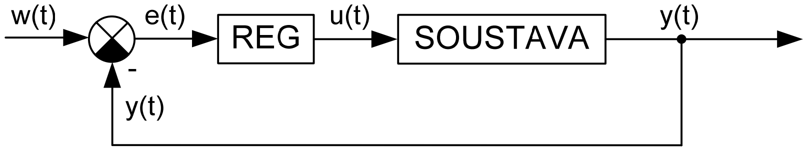
Opakovaní základů regulace



w(t)……….žádaná (řídicí) veličina

u(t)………..akční veličina

y(t)………..skutečná (regulovaná) veličina

e(t)………. regulační odchylka (rozdíl žádané a skutečné veličiny)

Popis systému

Popis lineárního systému (spojitého) s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou můžeme vyjádřit pomocí:

a) lineární diferenciální rovnice
b) operátorového přenosu v Laplaceově transformaci
c) impulsní charakteristiky
d) přechodové funkce a jejího grafického vyjádření (přechodová charakteristika)
e) frekvenčního přenosu a jeho grafického vyjádření (frekvenční charakteristika)

Popis systému lineární diferenciální rovnicí

Vztah mezi vstupem u(t) a výstupem y(t) lze popsat lineární diferenciální rovnicí:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + ... + b_0 u(t) \qquad (1)$$

kde a_i, b_i značí konstanty. S ohledem na fyzikální realizovatelnost musí platit, že stupeň nejvyšší derivace výstupní veličiny je vždy větší nebo roven stupni derivace vstupní veličiny $m \leq n$. Řád diferenciální rovnice určuje řád systému. Uvedenou rovnici můžeme při znalosti počátečních podmínek snadno řešit.

Rovnice (1) platí pro systémy s konečnou rychlostí šíření signálu. V případě konečné rychlosti šíření (dopravníky, aj.) se jedná o systémy s tzv. **dopravním zpožděním**, kdy systém reaguje na změny vstupu s určitým časovým zpožděním T_d. Systém s časovým zpožděním potom lze popsat rovnicí:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i . y^n(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j . u^j(t - T_d) \qquad (2)$$

K popisu reálných systémů lze přistoupit dvěma způsoby: Buď na základě fyzikálních zákonů sestavíme nelineární diferenciální rovnici, kterou poté linearizujeme (např. Taylorovým rozvojem), nebo sestavíme lineární rovnici s již linearizovanými jednotlivými členy (např. pomocí d´Alambertova principu).

Laplaceova transformace

Definice: Obrazem F(s) funkce času f(t) nebo také Laplaceovou transformací funkce f(t) rozumíme:

$$\underset{\operatorname{Re} s > c}{F(s)} = L\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t).e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t).e^{-st}dt \qquad (3)$$

Pro existenci tohoto obrazu musí být splněny níže uvedené požadavky na funkci f(t):

1. f(t) je jednoznačná a pro $t < 0$ je identicky rovna nule
2. f(t) je v každém konečném intervalu po úsecích hladká
3. f(t) je exponenciálního řádu, tj. existuje $c > 0$ pro které platí:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-ct}.f(t) < M \qquad (4)$$

kde M je konečná hladká konstanta. Potom integrál (3) existuje pro všechna s, pro která platí Re s > c. Funkce, které splňují tyto podmínky nazýváme Laplaceovy funkce. Je-li f(t) Laplaceovou funkcí, je transformace (3) **jednoznačná** a potom každé funkci f(t) přísluší **jediný obraz** F(s) a naopak.

K Laplaceově transformaci existuje i zpětná Laplaceova transformace definovaná integrálem:

$$f(t) = \frac{1}{2j.\pi}\oint_G F(s).e^{st}ds = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(s_i).e^{s_i t}\right] \qquad (5)$$

kde $s = s_i$ jsou póly funkce F(s) a $\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(s_i).e^{s_i t}\right]$ je reziduum pólu s_i. Integrace je provedena v komplexní rovině a integrační cesta je volná tak, aby obepínala všechny póly.

Jestliže funkce F(s) má jednoduché póly, potom platí:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{s_i t} \lim_{s\to s_i}(s - s_i)F(s_i) \qquad (6)$$

Pro usnadnění výpočtu obrazů často používaných funkcí, byly sestaveny příslušné dvojice (originál – obraz), tzv. slovníky operátorového počtu.

Tabulka č.1: *Základní operace Laplaceovy transformace*

Číslo	Matematická operace	Časová oblast	Operátorová oblast
1.	Definice Laplaceovy transformace	$f(t)$	$F(s)=\int_0^{\infty} f(t).e^{-st}dt$
2.	Zpětná Laplaceova transformace	$f(t)=\frac{1}{2j.\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}dt$	$F(s)$
3.	Násobení konstantou	$f(t) = c.f(t)$	$F(s) = c.F(s)$
4.	Změna měřítka	$f(t) = f(at)$	$F(s)=\frac{1}{a}\cdot F(\frac{s}{a})$
5.	Posunutí funkce	$f_1(t) = f_1(t - T_d)$	$F_1(t) = e^{-sT_d}.F(s)$
6.	Derivace	$f^{(1)}(t)=\frac{df(t)}{dt}$	$F^{(1)}(s) = s.F(s) - f(+0)$
7.	Integrace	${}^1f(t)=\int_0^t f(u)du$	${}^1F(s)=\frac{1}{s}F(s)$

Tabulka č.2: *Základní operátorový slovník*

	Časová oblast	Operátorová oblast
1.	$f(t)$	$F(s)$
2.	$\delta(t)$	1
3.	$f(t) = 0,\ t < 0$ $f(t) = 1,\ t \geq 0$	$\frac{1}{s}$
4.	t	$\frac{1}{s^2}$
5.	t^K	$\frac{K!}{s^{K+1}}$
6.	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
7.	$t.e^{\pm at}$	$\frac{1}{(s \mp a)^2}$
8.	$t^K.e^{\pm at}$	$\frac{K!}{(s \mp a)^{K+1}}$
9.	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$

10.	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11.	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
12.	$\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi + s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
13.	$\cos(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{s\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
14.	$e^{-at}.\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$
15.	$e^{-at}.\cos(\omega t)$	$\dfrac{s+a}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$
16.	$e^{-at}.\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{\omega.\cos\varphi + (s+a).\sin\varphi}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$
17.	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
18.	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$

Operátorový přenos systému je roven poměru Laplaceova obrazu výstupu k Laplaceově obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách. Systém popsaný diferenciální rovnicí má potom přenos:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \qquad (7)$$

Opět musí být splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti, to znamená, že stupeň čitatele přenosu nemůže být větší než stupeň polynomu ve jmenovateli přenosu. Kořeny polynomu ve jmenovateli se nazývají **póly systému**. Kořeny polynomu v čitateli přenosu se nazývají **nuly systému**.

Záporně vzaté převrácené hodnoty reálných pólů a nul jsou časové konstanty systému. Označují se τ respektive T.

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i};\ T_j = -\frac{1}{n_j} \qquad \text{kde } p_i,\ n_j \text{ jsou reálné} \qquad (8)$$

Jsou-li všechny nuly a póly systému reálné, můžeme přenos systému vyjádřit pomocí časových konstant ve tvaru:

$$G(s) = \frac{a_0}{b_0}\cdot\frac{(1+sT_1)\cdot(1+sT_2)\cdot\dots\cdot(1+sT_m)}{(1+s\tau_1)\cdot(1+s\tau_2)\cdot\dots\cdot(1+s\tau_n)} \qquad (9)$$

kde $\frac{a_0}{b_0}$ je zesílení systému.

Impulsní charakteristika

Impulsní charakteristika g(t) je **odezva systému na Diracův impuls** při nulových počátečních podmínkách. Diracův impuls je idealizovaná funkce, kterou můžeme vyjádřit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,dt = 1;\ \delta(t) = 0 \text{ pro každé } t,\ t \neq 0 \tag{10}$$

Laplaceův obraz Diracova impulsu je 1, a proto Laplaceův obraz impulsové charakteristiky je přímo roven přenosu systému:

$$L\{g(t)\} = G(s)\,, L\{\delta(t)\} = 1 \tag{11}$$

Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika je definovaná jako grafické vyjádření přechodové funkce. Přechodová funkce h(t) je rovna **odezvě na jednotkový skok** při nulových počátečních podmínkách. Jednotkový skok funkce je definován:

$$\mathbf{1}(t) = \left\langle \begin{matrix} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{matrix} \right. \tag{12}$$

Protože $L\{\mathbf{1}(t)\} = \frac{1}{s}$, můžeme napsat obraz přechodové funkce jako:

$$L\{h(t)\} = H(s) = \frac{1}{s}G(s) \tag{13}$$

Přechodová i impulsní charakteristika spolu velmi těsně souvisí. Impulsová charakteristika je podle předcházejících vztahů rovna derivaci přechodové charakteristiky:

$$g(t) = \frac{d\,h(t)}{dt};\quad h(t) = \int_0^t g(t)dt \tag{14}$$

Frekvenční charakteristika

Frekvenční přenos G(jω) systému je podíl Fourierova obrazu výstupu systému a Fourierova obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \tag{15}$$

Aby funkce měla Fourierův obraz, musí být absolutně integrovatelná. Frekvenční přenos systému získáme z přenosu v Laplaceově transformaci formální změnou p za jω:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \ldots.. + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \ldots.. + a_1(j\omega) + a_0} \tag{16}$$

Frekvenční charakteristiku lze také získat Fourierovou transformací impulsové charakteristiky:

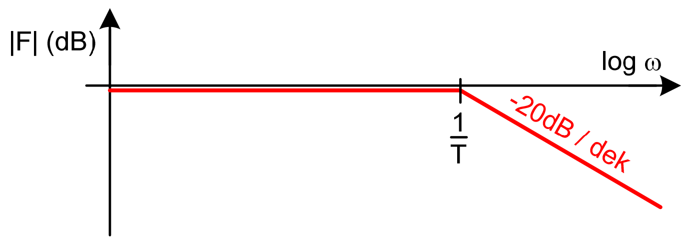
$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t)\cdot e^{j\omega t}dt \tag{17}$$

Frekvenční charakteristiku můžeme zobrazit v komplexní rovině o souřadnicích reálné a imaginární části frekvenčního přenosu G(jω). Frekvenční charakteristika je křivka v komplexní rovině, jejíž parametrem je kruhová frekvence ω.

Frekvenční charakteristiku můžeme také zobrazit v logaritmických souřadnicích.

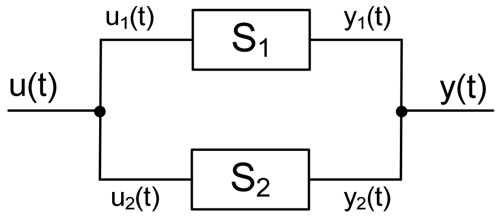
$$\log G(j\omega) = \log|G(j\omega)| + j\varphi(\omega) \tag{18}$$

Tato frekvenční charakteristika má dvě části: 1) amplitudovou (vynášená na svislou stupnici v decibelech) představující závislost $20 \cdot \log|G(j\omega)|$ na frekvenci (vynášenou na vodorovnou stupnici v logaritmických souřadnicích); 2) fázovou $\varphi = f(\omega)$. Důvodem zavedení logaritmických frekvenčních charakteristik je zjednodušení výpočtů charakteristik složených systémů, kde kromě výhodného rozložení frekvencí na logaritmických stupnici je násobení převedeno na sčítání příslušných logaritmů.



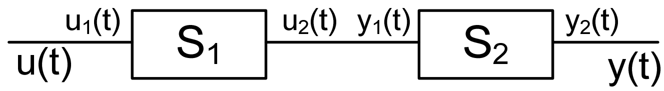
Spojování systémů

Paralelní zapojení



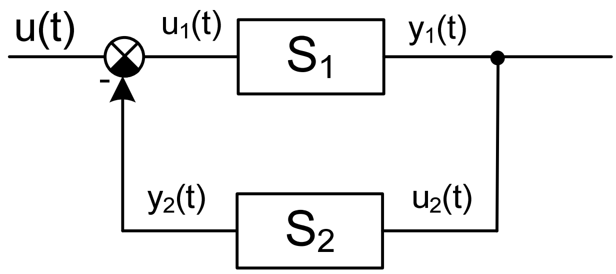
přenos: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ (19)

Sériové zapojení



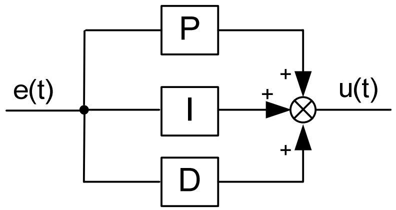
přenos: $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$ (20)

Zpětnovazební zapojení



přenos: $$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$ (21)

Regulátory



	P - regulátor	I - regulátor	D - regulátor	PI - regulátor	PID - regulátor
Diferenciální rovnice	$u(t) = k_p.e(t)$	$u(t) = k_i.\int_0^t e(\tau)\,d\tau$	$u(t) = k_d.\frac{de(t)}{dt}$	$u(t) = k_p.e(t) + k_i.\int_0^t e(\tau)\,d\tau$	$u(t) = k_p.e(t) + k_i.\int_0^t e(\tau)\,d\tau + k_d.\frac{de(t)}{dt}$
Přenos	$G(s) = k_p$	$G(s) = \frac{k_i}{s} = \frac{1}{T_i.s}$	$G(s) = s.k_d$	$G(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$	$G(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + s.k_d$
Přechodová charakteristika h (t)