$\{t0, y(t0)\} \to \{t0+\Delta t, y(t0)+\frac{(\Delta t)^1}{1!} y'(t0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!} y''(t0)\}$, je-li $y'(t) = f(t, y(t))$.

```
v1 Δt f[t0, y[t0]] + v2 Δt f[t0 + a Δt,
   b Δt f[t0, y[t0]] + y[t0]] + y[t0]
```

má rovnat výrazu (dosadili jsme za derivace podle diferenciální rovnice $y'(t) == f(t, y(t))$)

$$\Delta t\, f[t0, y[t0]] + y[t0] + \frac{1}{2}\Delta t^2 \left(f[t0, y[t0]]\, f^{(0,1)}[t0, y[t0]] + f^{(1,0)}[t0, y[t0]]\right)$$

To samosebou není obecně možné, můžeme ale požadovat, aby se tyto výrazy shodovaly pro „malé hodnoty“ Δt.
Dosáhneme toho tak, že vytvoříme Taylorův rozvoj prvního výrazu a budeme požadovat, aby se jeho první tři členy pro vhodné hodnoty čísel *v1* , *v2* , *p1*, *p2* shodovaly s výrazem druhým.

Koeficienty u výrazů $(\Delta t)^0, (\Delta t)^1, (\Delta t)^2$ tedy musí být ve výsledných výrazech shodné, což vede k rovnicím:

$$\{(-1 + v1 + v2)\, f[t0, y[t0]] == 0,\; (-1 + 2\, b\, v2)\, f[t0, y[t0]]\, f^{(0,1)}[t0, y[t0]] + (-1 + 2\, a\, v2)\, f^{(1,0)}[t0, y[t0]] == 0\}$$

Vidíme, že pro nulovost součinů nezávisle na chování funkce f (kromě existence a konečnosti hodnoty její i derivací vyskytujících se ve výrazech) stačí splnit:
$-1+v1+v2 == 0,\ -1+2\cdot b\cdot v2 == 0,\ -1+2\cdot a\cdot v2 == 0$
Máme tedy tři rovnice pro čtyři neznámé. Ve shodě s obvyklým postupem volíme $a=1$ a řešením pak získáme $b=1,\ v1=0.5,\ v2=0.5$.
Podařilo se nám realizovat krok numerické metody přesný jako s použitím Taylorova rozvoje se třemi členy. Nemuseli jsme symbolicky derivovat a funkci *f* jsme vyčíslovali jen dvakrát. Takhle se to dělá!

V notebooku RungeKutta.nb je ukázán numerický postup vyřešení rovnosti koeficientů: Za hodnoty funkce *f* a jejích derivací jsou dosazována náhodná čísla, vytvořeny rozdíly pravých a levých stran a sečteny přes všechny rovnice a hledáno minimum výsledného výrazu. Je-li blízké nule, jsou rovnice vyřešeny dobře. Je jedno, jak k výsledku dospějeme, tohle se autorům zdálo rychlejší naprogramovat.

V předposlední části notebooku RungeKutta.nb je ukázáno porovnání výsledků odvozené metody s NDSolve. Doporučujeme pohrát si s různými hodnotami počtu kroků, případně měnit zadanou funkci f (v notebooku se jmenuje myf).
Všimněte si zejména jak „zlobí“ skok v derivaci (proto je myf zadána pomocí If). Tam, kde hrozí nespojitost *f*, hrozí nespolehlivost numerických řešení diferenciálních rovnic. Nejen tam:-). Naštěstí v oblasti elektrických obvodů nám příroda takové funkce f v námi zvoleném spojitém popisu světa zakazuje.

V poslední části je ukázáno použití oblíbené metody Runge-Kutta čtvrtého řádu (shodovalo by se pět členů Taylorova rozvoje, tedy až do čtvrté mocniny Δt včetně).

Kdybychom měli diferenciálních rovnic prvního řádu s vyjádřenými derivacemi více, budeme prostě uvažovat *f* jako vektorovou funkci a všechno bude fungovat.
Nicméně pro naše účely budeme používat NDSolve, důležité je ale základní principy znát, vědět, že nespojitost derivace může škodit a podobně.
Až si bude někdo z vás potřebovat napsat vlastní solver diferenciálních rovnic, nalezne při hledání například výtazu „Runge Kutta" odkazů nepřeberně.

7.Elektrický výkon, elektrická energie

Zdroje napětí a proudu jsme chápali také jako „hranici našeho obvodu“, kde ono idealizované zařízení „zajistí napětí na svých svorkách, ať už je proud jakýkoli, jen pokud má konečnou velikost“ v případě zdroje napětí a totéž/.napětí->proud v případě zdroje proudu.
Naše součástky „nepotřebovaly žádný pohon“, zdroje napětí a proudu zajistily napětí a proudy na prvcích obvodu.
Proudy a napětí zdrojů byly důvodem všech napětí a proudů v obvodu.

Ovšem napětí a proudy v obvodech se vyskytující mohou být často větší, než proudy příslušných zdrojů, veličiny podle Obr. 32 jsou vypočítány a zobrazeny v notebooku MAAVykony.nb.
Připojíme k obvodu zdroj napětí $\hat{U}_1 = 1V$, napětí v obvodu může být $15V$ a při připojení zdroje proudu mohou v obvodu téci proudy větší, než z onoho zdroje.

Životní zkušenost nás učí, že „něco za nic, mnoho z mála“ je statisticky nepravděpodobné: něco je celkově spíše za něco a z mála je statisticky častěji „málo +dmálo“, kde dmálo může být i záporné.

Napětí je ve smyčce nulové, ale v jiném dobrém smyslu se „nezachovává“, není třeba práce a snahy pro „zvýšení napětí“. Bilance všech proudů v uzlu je nulová, proud se ovšem ve stejném smyslu „nezachovává“, ke zvýšení proudu nemusí být třeba práce a snahy.

Z fyziky víme, že v běžné mechanice je důležité zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti.
Obvody ze součástek L, R, C nemají snahu se otáčet ani ulétat, zachování momentu hybnosti a hybnosti je pro námi pojednávané elektrické obvody irrelevantní, nepíšeme pojednání o elektrických strojích, kde je podstatné; zachování energie však musejí naše obvody v nějakém dobrém smyslu splňovat: kdybychom měli elektrický obvod, který *nesplňuje* zákon zachování celkové energie soustavy, tak se nezabýváme MAA, protože máme Nobelovu cenu a jsme vědeckou celebritou, nebo, pokud máme zdravý rozum, jsme nejbohatší na Zemi a prodáváme energii získanou pomocí takových obvodů zadarmo za drahé peníze: navíc by šlo o obnovitelný zdroj energie a měli bychom šanci získat dotace.

To se však neděje a energie se tedy v obvodech podle současného vědění zachovává.

Elektro-mechanické analogie nemáme sice rádi (jde totiž dokázat, že univerzálně platné neexistují, dobrá analogie pro nějakou situaci selže v situaci jiné; Lord Kelvin se o nalezení univerzální analogie snažil a neuspěl a to to byl jinačí kabrňák, než my), nicméně jedna taková analogie je teď vhodná.

Máme firmu, která zajišťuje dopravu uhlí do vyšších pater budov v době bez výtahů. Objednáme-li si dopravu uhlí, logicky nám budou účtovat za součin „kolik uhlí“ a „jak vysoko“. Zkusme si to představit v „digitální formě“: Platíme dělníkům za čas. Jeden dělník unese po dobu pracovní dejme tomu 10kg uhlí najednou. Jedno patro trvá s touto zátěží dělníkovi 20s. Kolik „dělníkohodin“ musíme zaplatit, máme-li odnést 3t uhlí do pátého patra?

Snadno lze pomocí matematických metod přibližně šesté třídy základní školy ukázat, že potřebné „dělníkohodiny“ jsou úměrné součinu počtu pater a množství uhlí. „Dělníkohodinám“ odpovídají peníze a penězům v naší analogii energie.

Podobný příklad je čerpání nějakého objemového průtoku přes nějaký tlakový spád; součinem je výkon a analogií je součin proudu a napětí.

Platíme-li „za proud“, platíme za to, že dodavatel musel jednorázově kopit takové dráty, které nejvyšší možný proud vydrží: vlastně neplatíme „za proud“, ale za možnost mít proud „až tak veliký“, za opakovatelnou maximální hodnotu.

Platíme-li za to, že po drátech k nám do zásuvky „přijde objednané napětí“, neplatíme za „napětí, jaké je“, ale za izolaci, která maximální možné napětí vydrží a také za to, že někdo udržuje hodnotu napětí na objednané výši.

Ale za součin proudu a napětí se platí, protože spotřebováváme uran a házíme uhlí do kotlů.

Přesnější vysvětlení pojmu „elektrický výkon“ není bez rozšíření předmětu předmětu MAA možné a ani účelné: koneckonců, přijali jsme k věření vztahy mezi proudem a napětím na cívce, odporu a kondenzátoru a k podepření naší víry v tyto vztahy stačila důvěra v naše tvrzení, že „tak to je“.
Uvěřme tady vztahu mezi *výkonem* a *energií*:

$$p(t) == \frac{dE(t)}{dt} \qquad [W == \frac{J}{s}, J, s], \tag{57}$$

kde $p(t) \quad [W]$ je výkon ve wattech, $E(t)$ energie v joulech a t čas v sekundách. Díky volbě jednotek SI (jak je psáno výše, *jednotky jsou důležité*) platí:

$$p(t) == u(t) \cdot i(t) \qquad [W, V, A] \tag{58}$$

Explicitae píšeme argument výkonu, tedy $p(t) \quad [W]$ chápeme jako *okamžitou hodnotu v konkrétním čase* t [s].
Kdybychom měli jiné jednotky než watty, ampéry a sekundy, mohl by vztah (58) mít tvar například $p(t) = 42 \cdot u(t) \cdot i(t) \qquad [jineW, jineV, jineA]$.

Přijmeme-li analogii s vodou, tlak může být větší „vlevo nebo vpravo“, voda může proudit „zprava doleva nebo zleva doprava“. To prozatím ponechme stranou a podívejme se na výkon a energii na cívce:

$$p(t) == u(t) \cdot i(t), \quad u(t) == L \cdot \frac{di(t)}{dt}, \quad p(t) == L \cdot \frac{di(t)}{dt} \cdot i(t) \tag{59a}$$

Ovšem platí: $\frac{d}{dt}\left(i(t)^2\right) == 2 \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} == \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(i(t)^2\right) == \frac{d}{dt}\left(\frac{i(t)^2}{2}\right)$.

Interpretujme (57) následovně:

$$p(t) == \frac{dE(t)}{dt} \Rightarrow p(t) \cdot dt == dE(t), \tag{59b}$$

$$E(t=konec)-E(t=pocatek) == \int_{t=tpocatek}^{t=tkonec} dE(t) == \int_{t=tpocatek}^{t=tkonec} p(t)\cdot dt == \int_{t=tpocatek}^{t=tkonec} L\cdot\frac{di(t)}{dt}\cdot i(t)\cdot dt ==$$

$$== L\cdot\int_{t=tpoatek}^{t=tkonec} \frac{d}{dt}\left(\frac{i(t)^2}{2}\right)\cdot dt == L\cdot\int_{i=ipocatek}^{i=ikonec} d\left(\frac{i(t)^2}{2}\right) == \frac{L}{2}\cdot\left(ikonec^2-ipocatek^2\right)$$

(60)

Je ovšem docela dobře možném předpokládat, že se milá cívka narodila ve fabrice bez proudu a jednou bez proudu skončí na sběrném dvoře. Platí tedy podle (60):

$$E(t=konec)-E(t=pocatek) == \frac{L}{2}\cdot\left(0^2-0^2\right) == 0 \quad [J] \qquad (70)$$

Celkový energetický přínos cívky je tady nulový.

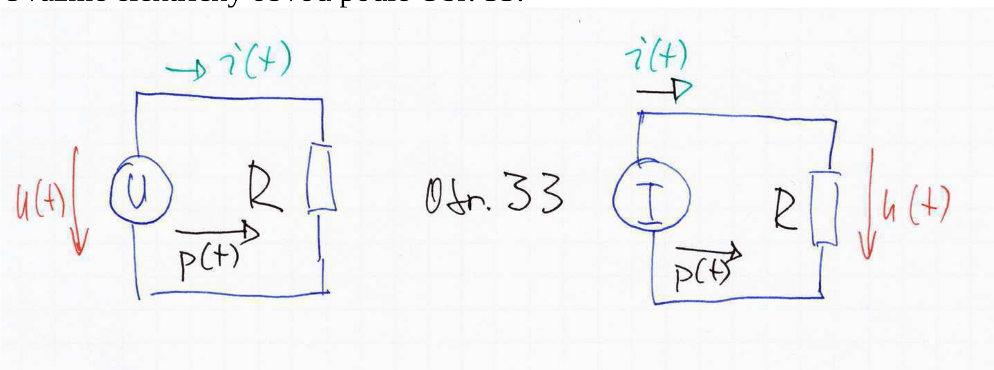
Podceňovali bychom inteligenci čtenáře, kdybychom celá postup opakovali pro *kondenzátor* a *napětí*. Dospěli bychom k analogickému závěru, že pokud kondenzátor s nulovým napětím začal a s nulovým napětím skončí, jeho celkový příspěvek k energii světa je nulový rovněž.

Pokud tedy je možná nenulová bilance výměny energie obvodu mezi jeho vznikem s nulovými proudy a napětími při jeho vzniku a zániku, musí se realizovat na rezistorech.

Cívka a kondenzátor někdy energii přijímají, jindy vydávají, ale neztrácí se v nich: celkově co dostanou, vrátí.

Rezistor nevrátí nic: všechna elektrická energie a elektrický výkon na něm se mění v tepelnou energii a tepelný výkon.

Uvažme elektrický obvod podle Obr. 33:



Ze zkušenosti víme, že pokud proudy a napětí jsou v uvedených směrech kladné, proudí výkon od zdroje k rezistoru: rezistor „se hřeje“ a reálný zdroj napětí vyžaduje nějaký pohon, například kliku nebo vodní turbínu.

Podívejme se na několik příkladů výkonu, jsou uvedeny v MAAVykony.nb.

Nejprve zkoumejme stejnosměrný ustálený stav: proud je konstantní, napětí je konstantní a součin konstant je konstanta: můžeme tedy v dobrém smyslu říci, že „výkon je 7.2W“.

Zde není nic složitého.

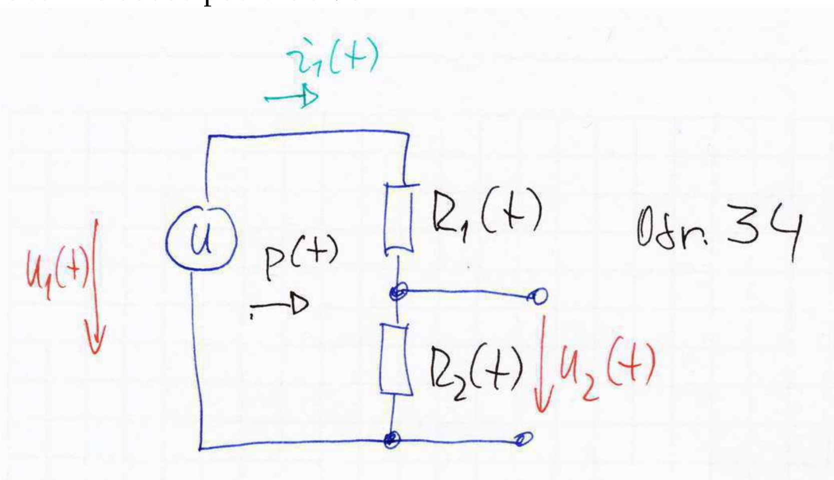
Podívejme se dále na HUS: nechť jsou napětí i proudy harmonické funkce, nechť napětí a proud jsou:

$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_U) = U_M \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_U\right) \tag{71}$$

$$i(t) = I_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_I) = I_M \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_I\right) \tag{71}$$

Příklad časového průběhu součinu $i(t) \cdot u(t)$ je v notebooku MAAVykony.nb.
Vidíme, že ve dvou hodnotách proměnného φ_I je graf časového průběhu výkonu zcela nad osou času nebo pod osou času, tedy stále kladný, nebo záporný, v obecném případě nabývá ovšem hodnot obou znamének.

Uvažme obvod podle Obr. 34



Jde o odporový dělič, kde odpory rezistorů jsou časově proměnné: v čase $t = 0\,s$ odpor $R_1(t)$ prudce klesá a odpor $R_2(t)$ prudce stoupá v čase posunutém o proměnnou *posun*. Vztah pro odporový dělič platí i pro časově proměnné odpory rezistorů, pro výstupní napětí platí tedy:

$$u_2(t) == u_1(t) \cdot \frac{R_2(t)}{R_1(t) + R_2(t)} \tag{72}$$

Pro proud ze zdroje platí:

$$i_1(t) == \frac{u_1(t)}{R_1(t) + R_2(t)} \tag{73}$$

A pro výkon tekoucí ze zdroje platí:

$$p(t) == u_1(t) \cdot i_1(t) == \frac{(u_1(t))^2}{R_1(t) + R_2(t)} \tag{74}$$

Pozorný návštěvník přednášek MAA si povšimne, že jde vlastně o simulaci přepínání P-MOSu a N-MOSu, kde přepnutí probíhá v mírně rozdílných časech.
Vidíme, že výkon se v tomto případě (není-li posun nulový) mění a jednomu takovému přepnutí nelze přiřadit jeden výkon, půjde mu přiřadit energie.

Viděli jsme, že v obecném případě nelze přiřadit výkonu $p(t)$ jedno číslo.

Vždy ovšem můžeme vyjádřit energii prošlou ve zvoleném směru (směr podle Obr. 33) mezi časy $t = t_1$, a $t = t_2$.

$$E_{\langle t_1, t_2 \rangle} = \int_{t_1}^{t_1} p(t) \cdot dt \tag{74}$$

Vztah (74) je vlastně jiným vyjádřením (59b).

Pro *periodické* průběhy s periodou *T* je často výhodné vyjádřit takzvanou *střední hodnotu* výkonu:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} p(t) \cdot dt \tag{75}$$

Kdyby byl výkon konstantní a měl velikost *P* podle (75), pak za čas rovný celočíselnému násobku periody *T* znamená stejnou prošlou energii, jako projde při časově proměnném výkonu $p(t)$. Pro zvolený čas rovný periodě *T* je to zřejmé:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} p(t) \cdot dt \Rightarrow P \cdot T = \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} p(t) \cdot dt \to \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} P \cdot dt = \int_{t=t_1}^{t=t_1+T} p(t) \cdot dt \tag{76}$$

A pro násobky se použijí vlastnosti periodických funkcí, což již necháváme laskavému čtenáři coby cvičení.

Střední hodnota výkonu v stejnosměrném ustáleném stavu je pro jakékoli nenulové *T* rovna okamžité hodnotě výkonu.

Určeme ještě střední hodnotu výkonu pro harmonické průběhy proudu a napětí:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{t=T} I_M \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_I\right) \cdot U_M \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_U\right) = \frac{U_M \cdot I_M}{2} \cdot \cos(\varphi_I - \varphi_U) \tag{77}$$

Poslední výraz v (77) můžeme přepsat:

$$P = \frac{U_M \cdot I_M}{2} \cdot \cos(\varphi_I - \varphi_U) = \frac{U_M}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_M}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi_I - \varphi_U) = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_I - \varphi_U) \tag{78}$$

Hodnotám

$$U_{eff} = \frac{U_M}{\sqrt{2}}, \quad I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \tag{79}$$

Říkáme *efektivní hodnoty* napětí a proudu.
Uvážíme-li harmonický stav na rezistoru, pak $\varphi_I = \varphi_U$, tedy $\cos(\varphi_I - \varphi_U) = 0$.

Pak ovšem platí $P = \frac{U_M \cdot I_M}{2} = U_{eff} \cdot I_{eff}$, tedy efektivní hodnoty harmonického napětí a proudu jsou takové, aby byl vzorec pro střední hodnotu výkonu na rezistoru v harmonickém ustáleném stavu formálně shodný se vzorcem pro okamžitou hodnotu výkonu a pro střední hodnotu výkonu v případě stejnosměrného ustáleného stavu.

Tato hodnota se obvykle udává, 230V v zásuvce tedy znamená $230\cdot\sqrt{2}$ V maximální hodnoty harmonického napětí.

Fázory se často uvádějí *v měřítku efektivních hodnot*; přepočet je opět pře odmocninu za dvou.

Proč nás zajímá střední hodnota výkonu (a kvůli ní zavedené efektivní hodnoty proudu a napětí)?
Uvedli jsme výše, že „rezistor se hřeje“, tedy elektrický výkon v obvodu se realizuje tepelně.
Cívky a kondenzátory si energii s obvodem jen vyměňují, nula od nuly pojde.
Tepelné děje jsou však i pro obvyklé nízké frekvence elektrických harmonických veličin ve srovnání s elektrickými *pomalé*.
Ukažme si to na příkladu:
Rezistor je tvořen tepelně zaizolovaným měděným „drátem“ o průřezu $1mm^2$ a délce $1m$.
Teplota, proud a napětí jsou vyřešený v notebooku MAAVykony.nb

Vidíme, že uvažování konstantního středního výkonu namísto skutečného časového průběhu výkonu sice vnáší do výpočtů chybu, ale technicky zpravidla naprosto akceptovatelnou.
Se střední hodnotou se z hlediska tepelných problémů (a jsou dos důležité i pro HW) počítá mnohem snadněji a obvykle je chyba nepatrná.

U obecných neperiodických průběhů můžeme definovat efektivní hodnotu proudu či napětí přes zvolený časový interval $t\in\langle t_1,t_2\rangle$ jako takovou konstantní hodnotu proudu či napětí, která by na rezistoru vyvolala stejnou energii přeměněnou v teplo.
Na rezistoru platí

$$p(t)==u(t)\cdot i(t)==\frac{\left(u(t)\right)^2}{R(t)}==R(t)\cdot\left(i(t)\right)^2 \qquad (80)$$

Kde jsme buď proud nebo napětí vyjádřili z Ohmova zákona.
Definici efektivní hodnoty obecného průběhu přes obecný interval $t\in\langle t_1,t_2\rangle$ lze tedy přepsat:

$$\begin{aligned}&\int_{t=t_1}^{t=t_2}\frac{U_{eff}^2}{R}\cdot dt==\int_{t=t_1}^{t=t_2}\frac{\left(u(t)\right)^2}{R}\cdot dt\Rightarrow\frac{U_{eff}^2}{R}\cdot\int_{t=t_1}^{t=t_2}1\cdot dt==\frac{1}{R}\int_{t=t_1}^{t=t_2}\left(u(t)\right)^2\cdot dt\Rightarrow\\&\Rightarrow(t_2-t_1)\cdot\frac{U_{eff}^2}{R}==\frac{1}{R}\int_{t=t_1}^{t=t_2}\left(u(t)\right)^2\cdot dt\Rightarrow U_{eff}==\sqrt{\frac{1}{t_2-t_1}\cdot\int_{t=t_1}^{t=t_2}\left(u(t)\right)^2\cdot dt}\end{aligned} \qquad (81)$$

Obdobně ovšem při vyjádření pomocí proudu platí:

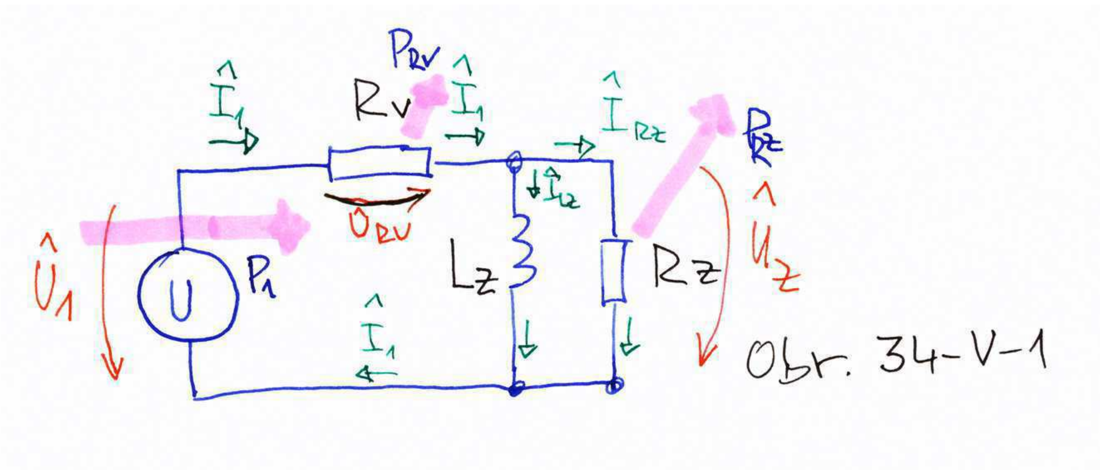
$$I_{eff}==\sqrt{\frac{1}{t_2-t_1}\cdot\int_{t=t_1}^{t=t_2}\left(i(t)\right)^2\cdot dt} \qquad (82)$$

Činný (active), jalový (reactive), zdánlivý (apparent) výkon (power) a účiník (power/active factor) harmonického signálu

Stran chápání pojmů uvedených v podnadpisu panuje mezi elektrotechniky poměrně mnoho omylů a to navzdory tomu, že většina inženýrů dokáže například jalový výkon vypočítat a pro čistě sinusové (harmonické) průběhy proudů a napětí o jedné kruhové frekvenci ω je matematická definice zmíněných veličin jasná a bezrozporná. Omyly panují zvláště ve fyzikálních důvodech plateb za jalový výkon, kde jsou často například činné ztráty akcentovány neúměrně oproti velikosti úbytků napětí v převážně induktivních přenosových sítích. Pokusíme se podat přiměřeně nesprávná a přiměřeně pochopitelná vysvětlení: vysvětlení exaktní je poměrně zbytečné, není-li pochopeno. Nesuplujeme tedy výklad kolegů, kteří jsou opravdovými odborníky na danou problematiku, snažíme se jen přiblížit představu ekonomického a fyzikálního významu těchto veličin i čtenářům méně erudovaným.

Jelikož jsme se omezili na HUS, s výhodou budeme obvody řešit pomocí fázorů. Předpokládáme, že je čtenář již natolik v HUS zběhlý, že nebudeme opakovat vztahy mezi časovými průběhy a příslušnými fázory, napětí zdrojů napětí tedy budeme také zadávat jako fázory a to v měřítku efektivních hodnot.

Uvažme zapojení podle obrázku Obr. 34-V-1



Vypočítat napětí a proudy v takovém obvodu umíme. Odvodíme si ale nejdříve vyjádření střední hodnoty výkonu podle vztahu (78) pomocí fázorů, uvidíme, že i v případě výkonů nám fázory -za cenu nutnosti používání komplexních čísel- usnadní práci.

Zřejmě platí:

$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_I - \varphi_U) == U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \mathrm{Re}[e^{j\cdot(\varphi_I - \varphi_U)}] === \mathrm{Re}[U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot e^{j\cdot(\varphi_I - \varphi_U)}] ==$$

$$== \mathrm{Re}[I_{eff} \cdot e^{j\cdot\varphi_I} \cdot U_{eff} \cdot e^{j\cdot(-\varphi_U)}] == \mathrm{Re}[I_{eff} \cdot e^{j\cdot\varphi_I} \cdot \left(U_{eff} \cdot e^{j\cdot\varphi_U}\right)^*] == \mathrm{Re}[\hat{I}_{eff} \cdot \left(\hat{U}_{eff}\right)^*] == \mathrm{Re}[\hat{I}_{eff} \cdot \hat{U}^*_{eff}] ==$$

$$== U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I) == \mathrm{Re}[\hat{U}_{eff} \cdot \hat{I}^*_{eff}]$$

(82-V-1)

Kde horní index „hvězdička“ znamená komplexní sdružení, v Mathematice
$v^* = Conjugate[v]$.
Toto komplexní sdružení je důležité, protože toto komplexní sdružení vytvoří *rozdíl* úhlů. *Rozdíl* úhlů znamená úhel *mezi* fázory. *Součet* výšek dvou kluků ve třetí třídě *neznamená* v podstatě *nic*, rozhodně ne, kdo dosáhne výše. *Rozdíl* ale *ano*.
Uvažme výkon na „součástce se dvěma vývody“, jako je rezistor, cívka… Součet fázových úhlů nemá žádný fyzikální vztah k dané součástce: budu-li vás harmonicky☺ tahat s nějakým součtem fázových úhlů za ruku a nohu, může to znamenat, že tahám „ve fázi“, tedy zároveň dopředu nohou i rukou, nebo „v protifázi“, tedy „rukou dopředu a nohou dozadu“ v jedné periodě a v druhé naopak.
Součty fázových úhlů pohybu nohou stvoření rozličných se nezabýváme, ale rozdílem těchto úhlů ano: máme mimochodníky a ty ostatní.
Rozdíly jsou důležité.

Vyřešme tedy obvod podle Obr. 34-V-1 a vyjádřeme i výkony (ve smyslu středních hodnot výkonů) na svorkách zdroje a na všech obvodových prvcích.

Řešení jsme provedli pro $L = 0.5H$ a $L = \infty H$, vypočítali jsme všechny proudy a napětí a určili výkony na svorkách zdroje, rezistoru R_V reprezentujícího odpor přívodního vedení a , rezistoru R_Z reprezentujícího odpor zátěže, spotřebiče a pro úplnost (věděli jsme, že vyjde nula a pomohli jsme tomu pomocí Chop) i výkon (stále ve smyslu střední hodnoty přes periodu) na cívce L_Z.

Spotřebitel má *elektroměr*, zařízení, které měří spotřebovanou (v našem případě jedině jako teplo na rezistorech) *energii* a představme si, že spotřebitel platí cenu přímo úměrnou spotřebované energii, tedy

$$penize = cena1Joule \cdot \int_{t=t1}^{t_2} P \cdot dt = cena1Joule \cdot P \cdot (t_2 - t_1)$$

neboť pro jednoduchost uvažujeme neměnnou situaci, tedy konstantní hodnoty orporů, indukčností a napětí zdroje.

Pokud odběratel připojí cívku (tedy cívku o konečné hodnotě indukčnosti, pro konečná napětí teče pro kladnou kruhovou frekvenci cívkou nekonečné indukčnosti nulový proud… a nulový proud, to jako kdybyste z hlediska obvodu neexistovali, jste nula na straně „vtéká“, nebo „vytéká“ v rovnicích uzlových napětí ☺) , při konstantním odporu zátěže jeho odebraný výkon a energie malinko –v našem případě o 0.02W - klesnou a on úměrně malinko zaplatí méně.
Je „na nule“: méně odebral, méně zaplatil, OK.

Ale dodavatel? Připojení cívky ho stálo zvětšení ztrát v rozvodech o 2.08W. Má menší tržbu a musel více házet uhlí do kotle.

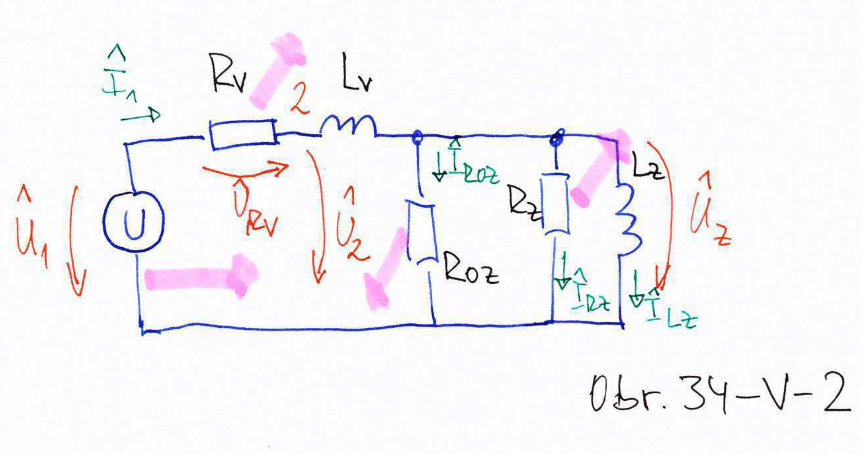
Pokud spotřebitel připojí cívku, teče přívodním vedením proud asi 2.7A, bez připojené cívky (připomeňme, nekonečná, jako žádná☺) proud asi 2.28A.

Aby se dráty nepřehřály, musíme je chladit, nebo zvětšit jejich průřez a tím snížit odpor a zvětšit teplosměnné plochy. Stálo by to víc peněz.

Vidíme tedy, že naprosto není v zájmu dodavatele elektřiny, aby si spotřebitel připojoval nějaké cívky, které mu odběr nezvětší a dodavateli zvětší investiční náklady na přívodní vedení a provozní náklady v důsledku zvýšení ztrát na vedení, které dodavatel dodat do vedení musí, ale spotřebitel mu je nikterak nezaplatí.
Pochopitelně, kdybyste aplikovali nahrazení {cívka->kondenzátor, $\infty \to 0$ }, zjistíte, že připojení *nenulové* kapacity vede k úplně shodným výsledkům a take naprosto není v zájmu dodavatele elektrické energie.

Explikujme dále: Pokud je jedinou informací o tom, jestli si odběratel připojuje jen rezistory (ty jsou OK, spotřebuje víc, zaplatí víc), nebo i cívky údaj elektroměru měřícího střední hodnotu výkonu podle výše uvedených vztahů, nikdy se dodavatel o připojených cívkách a kondenzátorech nedozví.
Je tedy třeba měřit ještě "něco jiného". Ukážeme si později, že onou další veličinou , která se měří a za kterou se platí, je tzv. *jalový výkon*.

Uvažme situaci podle Obr. 34-V-2



Dodavatel elektřiny přivádí tuto přes vedení, které má odpor a indukčnost a je v tzv. "náhradním schématu" reprezentováno sériovou kombinací cívky a rezistoru.

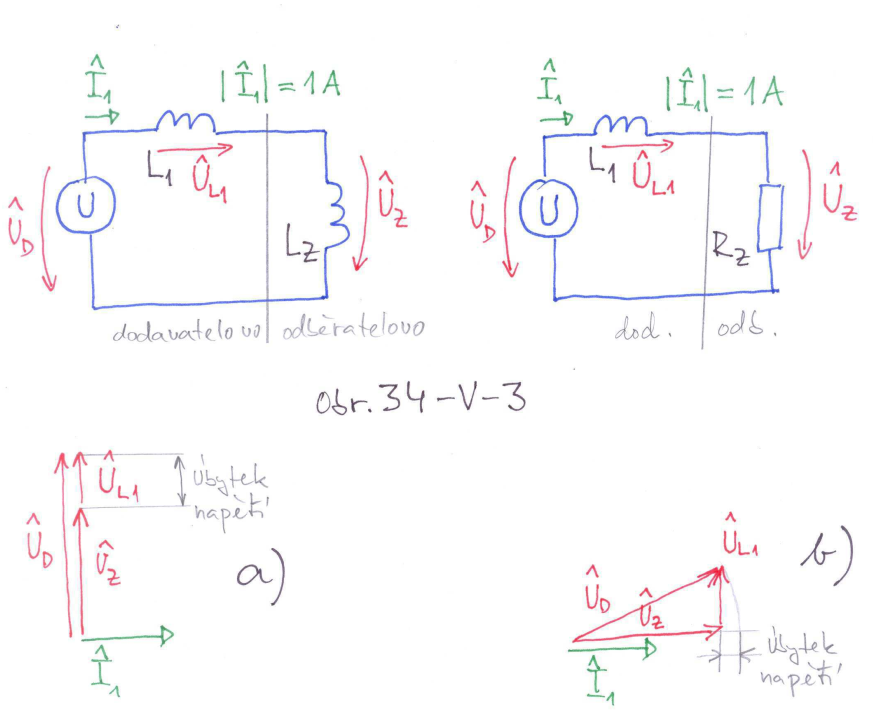
Představme si situaci na Jestřebí boudě na Brendách, téměř na vrcholku malého pohoří je turistická ubytovna, jeden transformátor 35/0.4kV pro skupinu asi deseti odběratelů. Vedení je vzdušné, 35kV (co to znamená v případě trojfázové soustavy se dozvíte později v jiných předmětech), má i nějakou nějakou kapacitu, nicméně se ze zkušenosti ví, že tuto kapacitu lze zanedbat a chyba tím ve výpočtech vzniklá nestojí za řeč.
Všichni odběratelé jsou slušňáci a cívky nepřipojují. Jak se projeví, když soused připojí cívku a odpor? Ostatní odběratelé "vidí"napětí $\hat{U}_z$, napětí mezi dvěma dráty, nic jiného.

Výpočet ukazuje, že udržuje-li dodavatel napětí 230V, pokud se cívka nepřipojí, připojení cívky způsobí pokles napětí na cca 220V. A žárovky pohasnou.

Připojení cívky neuškodilo jen dodavateli (kdybyste si spočítali ztráty na Rv, viděli byste, že stouply, zatímco odběr a obrat připojením cívky mírně klesl), ale –poklesem napětí- i ostatním slušňáckým odběratelům.

I z hlediska odběratelů je dobré „připojování cívek či kondenzátorů“ nepodporovat.

Uvažme situaci podle Obr. 34-V-3



Obr. 34-V-3

Pokud modelujeme systém zdroj+vedení+transformátory jako cívku (a pokud nejde o kabelové rozvody, dost dobře to sedí), vidíme, že připojení takového rezistoru (kamna), že odebírá 1A proudu, vyvolá úbytek napětí (rozdíl údaje voltmetru na svorkách zdroje a na svorkách zátěže) asi 0.3V, připojení cívky, která odebírá (ve smyslu údaje ampérmetru v sérii s ní) proud 1A, vyvolá ve stejném smyslu úbytek cca 31.4V.

Z fázorových diagramů je důvod zřejmý: fázory napětí na cívkách jsou navzájem ve fázi, rovnoběžné, kdežto na rezistoru a cívce fázory napětí svírají pravý úhel a rozdíl mezi délkou přepony a delší odvěsnou je menší.

Zjistili jsme, že připojovat cívky je ničemné a teď najděme veličinu, která jsouc změřena cívky odhalí a zpoplatní.

Investice (napětí-izolace, proud-průřez), proměnné náklady: uhlí a hlídání napětí.
Hlídání napětí je proměnný náklad a tak je jej možno ohodnotit výkonem.

Podívejme se na několik vztahů:

$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I) == \mathrm{Re}[\hat{U}_{eff} \cdot \hat{I}^*_{eff}] == \pm U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{1-\sin^2(\varphi_U - \varphi_I)} \Rightarrow$$
$$P^2 == (U_{eff} \cdot I_{eff})^2 \cdot (1-\sin^2(\varphi_U - \varphi_I)) == (U_{eff} \cdot I_{eff})^2 - (U_{eff} \cdot I_{eff})^2 \cdot \sin^2(\varphi_U - \varphi_I)$$
$$S = U_{eff} \cdot I_{eff}$$
$$Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin(\varphi_U - \varphi_I)$$
$$Q == \mathrm{Im}[\hat{U}_{eff} \cdot \hat{I}^*_{eff}]$$
$$\hat{S} = P + j \cdot Q == \hat{U}_{eff} \cdot \hat{I}^*_{eff}$$
$$S^2 == P^2 + Q^2$$

(82-V-2)

Veličině Q říkáme jalový výkon, rozměr má $V \cdot A$ a jednotku VAr, čti „voltampér reaktanční“. Z fyzikálního hlediska je vyjádření $V \cdot A$, W a VAr shodné, odlišujeme ovšem watt pro výkon, který má nenulovou střední hodnotu a „voltampér reaktanční“, oceňující míru škodlivých vlivů připojených cívek a kondenzátorů.

Ve vztahu pro činný výkon $P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I)$ výsledek nezáleží na znaménku rozdílu $\varphi_U - \varphi_I$, ve vztahu pro jalový výkon $Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin(\varphi_U - \varphi_I)$ na znaménku záleží (kosinus je sudá a sinus lichá funkce). Vztahy pro jalový výkon v (82-V-2) jsme v souladu s místními zvyky zvolili takové, aby jalový výkon způsobený indukčnostmi vycházel kladný a jalový výkon způsobený kondenzátory záporný.
Jelikož znaménka jalového výkonu cívek a kondenzátorů jsou opačná, je možno vliv jedněch eliminovat, *kompenzovat* připojením druhých, hovoříme pak o *kompenzaci* jalového výkonu, případně kompenzaci *účiníku*.

Výrazu $P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I)$ říkáme činný výkon, resp. aktive power, výrazu $Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin(\varphi_U - \varphi_I)$ říkáme jalový výkon, resp. reaktive power, výrazu $S = U_{eff} \cdot I_{eff}$ říkáme zdánlivý výkon, resp. apparent power a výrazu $\cos(\varphi_U - \varphi_I)$, který často označujeme $\cos\varphi$ říkáme účiník, resp. active factor nebo power factor.

Stříškou nad *S*, tedy $\hat{S}$ vyjadřujeme, že jde o komplexní číslo, v žádném případě nejde o fázor!

Činný a jalový výkon na odporu, kondenzátoru a cívce

Vztahy (82-V-2) můžeme upravit, když vyjádříme proud, resp. napětí pomocí příslušných impedancí.
Rezistor:

$$P = \mathrm{Re}[\hat{U}_{eff} \cdot \hat{I}^*_{eff}] == \mathrm{Re}[\hat{U}_{eff} \cdot \left(\frac{\hat{U}_{eff}}{R}\right)^*] == \frac{1}{R} \cdot \mathrm{Re}[\hat{U}_{eff} \cdot \hat{U}^*_{eff}] ==$$
$$== \frac{1}{R} \cdot Abs[\hat{U}_{eff}]^2 == \frac{U^2_{eff}}{R} == \mathrm{Re}[R \cdot \hat{I}_{eff} \cdot \hat{I}^*_{eff}] == R \cdot Abs[\hat{I}_{eff}]^2 == R \cdot I^2_{eff}$$

(82-V-3)

Výkon na rezistoru je činný, nezáporný a platí pro něj vztahy jako v případě stejnosměrného stavu, kdy za proudy a napětí dosazujeme efektivní hodnoty proudu či napětí, velikosti (absolutní hodnoty) fázorů proudů či napětí v měřítku efektivních hodnot.

Cívka:

$$Q = \mathrm{Im}[\hat{U}_{eff} \cdot \hat{I}^{*}_{eff}] == \mathrm{Im}[\hat{U}_{eff} \cdot \left(\frac{\hat{U}_{eff}}{j \cdot \omega \cdot L}\right)^{*}] == \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot \mathrm{Im}[\left(\frac{1}{j}\right)^{*} \cdot \hat{U}_{eff} \cdot \hat{U}^{*}_{eff}] ==$$

$$== \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot \mathrm{Im}[-j \cdot \hat{U}_{eff} \cdot \hat{U}^{*}_{eff}] == \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot Abs[\hat{U}_{eff}]^{2} == \frac{U^{2}_{eff}}{X_{L}} == \qquad (82\text{-V-}4)$$

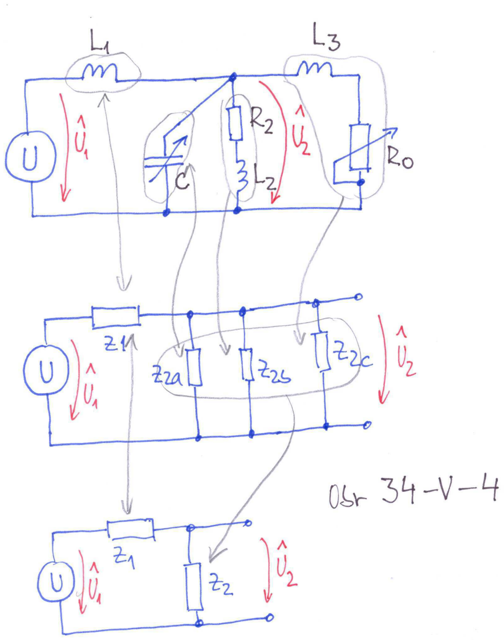
$$== \mathrm{Im}[j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I}_{eff} \cdot \hat{I}^{*}_{eff}] == \omega \cdot L \cdot Abs[\hat{I}_{eff}]^{2} == X_{L} \cdot I^{2}_{eff}$$

Jalový výkon cívky je kladný a počítáme ho jako činný výkon, přičemž místo odporu dosazujeme *reaktanci* cívky $X_L = \omega \cdot L$.

Odvození vztahu pro jalový výkon kondenzátoru ponecháváme čtenáři coby cvičení; jalový výkon kondenzátoru je záporný a počítáme jej jako činný výkon, přičemž při označení $X_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$ platí $Q = -\frac{U^{2}_{eff}}{X_C} == -X_C \cdot I^{2}_{eff}$.

Použití proměnné kapacity pro regulaci napětí v uzlu

Uvažujme zapojení podle Obr. 64-V-4



Řešení obvodu pomocí HUS je v notebooku MAAflicker.nb

Ze zdroje napětí $\hat{U}_1$ je přes cívku L_1, která nám respektuje induktivní vedení a transformátory „po cestě“.

V uzlu 2 (napětí $\hat{U}_2$) uvažujeme dva odběry: jeden v uvažovaném časovém intervalu konstantní, induktivní (například přes transformátor zapojené rodinné domky s vytápěním a svícením elektřinou) a druhý proměnný (například průmyslový podnik s obloukovou pecí s vlastním transformátorem).

Kolísání velikosti napětí o frekvencích kolem 5Hz způsobí kolísání světelného toku světelných zdrojů (žárovek více, kompaktních zářivek méně), které je obzvláště nepříjemné lidem. Tomuto kolísání se říká *flicker*, protože jakožto blikání bylo popsáno nejprve v Anglii.

Na Obr. 34-V-3 jsou dva krajní případy čistě induktivní a čistě reálné zátěže, induktivní s velkým a reálné s malým úbytkem napětí při stejné velikosti odebíraného proudu. Zřejmě je namístě očekávat, že úbytek na zátěži „trochu cívka, trochu rezistor“ by měl velikost - při stejné velikosti odebíraného proudu – někde mezi induktivním a čistě činným (také říkáme *reálným* ve smyslu že impedance je reálné číslo) případem.

Do uzlu s uvedenými odběry zapojíme ještě kondenzátor C.

Zdroj napětí $\hat{U}_1$ má nastavené napětí $\hat{U}_1 = 1.06 \cdot U_{nom}$, kde $U_{nom} = \frac{22000}{\sqrt{3}} V$ je *jmenovité, nominální* (lat. nomen = jméno) napětí, je tedy počítáno s úbytky a napětí je o 6% zvýšeno. V uzlu 2 bychom chtěli mít stálé napětí U_{nom}, nezávisle na velikosti proměnného odběru, který modelujeme proměnným odporem rezistoru *Ro*. Uvidíme, že proměnlivou hodnotou kapacity *C* toho lze v jistých mezích dosáhnout.

V notebooku MAAflicker.nb je obvod vyřešen pomocí skládání impedancí a impedančního děliče; uzlová napětí samozřejmě fungují, ale pokud to jde, je obvykle zvolená cesta snazší.

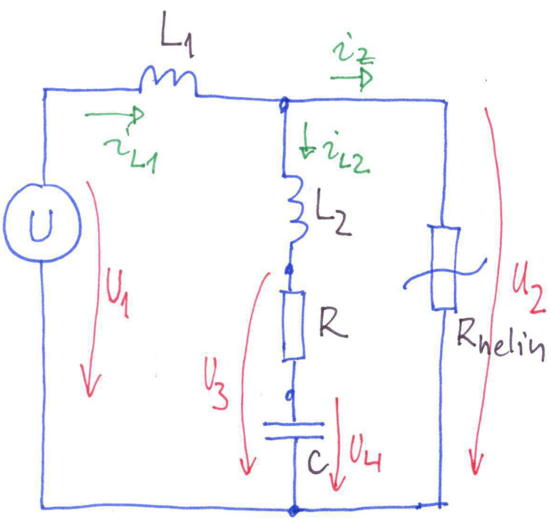
V notebooku je zobrazena závislost velikost fázoru napětí $\hat{U}_2$ pro tři hodnoty *Ro* na kapacitě kondenzátoru C. Vidíme, že lze změnou kapacity kompenzovat kolísání napětí v uzlu způsobené proměnlivostí *Ro*.

Závislosti napětí v uzlu pro zvolené hodnoty vypadají přímkově, tak se ovšem tváří dostatečně malý kousek jakékoli spojité hladké křivky: okomentujete-li zakomentovaný příkaz Plot, kde je větší rozsah hodnot kapacity *C*, vidíte, že jde vlastně o kousíček „něčeho jako je rezonanční křivka“, což také skutečně je, jen je frekvence brána konstantní a proměnlivá je kapacita a nikoli naopak, jak bývá obvyklé.

Dále je v notebooku vytvořena závislost hodnoty kapacity potřebné pro udržení hodnoty U_{nom} v uzlu jako funkce velikosti proudu proměnnou zátěží.
Jak je to uděláno ponecháváme čtenáři coby cvičení.

Nelineární rezistor v obvodech, řešení pomocí uzlových napětí v Mathematice

Uvažujme zapojení podle Obr. 34-V-5 a řešení je v notebooku MAAharmoniky.nb



Obr. 34-V-5

Nelineárním rezistorem zde rozumíme „součástku“ , pro kterou platí

$$i(t) == f\left(u(t)\right), \quad \exists k, u_1, u_2 \in R^1 : \; f\left(k \cdot u_1\right) \neq k \cdot f\left(u_1\right), \; f\left(u_1 + u_2\right) \neq f\left(u_1\right) + f\left(u_2\right) \tag{82-V-5}$$

Neplatí tedy požadavky linearity a rezistorem tuto „součástku“ nazýváme proto, že rovnice ji popisující neobsahuje žádné derivace, svazuje tedy jen okamžité hodnoty, podobně jako u obyčejného rezistoru.

V notebooku uvažujeme závislost proudu a napětí ve tvaru:

$$iNelin(u) = 0.01 \cdot \left(u + \frac{1}{2} u^5 + \frac{5}{8} u^3\right) \tag{82-V-6}$$

A část jejího průběhu, nebo jak říkáme „charakteristiky“ je zobrazena graficky.

Obvody s nelineárními součástkami nemůžeme řešit pomocí HUS, nesplňují totiž podmínku jedné frekvence v obvodu. Přivedeme-li na svorky součástky s charakteristikou podle (82-V-6) napětí $u = \sin(\omega \cdot t)$, tedy harmonický průběh, bude mít výsledný proud časovou závislost:

$$iNelin\left(\sin(\omega \cdot t)\right) = 0.01 \cdot \left(\sin(\omega \cdot t) + \frac{1}{2}\left(\sin(\omega \cdot t)\right)^5 + \frac{5}{8}\left(\sin(\omega \cdot t)\right)^3\right) == \\ == \frac{27 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \sin(5 \cdot \omega \cdot t)}{3200} \tag{82-V-7}$$

Připojení zdroje napětí $u = \sin(\omega \cdot t)$ vyvolalo v proudu i složku s frekvencí pětkrát větší.

Pokud byste provozovali spotřebič, který při připojení na rozvodnou síť odebírá proud nejen o síťové frekvenci (říkáme „základní harmonické“), ale i nezanedbatelný proud o frekvenci vyšší (v našem případě proud „páté harmonické“) a váš distributor elektrické energie by na to přišel, dostali bychom se do problémů. To se prostě nesmí, v síti byl brzy pěkný nepořádek. Některé spotřebiče však takový proud odebírají a ukážeme si jednu cestu, jak se problémům vyhnout.
Obvod nemůžeme řešit pomocí HUS, ale úvahy plynoucí z HUS nám nikdo nemůže vzít.

Zkusíme tedy proud páté harmonické „vyzkratovat“ přes sériovou kombinaci L_2, R a C.
Ve skutečnosti bychom tam rezistor nechtěli vůbec mít, vždyť na rezistoru se elektrická energie mění v teplo, nicméně rezistor zde simuluje nedokonalost z tohoto světa (a koneckonců i kondenzátorů, nicméně v silnoproudé elektrotechnice máme k dispozici kvalitnější kondenzátory, než cívky a tak je tady rezistor zejména „za cívku“).

V případě HUS a uvážení kruhové frekvence ω_0 je impedance této sériové kombinace

$$Z_{filtr} = R + \frac{1}{j \cdot \omega_0 \cdot C} + j \cdot \omega_0 \cdot L_2 == R + \frac{1 - \omega_0^2 \cdot L_2 \cdot C}{j \cdot \omega_0 \cdot C} \qquad (82\text{-V-}8)$$

Minimum velikosti této impedance je rovno R a nastává pro

$$1 - \omega_0^2 \cdot L_2 \cdot C == 0 \qquad (82\text{-V-}9)$$

Zvolíme-li tedy $\omega_0 = 5 \cdot \omega$, umožníme proudu páté harmonické téci přes náš filtr tvořený L_2, R a C a zmenšíme velikost proudu páté harmonické pronikajícího do zbytku sítě.
Vyšší harmonické, vzniklé v důsledku nelinearity si „vyřídíme doma“ a nevystavujeme se riziku postihu za jejich šíření do sítě.

V notebooku vidíme, že proudy zátěží a filtrem jsou opravdu hodně nesinusové, proud odebíraný ze zdroje je poměrně kvalitní sinusovka.

Doporučujeme laskavému čtenáři vyzkoušet změnit parametr rozladeni a velikost odporu R a sledovat, jak se průběhy mění.

Filtrace vyšších harmonických, kompenzace jalového výkonu a ladění rezonančního obvodu představují z hlediska elektrických obvodů jednu a tu samou věc: nazýváme je různě podle účelu, proč to děláme.

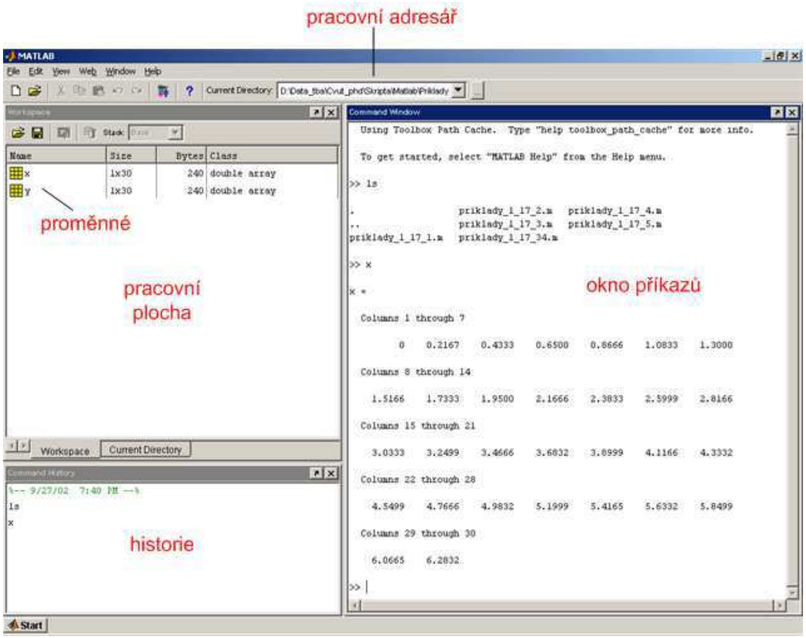
8.Tvorba jednoduchých programů v SW Matlab

Matlab je vysoce výkonný jazyk pro technické výpočty. Integruje výpočty, vizualizaci programování do jednoduše použitelného prostředí. Základním datovým typem je dvourozměrné pole, které využívá počítání pomocí matic. Většinou technický problém převedeme na vektorovou nebo maticovou formulaci, kterou použijeme pro vkládání dat do SW Matlab. Tyto problémy obvykle zahrnují:

- Inženýrské výpočty
- Vývoj algoritmů
- Modelování, simulace a vývoj prototypů
- Vývoj aplikací, včetně tvorby GUI

Nevýhodou Matlabu je, že standardní součástí není podpora symbolických výpočtů.

Základní uspořádání v SW Matlab je na obr. 35:



obr.35 Základní okno v Matlabu

V SW Matlab je implementována základní matematika. Tabulka základních matematických operací je na následujícím obrázku:

Operace	Symbol	Příklad
sčítání, a+b	+	3+22
odčítání, a-b	-	90-54
násobení, a·b	*	3.14*0.85
dělení, a÷b	/ nebo \	56/8=8\56
mocnění, a^b	^	2^8

Tyto operace píšeme rovnou do okna příkazů. Další základní operace jsou v následující tabulce:

Speciální proměné	Popis
`ans`	proměnná k uložení výsledku
`pi`	poměr obvodu a poloměru
`eps`	nejmenší použitelné číslo
`flops`	počet operací
`inf`	označení pro nekonečno (např. 1/0)
`Nan (nebo) nan`	označení nedefinované hodnoty (např. 0/0)
`i (a) j`	komplexní jednotka
`nargin`	počet vstupních parametrů funkce
`nargout`	počet výstupních parametrů funkce
`realmin`	nejmenší použitelné kladné realné číslo
`realmax`	největší použitelné kladné realné číslo

Dalším důležitým parametrem je formát čísel. Základní formáty ukazuje následující tabulka:

Matlab příkaz	pi
`format short`	`3.1416`
`format long`	`3.14159265358979`
`format short e`	`3.1416e+000`
`format long e`	`3.141592653589793e+000`
`format short g`	`3.1416`
`format long g`	`3.14159265358979`
`format hex`	`400921fb54442d18`
`format bank`	`3.14`
`format +`	`+`
`format rat`	`355/113`

Největší výhodou SW Matlab jsou funkce. Díky nim voláme složitější činnost, která jeden nebo více parametrů zpracuje do jednoho nebo více výstupních parametrů podle daného algoritmu. Funkce se rozdělují následujícím způsobem:

- built-in funkce - funkce, které jsou součástí jádra Matlabu
- m.funkce- funkce, které jsou uloženy v externích souborech-tzv. m.filech (více později)

U každé funkce potřebujeme vědět, jaké má jméno, počet a význam vstupních a výstupních parametrů. V případě, že nevíme některé z těchto věcí, můžeme použít HELP. Základní syntaxe volání funkce je následující:

[prom1vyst,prom2vyst,...]=nazev_funkce(prom1vstup,prom2vstup,…)

Pro elektrotechnické výpočty je výhodou, že Matlab umí pracovat i s komplexními funkcemi. Základní příkazy ukazuje následující tabulka:

Komplexní funkce	Popis
abs	absolutní hodnota nebo velikost
angle	fázový úhel v radiánech
conj	komplexně sdružený
imag	imaginární část kompexního čísla
real	reálná část kompexního čísla
unwrap	konverze na stejný fázový úhel ($\varphi+2\pi n$)
isreal	je true pro reálná pole
cplxpair	setřídí vektor podle velikostí realných částí

Komplexní číslo zapisujeme: a+j*b nebo a+i*b

Exponenciální funkce	Popis
exp	exponenciální fce
log	logaritmická fce se základem e (e=2.7183)
log10	logaritmická fce se základem 10
log2	logaritmická fce se základem 2
pow2	mocnina na druhou o základě 2
sqrt	druhá odmocnina
nextpow2	nejbližší vyšší druhá mocnina

Jak již bylo na začátku uvedeno Matlab používá ve svých výpočtech matice. V následující části bude uvedeno základní operace s maticemi a vektory v SW Matlab.
Možnosti definování vektoru:

- x=1:10:1000, vytvoří vektor od 1 do 1000 s krokem 10
- linspace(1:1000:100), vytvoří vektor od 1 do 1000, tak aby měl 100 členů a krok byl stejný
- lenght(x), zjištění délky vektoru x

Možnosti definování matice:

- , oddělujeme sloupce matice
- ; odděluje řádky matice
- A' transpozice matice A

Ukázka definování matice je zde:

A=[1 2 3 4;4 5 6 7;7 8 9 10]

Jinou možností je:

A=[1:4;4:7;7:10]

Oba tyto zápisy vytvoří matici: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

V Matlabu jsou implementovány následující operace s maticemi:

det	- determinant matice
inv	- inverze matice
'	- operátor transpozice (apostrof)
.'	- transpozice prvek po prvku (sdružená transpozice, rozdílná od transpozice v komplexních číslech)
sqrtm	- maticová odmocnina
expm	- maticová exponenciála
logm	- logaritmus matice
poly	- charakteristický polynom
size	- rozměry matice
roots	- vlastní čísla charakteristického polynomu
max	- maximální prvek matice
diag	- diagonála matice

Pro všechny operace musí být splněno, že ji lze definovat, jinak Matlab vypíše chybu.

Dalšími důležitými operacemi v Matlabu je zpracování polynomů a interpolace. Ty budou ukázány v následujících bodech:

- Vektorová reprezentace polynomů
  - p(x) = 4x^3 + 5x + 1, interpretace Matlabu p=[4 0 5 1]
- polyval (p,x) ... vyčíslení polynomu pro všechny x
- conv(p,q) … násobení polynomu
- roots(p) … nalezení kořenů polynomu
- polyfit(x,y,r) … proložení hodnot y polynomem řádu r

Pro technický výsledek jsou potřeba grafy a výstupy. Pro tyto účely slouží v Matlabu následující funkce:

- plot(x,y) - vykreslí dvourozměrný graf v závislosti y na x
- subplot(m,n,i) - rozdělí obrazovku pro vykreslení grafů m krát n polí, umísťuje následující graf do pole i
- xlabel('text'),ylabel('text') - popis os
- grid on - zapne mřížku v grafu
- axis - rozsah os
- plot3(x,y,z) - vykreslení 3D grafů

Dalším důležitými operacemi jsou manipulace se soubory. Základními typy souborů v Matlabu jsou

- *.m -skripty (m-file)

- *.mdl - modely v Simulinku
- *.mat - soubory kde jsou uloženy hodnoty proměnných

S těmito soubory se manipuluje dle následující tabulky:

Manipulace se soubory	Popis
`cd (nebo) pwd`	zobrazí aktuální cestu
`p = cd`	aktuální cesta v řetezci *p*
`delete soubor.m`	vymaže *soubor.m*
`dir (nebo) ls`	zobrazí soubory v aktuálním adresáři
`d = dir`	soubory v aktuální cestě ve struktuře *d*
`exist('cow','file')`	kontroluje existenci souboru *cow.m*
`exist('dname','dir')`	kontroluje existenci adresáře *dname*
`p = matlabroot`	aktuální cesta k programu Matlab v řetezci *p*
`type cow`	vypíše soubor *cow.m*
`what`	vypíše soubory *.m
`which cow`	zobrazí cestu k souboru *cow.m*

9. Využití potenciálu knihoven v Matlabu

Pokud si představíme základní tvar funkce, jak jsme si ho ukázali v předchozí kapitole, tak jeho tvar v případě, že je v souboru (nejčastěji v m.filu), vypadá takto:

function [out1,out2,...] = jmeno_funkce(inp1,inp2,...)

Výhodou je, že proměnné uvnitř této funkce jsou lokální, tudíž nemusíme řešit, zdali nám nekoliduje název proměnných v našem programu s proměnnými v souboru, kde je uložená funkce. Pokud bychom chtěli zjistit, kolik je vstupních (výstupních) proměnných nějaké funkce, tak použijeme funkce nargin (nargout). Jestliže obsahuje soubor, ve kterém je uložena funkce, další funkci nazýváme tuto funkci subfunkcí.

Dalšími důležitými prvky v Matlabu jsou cykly a podmíněné příkazy. Nejpouživanější typy jsou uvedeny zde:

- while - Cyklus s podmínkou na začátku ("pokud podmínka platí tak proveď kód")
- for - Cyklus s pevným počtem opakování ("proveď pevný počet opakování")
- switch - Přepínač (pro různé hodnoty proveď různé příkazy)
- if - Podmíněný příkaz (podmínka)

Pro zde uvedené typy je uveden příklad na následujícím obrázku (36):

```
while výraz
    příkaz
end
```

```
for index=start:krok:konec
        příkaz
end
```

```
switch výraz
        case hodnota 1
                příkaz 1
        case hodnota 2
                příkaz 2
        otherwise
                příkaz 3
end
```

```
if logický výraz
        příkaz
end
```

```
if logický výraz
        příkaz 1
else
        příkaz 2
end
```

obr.36 Cykly a podmíněné příkazy v Matlabu

Pro některé případy se hodí, aby funkce byla funkcí více funkcí. Některé tyto funkce jsou implementovány přímo v Matlabu. Mezi tyto funkce patří například hledání průchodu nulou z nějaké funkce, nalezení minima funkce, hodnota velikosti určitého integrálu z nějaké funkce, nebo třeba řešení soustavy diferenciálních rovnic. Ukázky syntaxe výše popsaných funkcí je na následujícím obrázku:

- Nalezení nulové hodnoty funkce jedné proměnné

  hodnota_korene = fzero ('nazev_funkce',poc_hodnota)

- Nalezení minima funkce

  min_x = fminsearch ('nazev_funkce',x0)

- Nalezení hodnoty určitého integrálu

  hodnota_integralu = quad ('nazev_funkce',dolni_mez,horni_mez)

- Řešení soustavy diferenciálních rovnic

  [t,y]=ode45('nazev_funkce',casovy_interval,pocatecni_podminky)

obr.37 Ukázky syntaxe základních funkcí v Matlabu

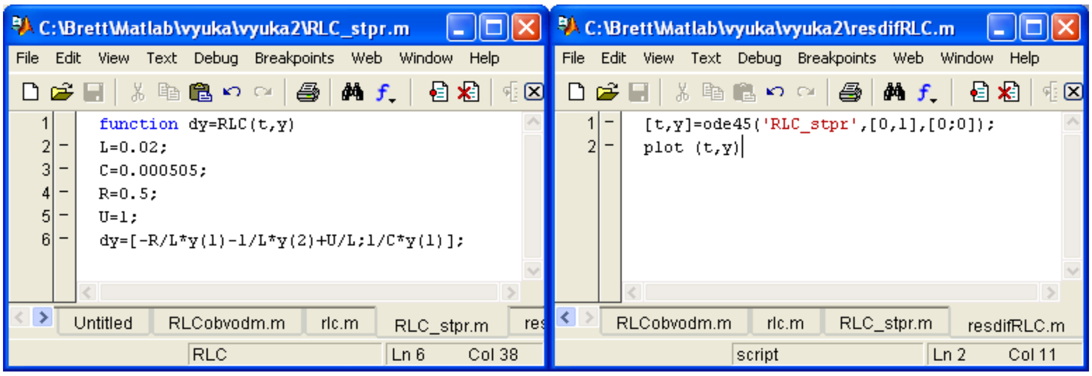
Většina těchto problému je vhodná pro řešení technických problému v technice . Ještě si uvedeme příklad řešení soustavy diferenciálních rovnic pro sériový RLC obvod. Rovnice pro sériový RLC obvod vypadá následovně:

$$u(t) = R \cdot i(t) + Li'(t) + u_C(t)$$

$$i(t) = C \cdot u_C'(t)$$

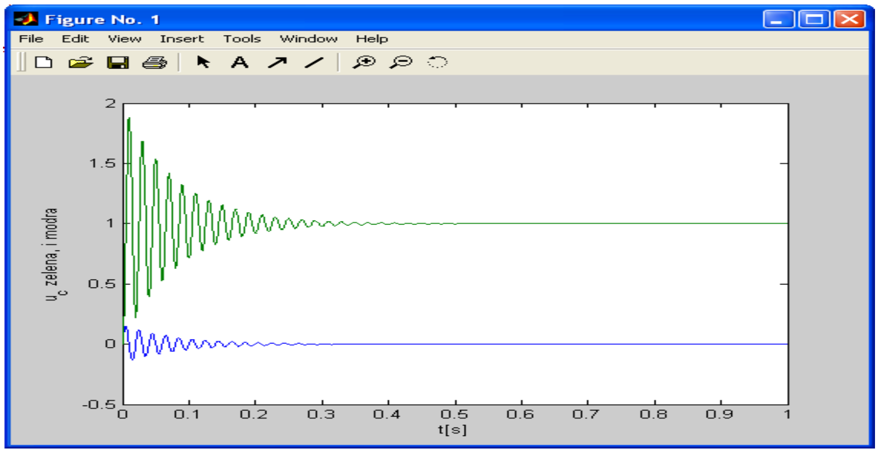
$$i(0) = 0 \quad u_C(0) = 0$$

Pro model v Matlabu si zvolíme: i=y1, u_C = y2. Po dosazení vypadá program v samotném Matlabu následovně:



obr.38 Ukázky syntaxe RLC obvodu v Matlabu

Výsledný průběh proudu a napětí vypadá takto:



obr.39 Výsledný průběh proudu

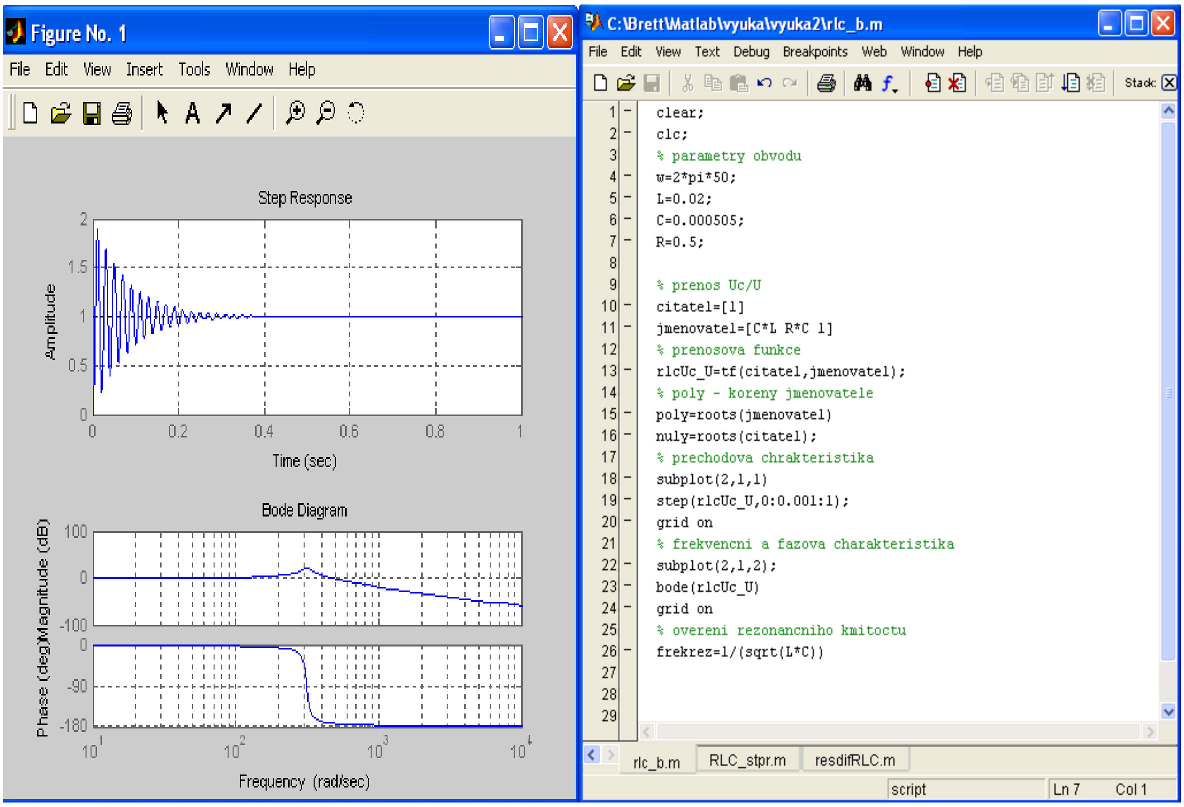
Další důležitým problémem v elektrotechnice je určení přenosové, frekvenční a fázové charakteristiky. Na to existují v Matlabu následující funkce:

- přenos = tf(polynom čitatele, polynom jmenovatele) - přenosová funkce
- koreny=roots(polynom) - nalezne kořeny zadaného polynomu
- step(přenos,odkud:krok:dokud) - Vykreslení přechodové charakteristiky
- přenosová funkce=zpk(nuly,póly,zesílení) - Zpětné určení přenosové funkce ze znalostí pólů, nul a zesílení.
- bode(přenosová funkce) - Frekvenční a fázové charakteristiky dané přenosové funkce

Ukázku těchto funkcí si ukážeme na předchozím příkladě. Nejprve je potřeba určit přenosovou funkci pomocí Laplaceovi transformace:

$$P(s) = \frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1}$$

Na následujícím obrázku je ukázán kód na ukázku výpočtu přechodových, frekvenčních a fázových charakteristik:



obr.40 Ukázky kódu a přechodových a frekvenčních charakteristik v Matlabu

<u>10. Simulink a možnosti jeho využití</u>

Vzhledem k tomu, že Matlab je program, do kterého se musí zadávat program řádkově, vytvořila se nadstavba Matlabu s názvem Simulink. Simulink funguje na principu spojování bloků, které jsou implementovány v knihovnách Simulinku, nebo, které si z těchto bloků vytvořím. Jelikož je určen hlavně pro technické výpočty, většina simulací, které zde vytvoříme, je závislá na čase. Další věcí je, že je nutné znát přesný popis matematického popisu.

Řešení simulace znamená vyřešení numerického řešení soustavy nelineárních diferenciálních rovnic. Pro tyto účely je třeba před simulací zadat jakou metodu řešení určit, volbu kroku, počáteční čas simulace.

Při práci v Simulinku postupujeme následovně:

- Vytvoření matematického modelu
- Výběr bloku s implementovaných knihoven
- Pospojování vstupů a výstupů odpovídajících signálů
- Zadání parametrů bloků
- Vytvoření subsystémů

Každá simulace potřebuje vstupní a výstupní signály. Vstupní signály můžeme do simulace zadat několika způsoby. První způsob je použít knihovnu bloků generující základní typy signálů (knihovna Sources viz níže), zde jsou implementovány např. signály rampa, jednotkový skok, sinusovka… Další možností je implementace signálu z připraveného souboru, např. data, která jsme někde naměřily, nebo od někoho dostaly. Třetí možnost je z matic, které jsme si předtím připravily v Matlabu, např. nějaké výsledky, které nemůžeme řešit v Simulinku. A poslední způsob je z měření v reálném čase, kde potřebujeme měřící kartu a real time Tbx. SW na zpracování signálů (tento způsob samozřejmě používáme v případě, že máme měřící zařízení např. osciloskop, atd.)

Výstupní signály ze simulace můžeme získat také několika způsoby. První způsob je použít knihovnu bloků výstupních signálů (Sinks viz níže). Zde jsou implementovány např. graf X(t), graf XY, atd. Další možností je ukládání do prostoru Matlabu např. do Workspace. Toto je výhodné když dále budeme pokračovat s výsledky v Matlabu. Poslední možností je přímá realizace signálů na externí zařízení.

Nastavení parametrů simulace

Před zahájením simulace musíme nastavit následující parametry. Do příslušného menu se dostaneme záložkou Simulation-Configuration parameters

- Solver
  - Čas simulace
  - Volbu metody řešení ODE
  - Volba velikosti kroku
- Workspace I/O
  - Možnost napojení na pracovní prostor Matlabu
- Diagnostic
  - Nastavení,které z kontrolovaných druhů chyb či událostí mají vyvolat hlášení a na jaké úrovni
- Advanced
  - Volby k optimalizaci výpočtu
- Spuštění simulace: Simulation-Start

Pro sestavování modelu je potřeba nalézt v knihovnách vhodné bloky. Seznam základních bloků je ukázán v následujícím seznamu:

- Základní knihovna – Simulink
  - Continuous
    - Bloky pro vytvoření spojitých dynamických modelů z diferenciálních rovnic
  - Discrete
    - Bloky pro vytvoření diskrétních dynamických modelů
  - Function and Tables
    - Nabízí např. interpolaci mezi hodnotami tabulkového zadávání průběhů
    - Přepočítá vstupní signál pomocí zadaného polynomu

– Math

  - Bloky pro realizaci algebraické části modelu

– Nonlinear

  - Bloky typických nelinearit (Saturace, Switch, Releová nelinearita)

– Signal and Systems

  - Bloky ke spojování a změně struktury signálů

– Sinks

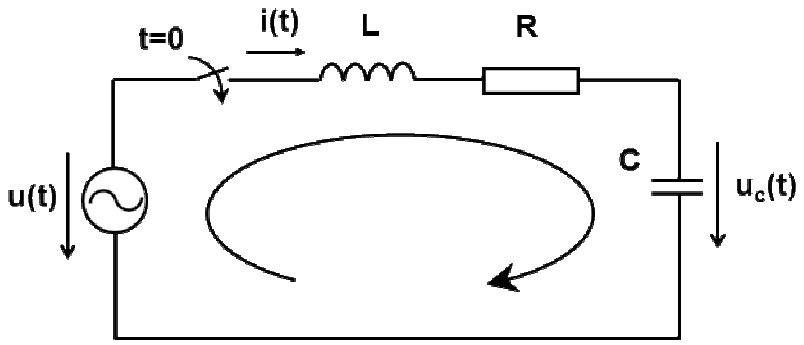
  - Bloky ke zpracování výsledků

– Sources

  - Bloky jako zdroje signálů

- Zbylé knihovny – souvisí s nainstalovanými toolboxy

Nyní si ukážeme vytvoření modelu v Simulinku pro sériový RLC obvod. Schéma tohoto obvodu je na následujícím obrázku:



obr.41 RLC sériový obvod a popis veličin

Pro tento obvod už známe obvodové rovnice s vytváření modelu v Matlabu

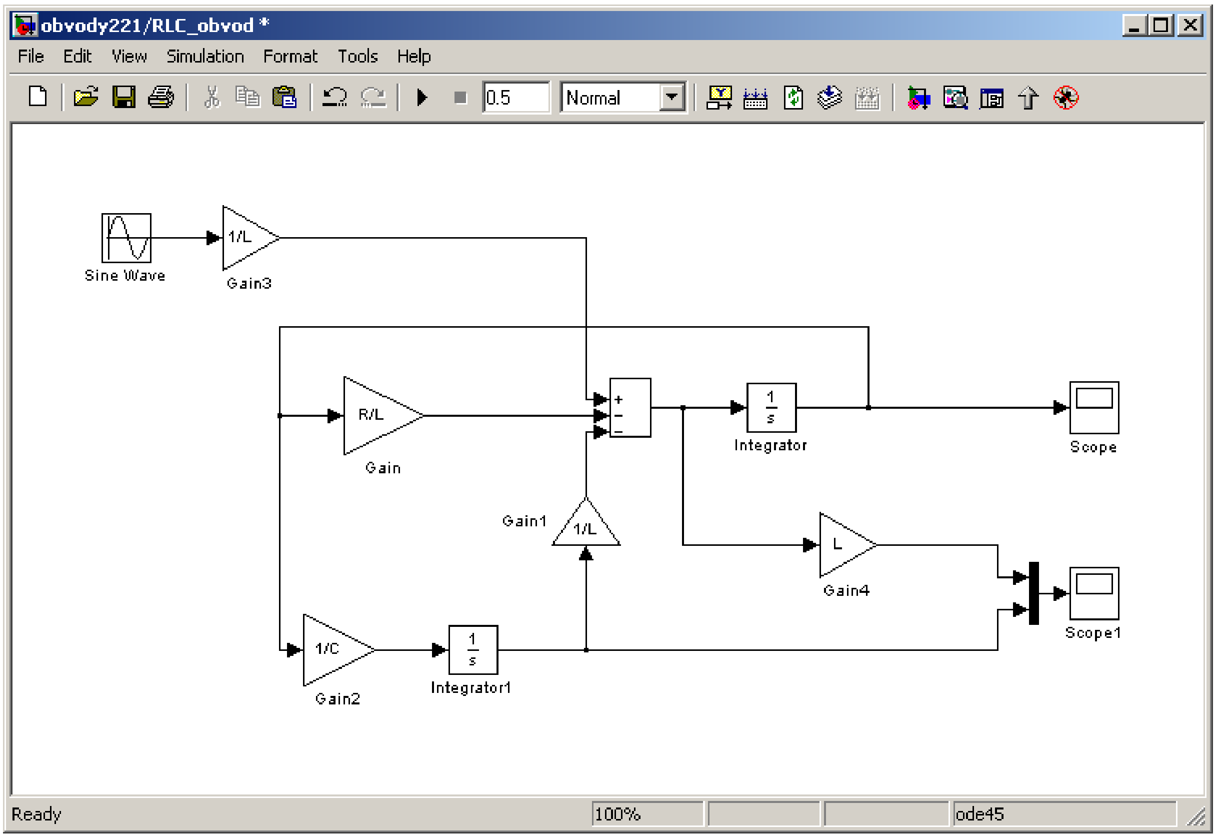
$$u(t)=R\cdot i(t)+L\cdot i'(t)+u_c(t) \qquad i(0)=0$$

$$i(t)=C\cdot u_c'(t) \qquad u_c(0)=0$$

Pro vytváření modelu v Simulinku je nejlepší si vyjádřit nejvyšší derivaci. V našem případě i'(t) a u_c'(t).

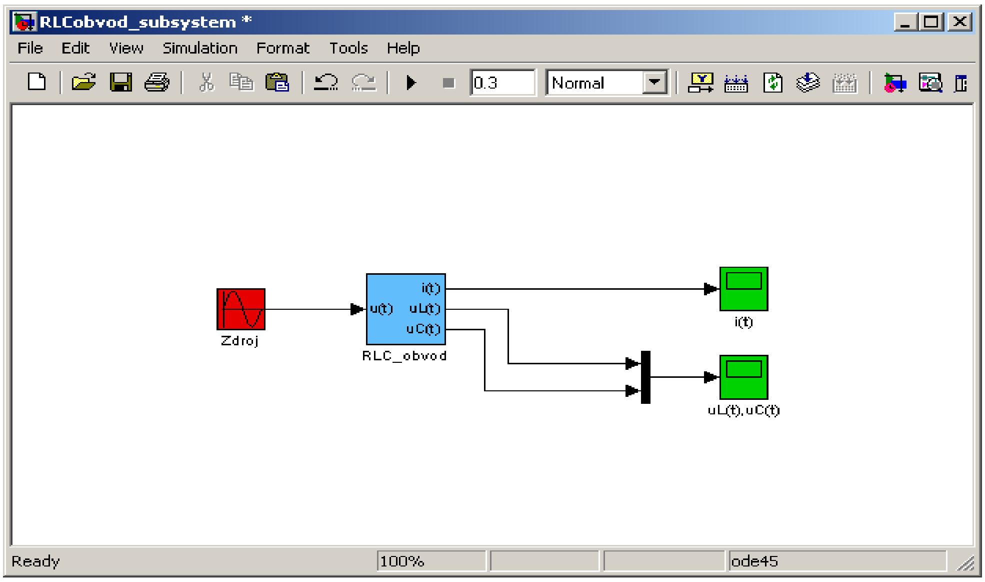
$$i'(t)=\frac{1}{L}\cdot u(t)-\frac{R}{L}\cdot i(t)-\frac{1}{L}\cdot u_c(t) \qquad u_c'(t)=\frac{1}{C}\cdot i(t)$$

Ty poté vyjádříme pomocí bloků a výsledek pošleme na blok integrátor. Výsledný model je vidět na následujícím obrázku:



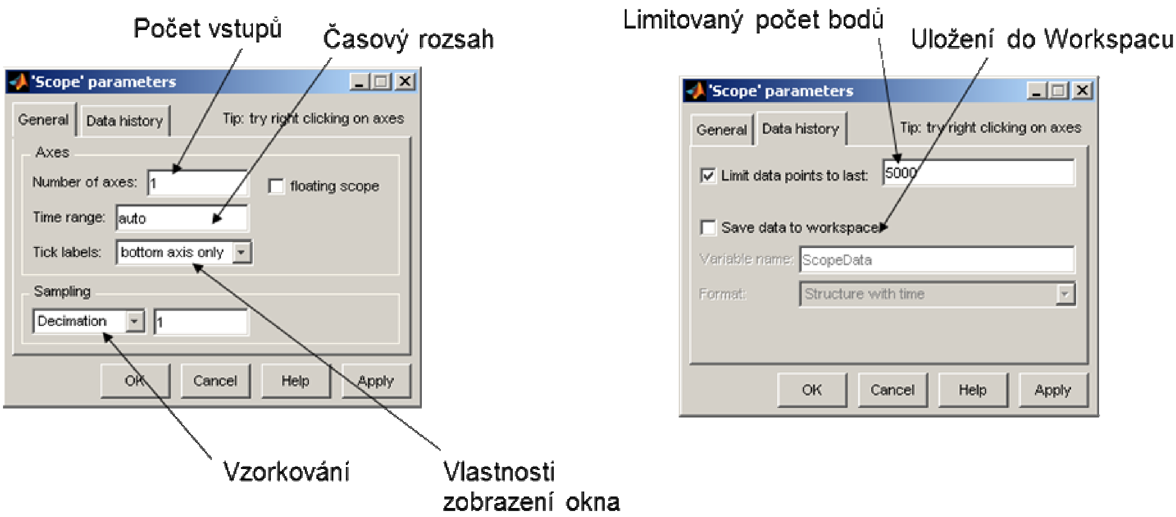
obr.42 Schéma RLC seriového obvodu v Simulinku

Pro přehlednost je možné v Simulinku vytvářet subsystémy. Ty v sobě mají původní bloky, ale my vidíme jen vstupy a výstupy příslušného subsystému. Subsystém vytvoříme označením části bloků, které chceme schovat do subsystému a poté v záložce edit-create subsystem. Ukázka modelu RLC v simulinku po použití subsystému je na následujícím obrázku:



obr.43 Schéma RLC seriového obvodu v Simulinku po použití subsystému

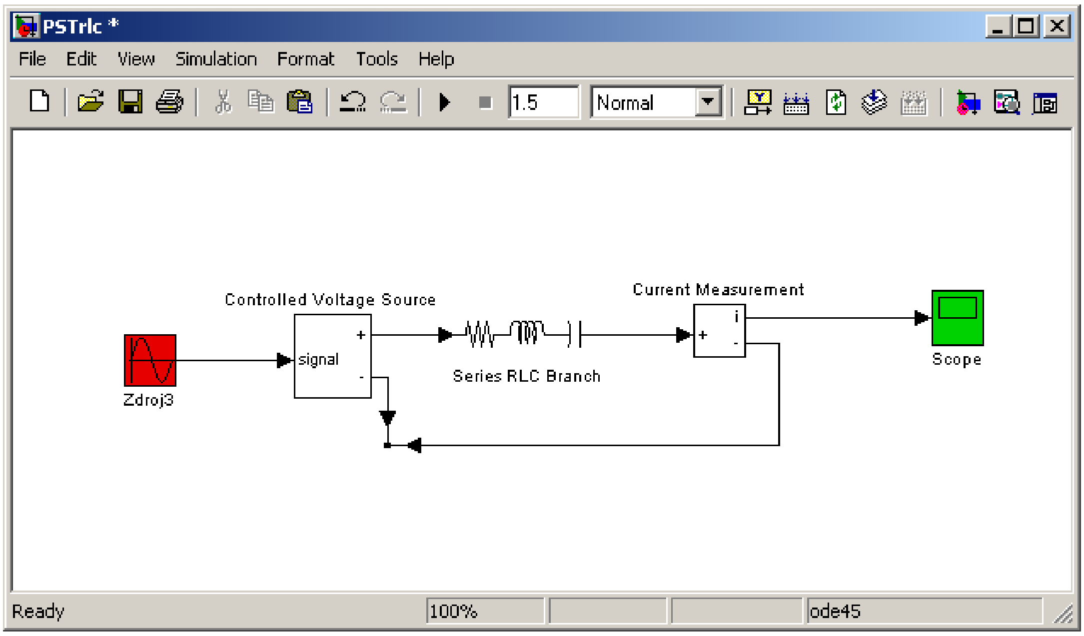
Dalším důležitým prvkem je scope. Pomocí scope můžeme zobrazovat průběhy signálů vypočítané pomocí simulace. Pokud dvakrát klikneme na značku scope můžeme měnit parametry scopu. Základními možnostmi jsou vzorkování, počet vstupů, časový rozsah atd. Základní ukázky jsou na následujícím obrázku:



obr.44 Popis oken na úpravu plotu v simulinku

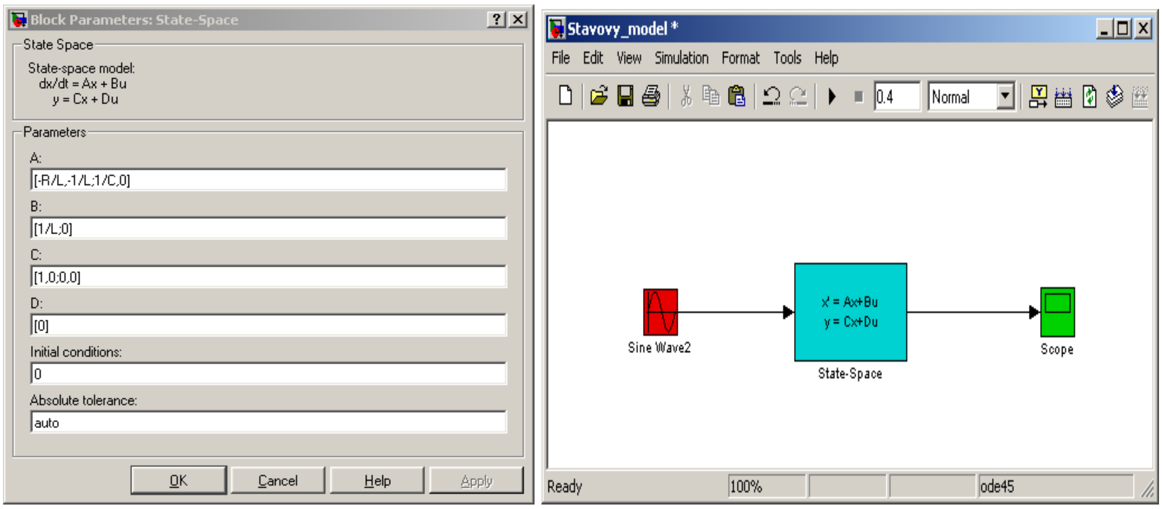
11. Model energetického modelu v Simulinku

Využitím knihovny SimPowerSystems můžeme výše vyobrazený RLC obvod namodelovat jak je uvdeno na obrázku 45:



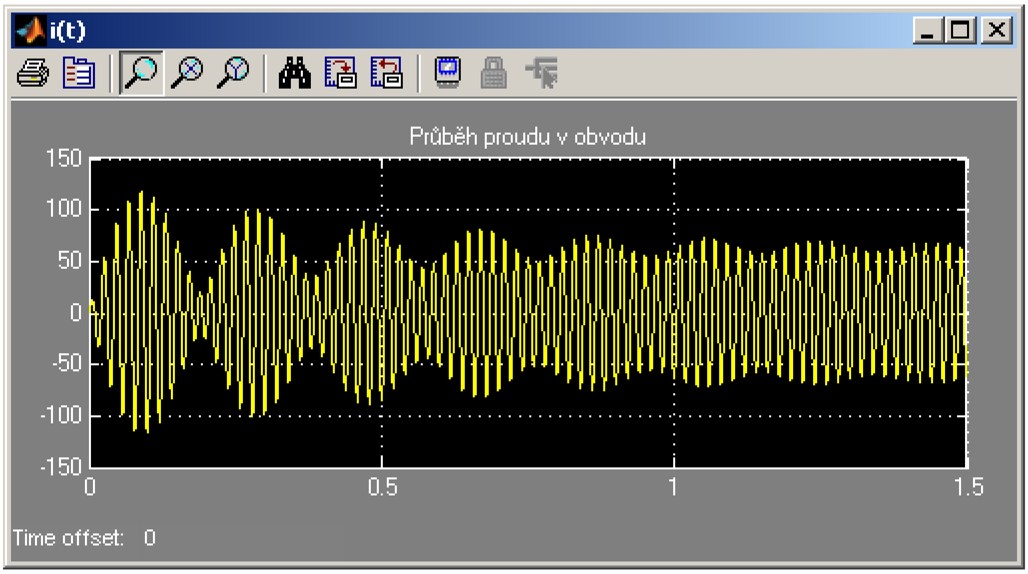
obr. 45: RLC obvod s využitím SimPowerSystems

Poté pro definici parametrů obvodu, které jsou na obrázku 46 nám vychází výsledné hodnoty průběhu proudu a průběhu napětí na C a L.

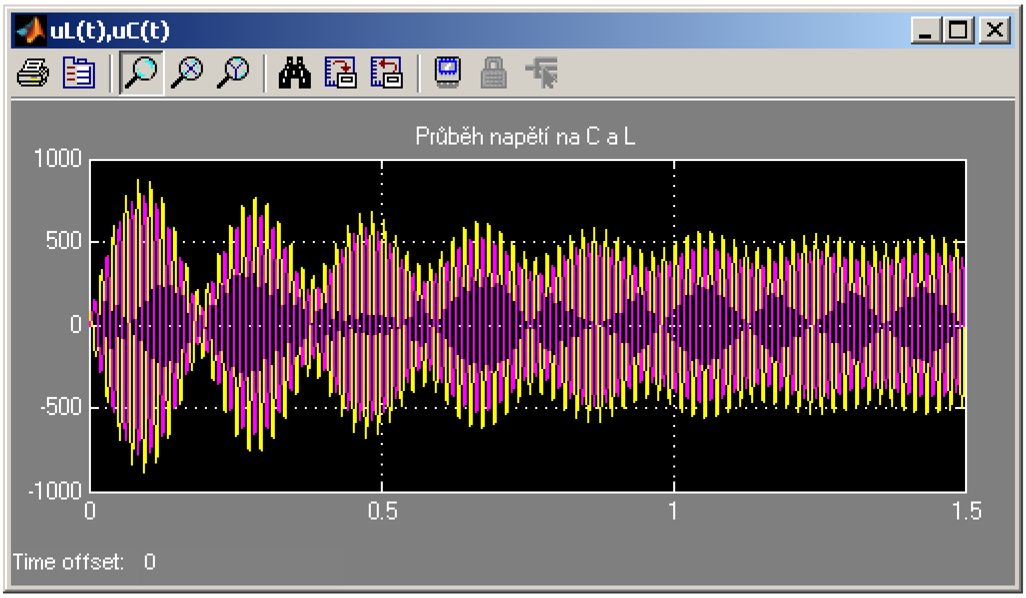


obr. 46: Definice parametrů a stavový model

Pro hodnoty: U_{max}=100V, ω=2*pi*50, R=0.1, L=0.025 H, C=5.05*10^{-4}F jsou výsledky veličin:



obr. 47: Výsledný průběh proudu



obr. 48: Výsledný průběh napětí na C a L