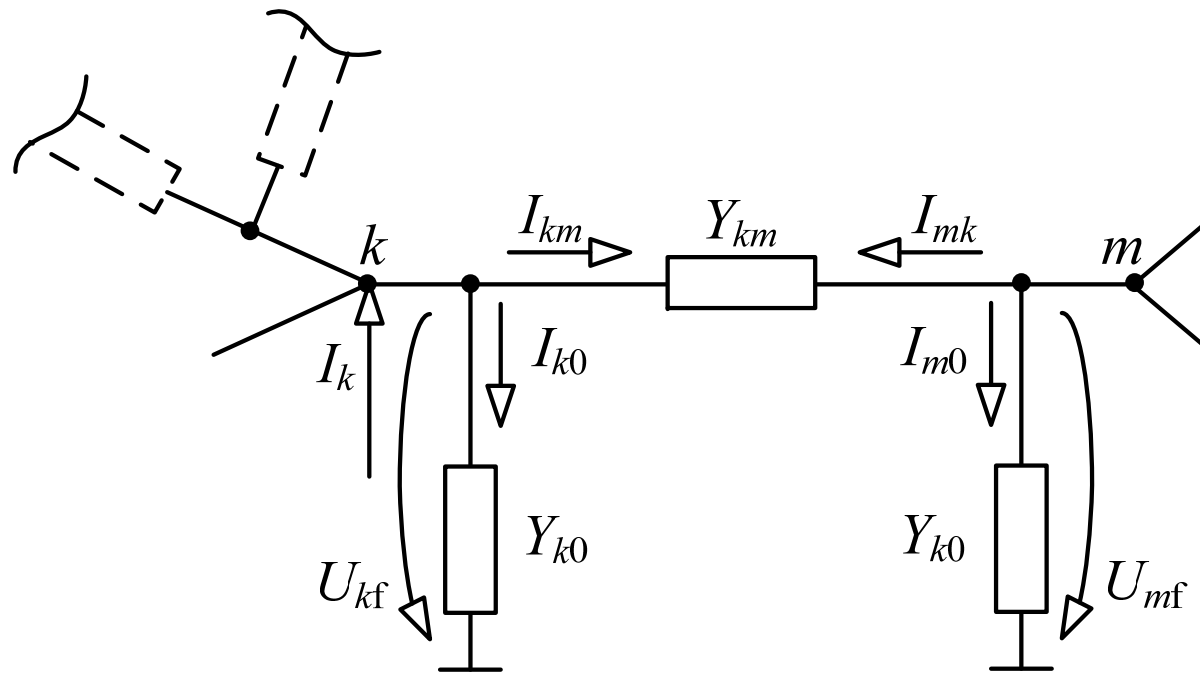


# USTÁLENÉ CHODY V UZLOVÝCH SÍTÍCH

## Metoda uzlových napětí

Část sítě s uvažovaným uzlem  $k$  a s uzlem  $m$  bezprostředně sousedícím



$$\hat{I}_k - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{I}_{km} - \hat{I}_{k0} = 0$$

Pro proudy platí

$$\hat{I}_{km} = (\hat{U}_{fk} - \hat{U}_{fm}) \hat{Y}_{km}$$

$$\hat{I}_{k0} = \hat{U}_{fk} \hat{Y}_{k0}$$

$$\hat{I}_k = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\hat{U}_{fk} - \hat{U}_{fm}) \hat{Y}_{km} + \hat{U}_{fk} \hat{Y}_{k0}$$

$$\hat{I}_k = \hat{U}_{fk} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{Y}_{km} + \hat{Y}_{k0} \right) - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{km}$$

Zavedeme vlastní uzlovou admitanci (diagonální prvek adm. matice)

$$\hat{Y}_{(k,k)} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{Y}_{km} + \hat{Y}_{k0} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^n \hat{Y}_{km}$$

Vzájemná uzlová admitance (mimodiagonální prvek adm. matice)

$$\hat{Y}_{(k,m)} = -\hat{Y}_{km}$$

Potom platí pro  $k$ -tý proud

$$\hat{I}_k = \hat{U}_{fk} \hat{Y}_{(k,k)} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{km} = \hat{U}_{fk} \hat{Y}_{(k,k)} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{(k,m)}$$

$$\hat{I}_k = \sum_{m=1}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{(k,m)}$$

Maticový zápis pak poskytuje

$$\begin{pmatrix} \hat{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_f \end{pmatrix} \quad \sqrt{3} \begin{pmatrix} \hat{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U} \end{pmatrix}$$

Admitanční matice regulární (existuje minimálně 1 nenulový prvek  $\hat{Y}_{k0}$ )

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I} \end{pmatrix}$$

Admitanční matice singulární – zadáno napětí v uzlech x (1 ÷ n-1)

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{I}}_x \\ \hat{\mathbf{I}}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_A & \hat{\mathbf{Y}}_B \\ \hat{\mathbf{Y}}_B^T & \hat{\mathbf{Y}}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}_{fx} \\ \hat{\mathbf{U}}_{fy} \end{pmatrix}$$

Odtud

$$\hat{\mathbf{I}}_x = \hat{\mathbf{Y}}_A \hat{\mathbf{U}}_{fx} + \hat{\mathbf{Y}}_B \hat{\mathbf{U}}_{fy}$$

$$\hat{\mathbf{I}}_y = \hat{\mathbf{Y}}_B^T \hat{\mathbf{U}}_{fx} + \hat{\mathbf{Y}}_D \hat{\mathbf{U}}_{fy}$$

Vypočteme  $\hat{\mathbf{I}}_x$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_{fy}$

$$\hat{\mathbf{U}}_{fy} = \hat{\mathbf{Y}}_D^{-1} \hat{\mathbf{I}}_y - \hat{\mathbf{Y}}_D^{-1} \hat{\mathbf{Y}}_B^T \hat{\mathbf{U}}_{fx}$$

## Gauss-Seidelova metoda

- iterativní metoda pro nelineární rovnice
- ne vždy dobrá konvergence

### Základní úvaha

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} 0$$

Přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Je-li  $\mathbf{x}^{(k)}$  odhad v  $k$ -tém kroku, pak další iterace

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Takto pokračujeme, až je rozdíl následných iterací menší než stanovená přesnost  $\varepsilon$

$$\left| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right| \leq \varepsilon$$

Někdy lze konvergenci zlepšit tzv. akceleračním faktorem  $\alpha$  ( $\alpha < 1$  nebo  $\alpha > 1$ )

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \left( \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{x}^{(k)} \right)$$

### System n rovnic o n neznámých

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_n$$

Z každé rovnice vyjádříme jednu neznámou

$$x_1 = c_1 + g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_2 = c_2 + g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.....

$$x_n = c_n + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Gauss: k-tá iterace z (k-1). aproximace

$$x_m^{(k)} = c_m + g_m(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_{m-1}^{(k-1)}, x_m^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})$$

Gauss-Seidel: pro výpočet k-té iterace se využijí i k-té aproximace z předchozích rovnic

$$x_m^{(k)} = c_m + g_m(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{m-1}^{(k)}, x_m^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})$$

Testování konvergence pro každou proměnnou zvlášť.

## Newton-Raphsonova metoda

- nejrozšířenější metoda pro nelineární rovnice
- využívá Taylorův polynom
- převádí řešení nelineárních rovnic na řešení lineárních, postupné zpřesňování odhadu

### Základní úvaha

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$$

Je-li  $\mathbf{x}^{(0)}$  počáteční odhad a  $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$  odchylka od správného řešení, pak

$$f(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{c}$$

Rozvojem do Taylorovy řady dostaneme

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) + \left(\frac{df}{d\mathbf{x}}\right)^{(0)} \Delta\mathbf{x}^{(0)} + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{d\mathbf{x}^2}\right)^{(0)} (\Delta\mathbf{x}^{(0)})^2 + \dots = \mathbf{c}$$



Zanedbáním vyšších řádů (linearizace)

$$\Delta \mathbf{c}^{(0)} \approx \left( \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right)^{(0)} \Delta \mathbf{x}^{(0)}$$

kde

$$\Delta \mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{c} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$$

je tzv. defekt.

Přičtením  $\Delta \mathbf{x}^{(0)}$  k počátečnímu odhadu získáme druhou aproximaci

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \frac{\Delta \mathbf{c}^{(0)}}{\left( \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right)^{(0)}}$$

(pozn: nelze pro nulovou derivaci)

Stejnými vztahy v dalších krocích získáme algoritmus metody:

$$\Delta \mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{c} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \frac{\Delta \mathbf{c}^{(k)}}{\left( \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right)^{(k)}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\Delta \mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k+1)})$$

## System n rovnic o n neznámých

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_n$$

Rozvojem do Taylorových řad dostaneme

$$(f_1)^{(0)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^{(0)} \Delta x_1^{(0)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^{(0)} \Delta x_2^{(0)} + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^{(0)} \Delta x_n^{(0)} = c_1$$

$$(f_2)^{(0)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^{(0)} \Delta x_1^{(0)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^{(0)} \Delta x_2^{(0)} + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)^{(0)} \Delta x_n^{(0)} = c_2$$

.....

$$(\mathbf{f}_n)^{(0)} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(0)} \Delta \mathbf{x}_1^{(0)} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(0)} \Delta \mathbf{x}_2^{(0)} + \dots + \left( \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(0)} \Delta \mathbf{x}_n^{(0)} = \mathbf{c}_n$$

V maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 - (\mathbf{f}_1^{(0)}) \\ \mathbf{c}_1 - (\mathbf{f}_2^{(0)}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n - (\mathbf{f}_n^{(0)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(0)} & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(0)} & \dots & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(0)} \\ \left( \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(0)} & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(0)} & \dots & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left( \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(0)} & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(0)} & \dots & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_1^{(0)} \\ \Delta \mathbf{x}_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

zkráceně

$$(\Delta \mathbf{C}^{(0)}) = (\mathbf{J}^{(0)}) \cdot (\Delta \mathbf{X}^{(0)})$$

Potom

$$\left(\Delta X^{(0)}\right) = \left(J^{(0)}\right)^{-1} \cdot \left(\Delta C^{(0)}\right)$$

Algoritmus metody tedy je:

$$\left(\Delta C^{(k)}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 - (\mathbf{f}_1^{(k)}) \\ \mathbf{c}_1 - (\mathbf{f}_2^{(k)}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n - (\mathbf{f}_n^{(k)}) \end{pmatrix}$$

$$\left(\Delta X^{(k)}\right) = \left(J^{(k)}\right)^{-1} \cdot \left(\Delta C^{(k)}\right)$$

$$\left(X^{(k+1)}\right) = \left(X^{(k)}\right) + \left(\Delta X^{(k)}\right)$$

$$\left( \Delta \mathbf{C}^{(k+1)} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 - (\mathbf{f}_1^{(k+1)}) \\ \mathbf{c}_1 - (\mathbf{f}_2^{(k+1)}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n - (\mathbf{f}_n^{(k+1)}) \end{pmatrix} \quad \text{kde} \quad \left( \Delta \mathbf{X}^{(k)} \right) = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_1^{(k)} \\ \Delta \mathbf{x}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\left( \mathbf{J}^{(k)} \right) = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(k)} & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(k)} & \dots & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(k)} \\ \left( \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(k)} & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(k)} & \dots & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left( \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(k)} & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(k)} & \dots & \left( \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(k)} \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{J}^{(k)})$  – Jakobiho matice, předpoklad regulárnosti

## Řešení výkonových toků (Load Flow)

System U-I rovnic lze rozšířit na závislost mezi napětím a výkonem

$$\hat{I}_k = \sum_{m=1}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{(k,m)}$$

$$\hat{S}_k = 3\hat{S}_{fk} = 3\hat{U}_{fk} \hat{I}_k^* = 3\hat{U}_{fk} \sum_{m=1}^n \hat{U}_{fm}^* \hat{Y}_{(k,m)}^*$$

$$\hat{S}_k = \hat{U}_k \sum_{m=1}^n \hat{U}_m^* \hat{Y}_{(k,m)}$$

$$\left(\hat{S}\right) = \left(\hat{U}_{\text{diag}}\right) \left(\hat{Y}^*\right) \left(\hat{U}^*\right)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \dots \\ \hat{S}_k \\ \dots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{U}_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{U}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{Y}_{(1,1)}^* & \dots & \dots & \dots & \hat{Y}_{(1,n)}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{Y}_{(k,1)}^* & \dots & \hat{Y}_{(k,k)}^* & \dots & \hat{Y}_{(k,n)}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{Y}_{(n,1)}^* & \dots & \dots & \dots & \hat{Y}_{(n,n)}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{U}_1^* \\ \dots \\ \hat{U}_k^* \\ \dots \\ \hat{U}_n^* \end{pmatrix}$$

- zadané výkony  $\rightarrow$  nelinearita

Cíl: určení  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\delta$  v uzlech a větvích

Pozn.: Předpoklad symetrického systému i jeho zatížení  $\rightarrow$  jednofázové modely.



## Jednotlivé typy uzlů

Výkon v uzlu		Složky fázoru napětí v uzlu	
zadán	má se určit	zadán	má se určit
–	$P, Q$	$U, \delta$	–
$P, Q$	–	–	$U, \delta$
$P$	$Q$	$U$	$\delta$
$Q$	$P$	$\delta$	$U$

slack – „bilanční uzel“ (swing bus), dorovná  $P, Q$  pro ztráty a celkovou výkonovou bilanci, jako mohutná soustava, velký zdroj

PQ – zátěže

PU – generátory, regulované napětí

Veličiny

- pevné – požadavky ( $P, Q$  u zátěží;  $P$  u generátorů)
- stavové – nezávisle proměnné ( $U, \delta$  u zátěží;  $\delta$  u generátorů)
- řídicí – zde neměnné ( $U$  u slacku a generátorů), mění se při optimalizacích

## Výpočty v poměrných hodnotách

### Pojmenované hodnoty

$$\hat{S} = 3\hat{U}_f\hat{I}^* = \sqrt{3}\hat{U}\hat{I}^* \quad \hat{U}_f = \hat{Z}\hat{I} \quad \hat{U} = \sqrt{3}\hat{Z}\hat{I}$$

### Vztažné hodnoty

$$\hat{S}_v = \sqrt{3}\hat{U}_v\hat{I}_v^*$$
$$\hat{Z}_v = \frac{\hat{U}_v}{\sqrt{3}\hat{I}_v} = \frac{\hat{U}_v}{\sqrt{3}\left(\frac{\hat{S}_v}{\sqrt{3}\hat{U}_v}\right)^*} = \frac{U_v^2}{\hat{S}_v^*}$$

### Poměrné hodnoty

$$\hat{s} \cdot S_v = \sqrt{3} \cdot \hat{u} \cdot U_v \cdot \hat{i}^* \cdot I_v^*$$

$$\underline{\hat{s} = \hat{u} \cdot \hat{i}^*}$$

$$\hat{u} \cdot U_v = \sqrt{3} \cdot \hat{z} \cdot Z_v \cdot \hat{i} \cdot I_v$$

$$\underline{\hat{u} = \hat{z} \cdot \hat{i}}$$

## Uzlový proud

$$\hat{I}_k = \hat{U}_{fk} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{Y}_{km} + \hat{Y}_{k0} \right) - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{km}$$

$$\hat{i}_i = \hat{u}_i \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j$$

## Uzlový výkon

$$p_i + jq_i = \hat{u}_i \cdot \hat{i}_i^* \qquad \hat{i}_i = \frac{p_i - jq_i}{\hat{u}_i^*}$$

tedy

$$\frac{p_i - jq_i}{\hat{u}_i^*} = \hat{u}_i \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j$$

## Gauss-Seidel Power Flow Solution

Řešení pro U,  $\delta$ :

$$\hat{u}_i^{(k+1)} = \frac{\frac{p_i - jq_i}{\hat{u}_i^{*(k)}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j^{(k)}}{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij}}$$

(pozn. pro zátěže P, Q < 0)

Řešení pro P:

$$p_i^{(k+1)} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{u}_i^{*(k)} \left[ \hat{u}_i^{(k)} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j^{(k)} \right] \right\}$$

Řešení pro Q:

$$q_i^{(k+1)} = -\text{Im} \left\{ \hat{u}_i^{*(k)} \left[ \hat{u}_i^{(k)} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j^{(k)} \right] \right\}$$

Pro prvky admitanční matice

$$\hat{y}_{(i,i)} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \quad \hat{y}_{(i,j)} = -\hat{y}_{ij}$$

PQ: U,  $\delta$  slack známé  $\rightarrow 2(n-1)$  neznámých

$$\hat{u}_i^{(k+1)} = f(p_i, q_i, \hat{u}_j^{(k)})$$

PU:  $q_i^{(k+1)} = f(\hat{u}_i^{(k)}, \hat{u}_j^{(k)})$

$$\hat{u}_i^{(k+1)} = f(p_i, q_i^{(k+1)}, \hat{u}_j^{(k)})$$

imaginární část necháme, reálnou dopočteme

$$\left(e_i^{(k+1)}\right)^2 + \left(f_i^{(k+1)}\right)^2 = |\hat{u}_i|^2$$

$$e_i^{(k+1)} = \sqrt{|\hat{u}_i|^2 - \left(f_i^{(k+1)}\right)^2}$$

## Newton-Raphson Power Flow Solution

$$\hat{S}_i = \hat{U}_i \sum_{j=1}^n \hat{U}_j^* \hat{Y}_{(i,j)}^* = U_i^2 \hat{Y}_{(i,i)}^* + \hat{U}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{U}_j^* \hat{Y}_{(i,j)}^*$$

$$\hat{S}_i = f_i(\hat{U})$$

### Vyjádření v exponenciálním tvaru

$$\hat{S}_i = P_i + jQ_i \quad \hat{U}_i = U_i e^{j\delta_i} \quad \hat{Y}_{(i,j)} = Y_{(i,j)} e^{j\theta_{(i,j)}}$$

$$\hat{S}_i = U_i e^{j\delta_i} \sum_{j=1}^n U_j Y_{(i,j)} e^{-j(\delta_j + \theta_{(i,j)})}$$

## Rozdělení výkonu na reálnou a imaginární část

$$P_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

→ 2 rovnice pro každý PQ uzel, 1 rovnice pro každý PU uzel

Pro změnu výkonu můžeme psát (linearizovaně)

$$\Delta \hat{S}_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \hat{S}_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \frac{\partial \hat{S}_i}{\partial U_j} \Delta U_j \right)$$

$$\Delta P_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \frac{\partial P_i}{\partial U_j} \Delta U_j \right)$$

$$\Delta Q_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} \Delta U_j \right)$$

## Úplný rozpis rovnic

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta P_n^{(k)} \\ \Delta Q_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta Q_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial U_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial U_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial \delta_n}{\partial \delta_n} & \frac{\partial U_2}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial U_n}{\partial U_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta \delta_n^{(k)} \\ \Delta U_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta U_n^{(k)} \end{pmatrix}$$



Rovnice v kompaktnější formě

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & \frac{\partial P}{\partial U} \\ \frac{\partial Q}{\partial \delta} & \frac{\partial Q}{\partial U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix}$$

$$(J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & \frac{\partial P}{\partial U} \\ \frac{\partial Q}{\partial \delta} & \frac{\partial Q}{\partial U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

Počty rovnic pro  $n$  uzlů,  $s$  slacků,  $m$  PU uzlů,  $p$  PQ uzlů ( $n = s + m + p$ ):  
 $\Delta P$  x  $(n-s)$ ,  $\Delta Q$  x  $(n-s-m)$

$$P_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \sin(-\delta_i + \delta_j + \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = U_i U_j Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}) \quad j \neq i$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_i} = 2U_i Y_{(i,i)} \cos(\theta_{(i,i)}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_j} = U_i Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}) \quad j \neq i$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = -U_i U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}) \quad j \neq i$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_i} = -2U_i Y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_j} = U_i Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}) \quad j \neq i$$

## Nástin iteračního řešení

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}_k$$

$$\text{defekt} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \vartheta \\ \Delta \mathbf{U} \end{pmatrix} = (\mathbf{J})^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \Delta \vartheta \\ \Delta \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

## Decoupled Power Flow Solution

Přenosové soustavy: vyšší poměr X/R vedení

Vazby  $\Delta P \sim \Delta \delta$ ,  $\Delta Q \sim \Delta U$  silnější než  $\Delta P \sim \Delta U$ ,  $\Delta Q \sim \Delta \delta$ .

Proto lze zjednodušit Jakobiho matici:

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Q}{\partial U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix}$$

Tzv. „Decoupled problem“ obvykle vyžaduje kratší čas výpočtu. Více iterací, ale rychlejší počítání s maticemi. (Počet operací k řešení soustavy lin. rovnic roste rychleji než lineárně.)

2 soustavy řešeny sekvenčně v každém kroku.

Konvergence přesná, jen změna Jakobiho matice, tj. iteračních kroků.

Přibližné řešení, až když zjednodušené vztahy pro P, Q.

Ideální vedení ( $R = 0, G = 0$ )

$$P_{ij} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij} \quad Q_{ij} = \frac{U_i^2}{X_{ij}} - \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \cos \delta_{ij} - U_i^2 \cdot \frac{B}{2}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \cos \delta_{ij} \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial U_i} = \frac{U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij} \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial U_j} = \frac{2U_i - U_j \cos \delta_{ij}}{X_{ij}}$$

Pro málo zatížená vedení ( $\delta_{ij} \rightarrow 0$ ) decoupling dost přesný.

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = 0$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial U_i} = 0 \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial U_i} = \frac{2U_i - U_j}{X_{ij}}$$

Další zjednodušení omezí počítání  $\mathbf{J}_1$  a  $\mathbf{J}_4$  každou iteraci.

### Fast Decoupled Power Flow Solution

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_i u_j y_{(i,j)} \sin(-\delta_i + \delta_j + \theta_{(i,j)})$$

$$q_i = \sum_{j=1}^n u_i u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j=1}^n u_i u_j y_{(i,j)} \sin(-\delta_i + \delta_j + \theta_{(i,j)}) - u_i^2 y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)})$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = q_i - u_i^2 y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) = q_i - u_i^2 B_{(i,i)}$$

$$B_{(i,i)} = y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) = \text{Im}\{y_{(i,i)}\}$$

Obvykle  $B_{(i,i)} \gg q_i$  a  $u_i^2 \approx u_i$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = -u_i B_{(i,i)}$$

---

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_j} = u_i u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

Obvykle  $\delta_i \approx \delta_j$ ,  $u_j \approx 1$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_j} = u_i y_{(i,j)} \sin(-\theta_{(i,j)})$$

$$B_{(i,j)} = y_{(i,j)} \sin(\theta_{(i,j)}) = \text{Im}\{y_{(i,j)}\}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_j} = -u_i B_{(i,j)}$$

---



$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -2u_i y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$q_i = \sum_{j=1}^n u_i u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -u_i y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) + \sum_{j=1}^n u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -u_i y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) + q_i$$

**Obvykle**  $B_{(i,i)} = y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) = \text{Im}\{y_{(i,i)}\} \gg q_i$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -u_i B_{(i,i)}$$


---

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = u_i y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

Obvykle  $\delta_i \approx \delta_j$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = u_i y_{(i,j)} \sin(-\theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = -u_i B_{(i,j)}$$


---

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta p}{u} \\ \frac{\Delta q}{u} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta u \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta u \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{B}'^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}''^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Delta p}{u} \\ \frac{\Delta q}{u} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}'$  a  $\mathbf{B}''$  jsou tedy imaginární části admitanční matice (v p.u.), jejich inverze se počítá jen jednou. (Pozn.: Dělení napětími prvek po prvku.)

## DC Power Flow

Poměrné hodnoty. Předpoklady:

$$u_i \approx u_j \approx 1$$

$$\sin \delta_{ij} \approx \delta_{ij}$$

$$b_{ij} = -\frac{1}{x_{ij}}$$

$$P_{ij} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij}$$

$$p_{ij} \cdot S_v = \frac{u_i \cdot U_v \cdot u_j \cdot U_v}{x_{ij} \cdot Z_v} \sin \delta_{ij}$$

$$p_{ij} = \frac{u_i \cdot u_j}{x_{ij}} \sin \delta_{ij} \Rightarrow p_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_{ij}} = \frac{\delta_i - \delta_j}{x_{ij}}$$

## Maticově

$$p_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\delta_i - \delta_j}{x_{ij}} = \delta_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_{ij}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\delta_j}{x_{ij}}$$

$$p_i = \delta_i b'_{(i,i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \delta_j b'_{(i,j)}$$

$$(p) = (b')(\delta)$$

Jen podélné reaktance  $\rightarrow$   $b'$  singulární. 1 uzel jako referenční s  $\delta = 0 \rightarrow$  matice  $b''$  o řád menší.

(DC model nepočítá ztráty, tedy netřeba slack, ale reference úhlu ano.)

$$(\delta) = (b'')^{-1}(p)$$

$$(u) = (g)^{-1}(i)$$