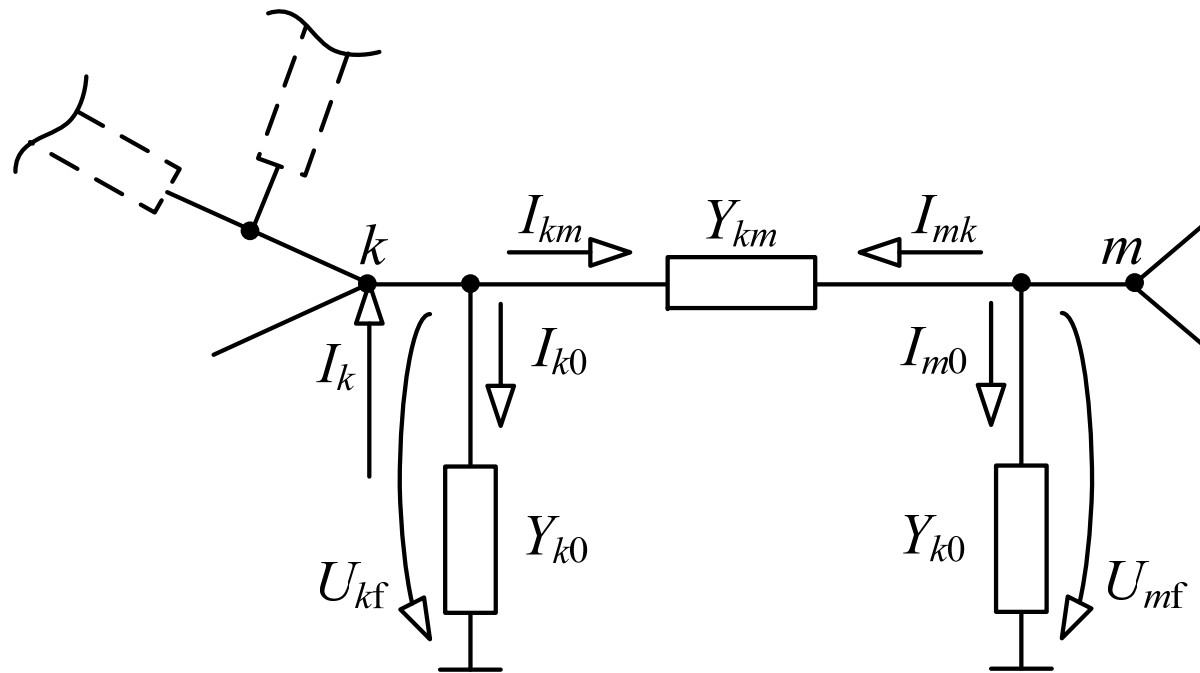


USTÁLENÉ CHODY V UZLOVÝCH SÍTÍCH

Metoda uzlových napětí

Část sítě s uvažovaným uzlem k a s uzlem m bezprostředně sousedícím



$$\hat{I}_k - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{I}_{km} - \hat{I}_{k0} = 0$$

Pro proudy platí

$$\hat{I}_{km} = (\hat{U}_{fk} - \hat{U}_{fm}) \hat{Y}_{km}$$

$$\hat{I}_{k0} = \hat{U}_{fk} \hat{Y}_{k0}$$

$$\hat{I}_k = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\hat{U}_{fk} - \hat{U}_{fm}) \hat{Y}_{km} + \hat{U}_{fk} \hat{Y}_{k0}$$

$$\hat{I}_k = \hat{U}_{fk} \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{Y}_{km} + \hat{Y}_{k0} \right) - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{km}$$

Zavedeme vlastní uzlovou admitanci (diagonální prvek adm. matice)

$$\hat{Y}_{(k,k)} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{Y}_{km} + \hat{Y}_{k0} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^n \hat{Y}_{km}$$

Vzájemná uzlová admitance (mimodiagonální prvek adm. matice)

$$\hat{Y}_{(k,m)} = -\hat{Y}_{km}$$

Potom platí pro k -tý proud

$$\hat{I}_k = \hat{U}_{fk} \hat{Y}_{(k,k)} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{km} = \hat{U}_{fk} \hat{Y}_{(k,k)} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{(k,m)}$$

$$\hat{I}_k = \sum_{m=1}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{(k,m)}$$

Maticový zápis pak poskytuje

$$\begin{pmatrix} \hat{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_f \end{pmatrix} \quad \sqrt{3} \begin{pmatrix} \hat{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U} \end{pmatrix}$$

Admitanční matice regulární (existuje minimálně 1 nenulový prvek \hat{Y}_{k0})

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I} \end{pmatrix}$$

Admitanční matice singulární – zadáno napětí v uzlech x (1 ÷ n-1)

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{I}}_x \\ \hat{\mathbf{I}}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_A & \hat{\mathbf{Y}}_B \\ \hat{\mathbf{Y}}_B^T & \hat{\mathbf{Y}}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}_{fx} \\ \hat{\mathbf{U}}_{fy} \end{pmatrix}$$

Odtud

$$\hat{\mathbf{I}}_x = \hat{\mathbf{Y}}_A \hat{\mathbf{U}}_{fx} + \hat{\mathbf{Y}}_B \hat{\mathbf{U}}_{fy}$$

$$\hat{\mathbf{I}}_y = \hat{\mathbf{Y}}_B^T \hat{\mathbf{U}}_{fx} + \hat{\mathbf{Y}}_D \hat{\mathbf{U}}_{fy}$$

Vypočteme $\hat{\mathbf{I}}_x$, $\hat{\mathbf{U}}_{fy}$

$$\hat{\mathbf{U}}_{fy} = \hat{\mathbf{Y}}_D^{-1} \hat{\mathbf{I}}_y - \hat{\mathbf{Y}}_D^{-1} \hat{\mathbf{Y}}_B^T \hat{\mathbf{U}}_{fx}$$

Gauss-Seidelova metoda

- iterativní metoda pro nelineární rovnice
- ne vždy dobrá konvergence

Základní úvaha

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} 0$$

Přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Je-li $\mathbf{x}^{(k)}$ odhad v k -tém kroku, pak další iterace

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Takto pokračujeme, až je rozdíl následných iterací menší než stanovená přesnost ε

$$\left| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right| \leq \varepsilon$$

Někdy lze konvergenci zlepšit tzv. akceleračním faktorem α ($\alpha < 1$ nebo $\alpha > 1$)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \left(\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{x}^{(k)} \right)$$

System n rovnic o n neznámých

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_n$$

Z každé rovnice vyjádříme jednu neznámou

$$x_1 = c_1 + g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_2 = c_2 + g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.....

$$x_n = c_n + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Gauss: k-tá iterace z (k-1). aproximace

$$x_m^{(k)} = c_m + g_m(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_{m-1}^{(k-1)}, x_m^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})$$

Gauss-Seidel: pro výpočet k-té iterace se využijí i k-té aproximace z předchozích rovnic

$$x_m^{(k)} = c_m + g_m(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{m-1}^{(k)}, x_m^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})$$

Testování konvergence pro každou proměnnou zvlášť.

Newton-Raphsonova metoda

- nejrozšířenější metoda pro nelineární rovnice
- využívá Taylorův polynom
- převádí řešení nelineárních rovnic na řešení lineárních, postupné zpřesňování odhadu

Základní úvaha

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$$

Je-li $\mathbf{x}^{(0)}$ počáteční odhad a $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$ odchylka od správného řešení, pak

$$f(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{c}$$

Taylorova řada

$$f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{df(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \right)^{(k)}}{k!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^k$$

Rozvojem do Taylorovy řady dostaneme

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) + \left(\frac{df}{d\mathbf{x}}\right)^{(0)} \Delta\mathbf{x}^{(0)} + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{d\mathbf{x}^2}\right)^{(0)} (\Delta\mathbf{x}^{(0)})^2 + \dots = \mathbf{c}$$

Zanedbáním vyšších řádů (linearizace)

$$\Delta\mathbf{c}^{(0)} \approx \left(\frac{df}{d\mathbf{x}}\right)^{(0)} \Delta\mathbf{x}^{(0)}$$

kde

$$\Delta\mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{c} - f(\mathbf{x}^{(0)})$$

je tzv. defekt.

Přičtením $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$ k počátečnímu odhadu získáme druhou aproximaci

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \frac{\Delta\mathbf{c}^{(0)}}{\left(\frac{df}{d\mathbf{x}}\right)^{(0)}}$$

(pozn: nelze pro nulovou derivaci)

Stejnými vztahy v dalších krocích získáme algoritmus metody:

$$\Delta \mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{c} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \frac{\Delta \mathbf{c}^{(k)}}{\left(\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right)^{(k)}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\Delta \mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k+1)})$$

System n rovnic o n neznámých

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_n$$

Rozvojem do Taylorových řad dostaneme

$$(f_1)^{(0)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^{(0)} \Delta x_1^{(0)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^{(0)} \Delta x_2^{(0)} + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^{(0)} \Delta x_n^{(0)} = c_1$$

$$(f_2)^{(0)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^{(0)} \Delta x_1^{(0)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^{(0)} \Delta x_2^{(0)} + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)^{(0)} \Delta x_n^{(0)} = c_2$$

.....

$$(\mathbf{f}_n)^{(0)} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(0)} \Delta \mathbf{x}_1^{(0)} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(0)} \Delta \mathbf{x}_2^{(0)} + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(0)} \Delta \mathbf{x}_n^{(0)} = \mathbf{c}_n$$

V maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 - (\mathbf{f}_1^{(0)}) \\ \mathbf{c}_2 - (\mathbf{f}_2^{(0)}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n - (\mathbf{f}_n^{(0)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(0)} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(0)} & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(0)} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(0)} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(0)} & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(0)} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(0)} & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_1^{(0)} \\ \Delta \mathbf{x}_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

zkráceně

$$(\Delta \mathbf{C}^{(0)}) = (\mathbf{J}^{(0)}) \cdot (\Delta \mathbf{X}^{(0)})$$

Potom

$$\left(\Delta X^{(0)}\right) = \left(J^{(0)}\right)^{-1} \cdot \left(\Delta C^{(0)}\right)$$

Algoritmus metody tedy je:

$$\left(\Delta C^{(k)}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 - (\mathbf{f}_1^{(k)}) \\ \mathbf{c}_2 - (\mathbf{f}_2^{(k)}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n - (\mathbf{f}_n^{(k)}) \end{pmatrix}$$

$$\left(\Delta X^{(k)}\right) = \left(J^{(k)}\right)^{-1} \cdot \left(\Delta C^{(k)}\right)$$

$$\left(X^{(k+1)}\right) = \left(X^{(k)}\right) + \left(\Delta X^{(k)}\right)$$

$$(\Delta \mathbf{C}^{(k+1)}) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 - (\mathbf{f}_1^{(k+1)}) \\ \mathbf{c}_2 - (\mathbf{f}_2^{(k+1)}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n - (\mathbf{f}_n^{(k+1)}) \end{pmatrix} \quad \text{kde} \quad (\Delta \mathbf{X}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_1^{(k)} \\ \Delta \mathbf{x}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{J}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(k)} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(k)} & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(k)} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(k)} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(k)} & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{(k)} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^{(k)} & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \right)^{(k)} \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{J}^{(k)})$ – Jakobiho matice, předpoklad regulárnosti

Řešení výkonových toků (Load Flow)

System U-I rovnic lze rozšířit na závislost mezi napětím a výkonem

$$\hat{I}_k = \sum_{m=1}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{(k,m)}$$

$$\hat{S}_k = 3\hat{S}_{fk} = 3\hat{U}_{fk} \hat{I}_k^* = 3\hat{U}_{fk} \sum_{m=1}^n \hat{U}_{fm}^* \hat{Y}_{(k,m)}^*$$

$$\hat{S}_k = \hat{U}_k \sum_{m=1}^n \hat{U}_m^* \hat{Y}_{(k,m)}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_{diag} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Y}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \dots \\ \hat{S}_k \\ \dots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{U}_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{U}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{Y}_{(1,1)}^* & \dots & \dots & \dots & \hat{Y}_{(1,n)}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{Y}_{(k,1)}^* & \dots & \hat{Y}_{(k,k)}^* & \dots & \hat{Y}_{(k,n)}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{Y}_{(n,1)}^* & \dots & \dots & \dots & \hat{Y}_{(n,n)}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{U}_1^* \\ \dots \\ \hat{U}_k^* \\ \dots \\ \hat{U}_n^* \end{pmatrix}$$

- zadané výkony \rightarrow nelinearita

Cíl: určení \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{U} , δ v uzlech a větvích

Pozn.: Předpoklad symetrického systému i jeho zatížení \rightarrow jednofázové modely.

Jednotlivé typy uzlů

Výkon v uzlu		Složky fázoru napětí v uzlu	
zadán	má se určit	zadán	má se určit
–	P, Q	U, δ	–
P, Q	–	–	U, δ
P	Q	U	δ
Q	P	δ	U

slack – „bilanční uzel“ (swing bus), dorovná P, Q pro ztráty a celkovou výkonovou bilanci, jako mohutná soustava, velký zdroj

PQ – zátěže

PU – generátory, regulované napětí

Veličiny

- pevné – požadavky (P, Q u zátěží; P u generátorů)
- stavové – nezávisle proměnné (U, δ u zátěží; δ u generátorů)
- řídicí – zde neměnné (U u slacku a generátorů), mění se při optimalizacích

Výpočty v poměrných hodnotách

Pojmenované hodnoty

$$\hat{S} = 3\hat{U}_f\hat{I}^* = \sqrt{3}\hat{U}\hat{I}^* \quad \hat{U}_f = \hat{Z}\hat{I} \quad \hat{U} = \sqrt{3}\hat{Z}\hat{I}$$

Vztažné hodnoty

$$\hat{S}_v = \sqrt{3}\hat{U}_v\hat{I}_v^*$$
$$\hat{Z}_v = \frac{\hat{U}_v}{\sqrt{3}\hat{I}_v} = \frac{\hat{U}_v}{\sqrt{3}\left(\frac{\hat{S}_v}{\sqrt{3}\hat{U}_v}\right)^*} = \frac{U_v^2}{\hat{S}_v^*}$$

Poměrné hodnoty

$$\hat{s} \cdot S_v = \sqrt{3} \cdot \hat{u} \cdot U_v \cdot \hat{i}^* \cdot I_v^*$$

$$\underline{\hat{s} = \hat{u} \cdot \hat{i}^*}$$

$$\hat{u} \cdot U_v = \sqrt{3} \cdot \hat{z} \cdot Z_v \cdot \hat{i} \cdot I_v$$

$$\underline{\hat{u} = \hat{z} \cdot \hat{i}}$$

Uzlový proud

$$\hat{I}_k = \hat{U}_{fk} \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{Y}_{km} + \hat{Y}_{k0} \right) - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{km}$$

$$\hat{i}_i = \hat{u}_i \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j$$

Uzlový výkon

$$p_i + jq_i = \hat{u}_i \cdot \hat{i}_i^* \qquad \hat{i}_i = \frac{p_i - jq_i}{\hat{u}_i^*}$$

tedy

$$\frac{p_i - jq_i}{\hat{u}_i^*} = \hat{u}_i \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j$$

Gauss-Seidel Power Flow Solution

Řešení pro U, δ :

$$\hat{u}_i^{(k+1)} = \frac{\frac{p_i - jq_i}{\hat{u}_i^{*(k)}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j^{(k)}}{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij}}$$

(pozn. pro zátěže P, Q < 0)

Řešení pro P:

$$p_i^{(k+1)} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{u}_i^{*(k)} \left[\hat{u}_i^{(k)} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j^{(k)} \right] \right\}$$

Řešení pro Q:

$$q_i^{(k+1)} = -\text{Im} \left\{ \hat{u}_i^{*(k)} \left[\hat{u}_i^{(k)} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \hat{u}_j^{(k)} \right] \right\}$$

Pro prvky admitanční matice

$$\hat{y}_{(i,i)} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \hat{y}_{ij} \quad \hat{y}_{(i,j)} = -\hat{y}_{ij}$$

PQ: U, δ slack známé $\rightarrow 2(n-1)$ neznámých

$$\hat{u}_i^{(k+1)} = f(p_i, q_i, \hat{u}_j^{(k)})$$

PU: $q_i^{(k+1)} = f(\hat{u}_i^{(k)}, \hat{u}_j^{(k)})$

$$\hat{u}_i^{(k+1)} = f(p_i, q_i^{(k+1)}, \hat{u}_j^{(k)})$$

imaginární část necháme, reálnou dopočteme

$$\left(e_i^{(k+1)}\right)^2 + \left(f_i^{(k+1)}\right)^2 = |\hat{u}_i|^2$$

$$e_i^{(k+1)} = \sqrt{|\hat{u}_i|^2 - \left(f_i^{(k+1)}\right)^2}$$

Newton-Raphson Power Flow Solution

$$\hat{S}_i = \hat{U}_i \sum_{j=1}^n \hat{U}_j^* \hat{Y}_{(i,j)}^* = U_i^2 \hat{Y}_{(i,i)}^* + \hat{U}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{U}_j^* \hat{Y}_{(i,j)}^*$$

$$\hat{S}_i = f_i(\hat{U})$$

Vyjádření v exponenciálním tvaru

$$\hat{S}_i = P_i + jQ_i \quad \hat{U}_i = U_i e^{j\delta_i}$$

$$\hat{Y}_{(i,j)} = Y_{(i,j)} e^{j\theta_{(i,j)}}$$

$$\hat{S}_i = U_i e^{j\delta_i} \sum_{j=1}^n U_j Y_{(i,j)} e^{-j(\delta_j + \theta_{(i,j)})}$$

Rozdělení výkonu na reálnou a imaginární část

$$P_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

→ 2 rovnice pro každý PQ uzel, 1 rovnice pro každý PU uzel

Pro změnu výkonu můžeme psát (linearizovaně)

$$\Delta \hat{S}_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \hat{S}_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \frac{\partial \hat{S}_i}{\partial U_j} \Delta U_j \right)$$

$$\Delta P_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \frac{\partial P_i}{\partial U_j} \Delta U_j \right)$$

$$\Delta Q_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} \Delta U_j \right)$$

Úplný rozpis rovnic

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta P_n^{(k)} \\ \Delta Q_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta Q_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial U_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial U_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial \delta_n}{\partial \delta_n} & \frac{\partial U_2}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial U_n}{\partial U_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta \delta_n^{(k)} \\ \Delta U_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta U_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Rovnice v kompaktnější formě

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & \frac{\partial P}{\partial U} \\ \frac{\partial Q}{\partial \delta} & \frac{\partial Q}{\partial U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix}$$

$$(J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & \frac{\partial P}{\partial U} \\ \frac{\partial Q}{\partial \delta} & \frac{\partial Q}{\partial U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

Počty rovnic pro n uzlů, s slacků, m PU uzlů, p PQ uzlů ($n = s + m + p$):
 ΔP x $(n-s)$, ΔQ x $(n-s-m)$

$$P_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \sin(-\delta_i + \delta_j + \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = U_i U_j Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}) \quad j \neq i$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_i} = 2U_i Y_{(i,i)} \cos(\theta_{(i,i)}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_j} = U_i Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}) \quad j \neq i$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_i U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = -U_i U_j Y_{(i,j)} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}) \quad j \neq i$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_i} = -2U_i Y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_j} = U_i Y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}) \quad j \neq i$$

Nástin iteračního řešení

$$\begin{pmatrix} \delta \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}_k$$

$$\text{defekt} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \mathbf{U} \end{pmatrix} = (\mathbf{J})^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \delta \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

Decoupled Power Flow Solution

Přenosové soustavy: vyšší poměr X/R vedení

Vazby $\Delta P \sim \Delta \delta$, $\Delta Q \sim \Delta U$ silnější než $\Delta P \sim \Delta U$, $\Delta Q \sim \Delta \delta$.

Proto lze zjednodušit Jakobiho matici:

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Q}{\partial U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix}$$

Tzv. „Decoupled problem“ obvykle vyžaduje kratší čas výpočtu. Více iterací, ale rychlejší počítání s maticemi. (Počet operací k řešení soustavy lin. rovnic roste rychleji než lineárně.)

2 soustavy řešeny sekvenčně v každém kroku.

Konvergence přesná, jen změna Jakobiho matice, tj. iteračních kroků.

Přibližné řešení, až když zjednodušené vztahy pro P, Q.

Ideální vedení ($R = 0, G = 0$)

$$P_{ij} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij} \quad Q_{ij} = \frac{U_i^2}{X_{ij}} - \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \cos \delta_{ij} - U_i^2 \cdot \frac{B}{2}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \cos \delta_{ij} \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial U_i} = \frac{U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij} \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial U_j} = \frac{2U_i - U_j \cos \delta_{ij}}{X_{ij}}$$

Pro málo zatížená vedení ($\delta_{ij} \rightarrow 0$) decoupling dost přesný.

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = 0$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial U_i} = 0 \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial U_i} = \frac{2U_i - U_j}{X_{ij}}$$

Další zjednodušení omezí počítání \mathbf{J}_1 a \mathbf{J}_4 každou iteraci.

Fast Decoupled Power Flow Solution

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_i u_j y_{(i,j)} \sin(-\delta_i + \delta_j + \theta_{(i,j)})$$

$$q_i = \sum_{j=1}^n u_i u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j=1}^n u_i u_j y_{(i,j)} \sin(-\delta_i + \delta_j + \theta_{(i,j)}) - u_i^2 y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)})$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = q_i - u_i^2 y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) = q_i - u_i^2 B_{(i,i)}$$

$$B_{(i,i)} = y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) = \text{Im}\{y_{(i,i)}\}$$

Obvykle $B_{(i,i)} \gg q_i$ a $u_i^2 \approx u_i$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = -u_i B_{(i,i)}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_j} = u_i u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

Obvykle $\delta_i \approx \delta_j$, $u_j \approx 1$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_j} = u_i y_{(i,j)} \sin(-\theta_{(i,j)})$$

$$B_{(i,j)} = y_{(i,j)} \sin(\theta_{(i,j)}) = \text{Im}\{y_{(i,j)}\}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_j} = -u_i B_{(i,j)}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -2u_i y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$q_i = \sum_{j=1}^n u_i u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -u_i y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) + \sum_{j=1}^n u_j y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -u_i y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) + q_i$$

Obvykle $B_{(i,i)} = y_{(i,i)} \sin(\theta_{(i,i)}) = \text{Im}\{y_{(i,i)}\} \gg q_i$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -u_i B_{(i,i)}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = u_i y_{(i,j)} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)})$$

Obvykle $\delta_i \approx \delta_j$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = u_i y_{(i,j)} \sin(-\theta_{(i,j)})$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = -u_i B_{(i,j)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta p}{u} \\ \frac{\Delta q}{u} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta u \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta u \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{B}'^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}''^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Delta p}{u} \\ \frac{\Delta q}{u} \end{pmatrix}$$

\mathbf{B}' a \mathbf{B}'' jsou tedy imaginární části admitanční matice (v p.u.), jejich inverze se počítá jen jednou. (Pozn.: Dělení napětími prvek po prvku.)

DC Power Flow

Poměrné hodnoty. Předpoklady:

$$u_i \approx u_j \approx 1$$

$$\sin \delta_{ij} \approx \delta_{ij}$$

$$b_{ij} = -\frac{1}{x_{ij}}$$

$$P_{ij} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij}$$

$$p_{ij} \cdot S_v = \frac{u_i \cdot U_v \cdot u_j \cdot U_v}{x_{ij} \cdot Z_v} \sin \delta_{ij}$$

$$p_{ij} = \frac{u_i \cdot u_j}{x_{ij}} \sin \delta_{ij} \Rightarrow p_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_{ij}} = \frac{\delta_i - \delta_j}{x_{ij}}$$

Maticově

$$p_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\delta_i - \delta_j}{x_{ij}} = \delta_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_{ij}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\delta_j}{x_{ij}}$$

$$p_i = \delta_i b'_{(i,i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \delta_j b'_{(i,j)}$$

$$(\mathbf{p}) = (\mathbf{b}')(\boldsymbol{\delta})$$

Jen podélné reaktance $\rightarrow \mathbf{b}'$ singulární. 1 uzel jako referenční s $\delta = 0 \rightarrow$ matice \mathbf{b}'' o řád menší.

(DC model nepočítá ztráty, tedy netřeba slack, ale reference úhlu ano.)

$$(\boldsymbol{\delta}) = (\mathbf{b}'')^{-1}(\mathbf{p})$$

$$(\mathbf{u}) = (\mathbf{g})^{-1}(\mathbf{i})$$