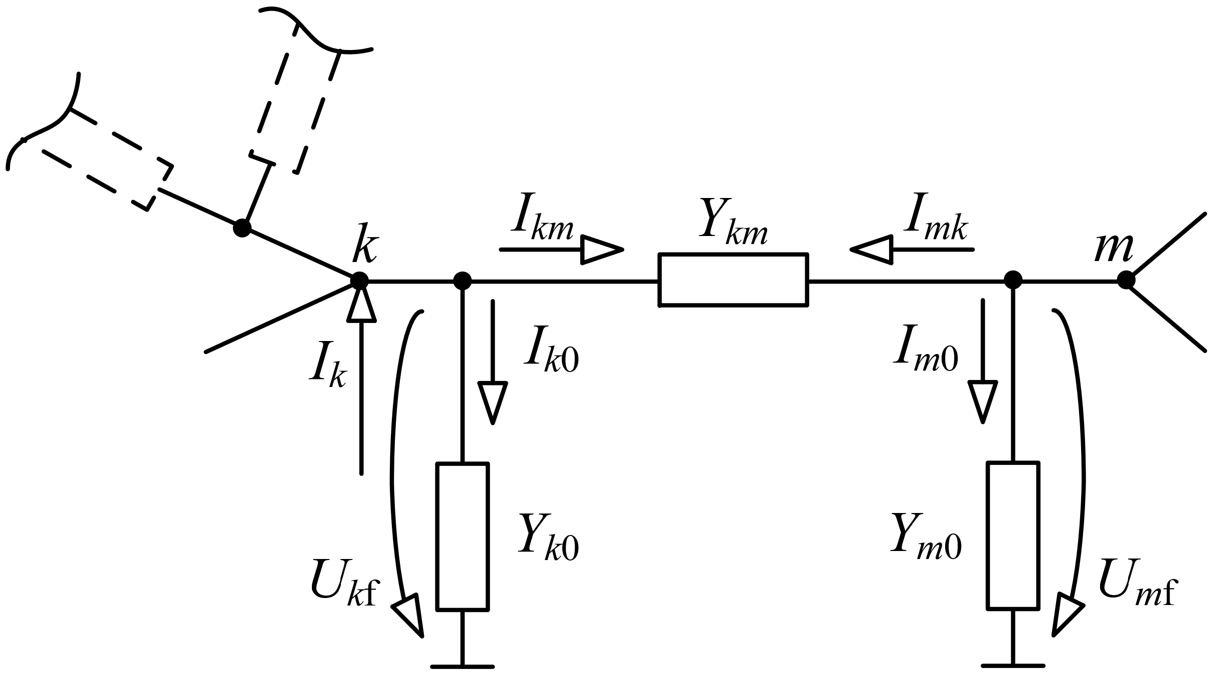
USTÁLENÉ CHODY V UZLOVÝCH SÍTÍCH

Metoda uzlových napětí

Část sítě s uvažovaným uzlem *k* a s uzlem *m* bezprostředně sousedícím



$$\hat{I}_k - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{n} \hat{I}_{km} - \hat{I}_{k0} = 0$$

Pro proudy platí

$$\hat{I}_{km} = \left(\hat{U}_{fk} - \hat{U}_{fm}\right)\hat{Y}_{km}$$

$$\hat{I}_{k0} = \hat{U}_{fk}\hat{Y}_{k0}$$

$$\hat{I}_{k} = \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} \left(\hat{U}_{fk} - \hat{U}_{fm}\right)\hat{Y}_{km} + \hat{U}_{fk}\hat{Y}_{k0}$$

$$\hat{I}_{k} = \hat{U}_{fk}\left(\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} \hat{Y}_{km} + \hat{Y}_{k0}\right) - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} \hat{U}_{fm}\hat{Y}_{km}$$

Zavedeme vlastní uzlovou admitanci (diagonální prvek adm. matice)

$$\hat{Y}_{(k,k)} = \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} \hat{Y}_{km} + \hat{Y}_{k0} = \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq k}}^{n} \hat{Y}_{km}$$

Vzájemná uzlová admitance (mimodiagonální prvek adm. matice)

$$\hat{Y}_{(k,m)} = -\hat{Y}_{km}$$

Potom platí pro *k*-tý proud

$$\hat{I}_k = \hat{U}_{fk}\hat{Y}_{(k,k)} - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} \hat{U}_{fm}\hat{Y}_{km} = \hat{U}_{fk}\hat{Y}_{(k,k)} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} \hat{U}_{fm}\hat{Y}_{(k,m)}$$

$$\hat{I}_k = \sum_{m=1}^{n} \hat{U}_{fm}\hat{Y}_{(k,m)}$$

Maticový zápis pak poskytuje

$$\left(\hat{I}\right) = \left(\hat{Y}\right)\left(\hat{U}_f\right) \qquad \sqrt{3}\left(\hat{I}\right) = \left(\hat{Y}\right)\left(\hat{U}\right)$$

Admitanční matice regulární (existuje minimálně 1 nenulový prvek $\hat{Y}_{k0}$)

$$\left(\hat{U}_f\right) = \left(\hat{Y}\right)^{-1}\left(\hat{I}\right) = \left(\hat{Z}\right)\left(\hat{I}\right)$$

Admitanční matice singulární – zadáno napětí v uzlech x (1 ÷ n-1)

$$\begin{pmatrix} (\hat{I}_x) \\ (\hat{I}_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{Y}_A) & (\hat{Y}_B) \\ (\hat{Y}_B)^T & (\hat{Y}_D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{U}_{fx}) \\ (\hat{U}_{fy}) \end{pmatrix}$$

Odtud

$$(\hat{I}_x) = (\hat{Y}_A)(\hat{U}_{fx}) + (\hat{Y}_B)(\hat{U}_{fy})$$

$$(\hat{I}_y) = (\hat{Y}_B)^T(\hat{U}_{fx}) + (\hat{Y}_D)(\hat{U}_{fy})$$

Vypočteme $(\hat{I}_x), (\hat{U}_{fy})$

$$(\hat{U}_{fy}) = (\hat{Y}_D)^{-1}(\hat{I}_y) - (\hat{Y}_D)^{-1}(\hat{Y}_B)^T(\hat{U}_{fx})$$

Gauss-Seidelova metoda

- iterativní metoda pro nelineární rovnice
- ne vždy dobrá kovergence

Základní úvaha

$$f(x) \stackrel{!}{=} 0$$

Přepíšeme do tvaru

$$x = g(x)$$

Je-li $x^{(k)}$ odhad v k-tém kroku, pak další iterace

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

Takto pokračujeme, až je rozdíl následných iterací menší než stanovená přesnost ε

$$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \le \varepsilon$$

Někdy lze konvergenci zlepšit tzv. akceleračním faktorem α ($\alpha < 1$ nebo $\alpha > 1$)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha\left(g(x^{(k)}) - x^{(k)}\right)$$

Systém n rovnic o n neznámých

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_n$$

Z každé rovnice vyjádříme jednu neznámou

$$x_1 = c_1 + g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$x_2 = c_2 + g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = c_n + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Gauss: k-tá iterace z (k-1). aproximace

$$x_m^{(k)} = c_m + g_m(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_{m-1}^{(k-1)}, x_m^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})$$

Gauss-Seidel: pro výpočet k-té iterace se využijí i k-té aproximace z předchozích rovnic

$$x_m^{(k)} = c_m + g_m(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{m-1}^{(k)}, x_m^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})$$

Testování konvergence pro každou proměnnou zvlášť.

Newton-Raphsonova metoda

- nejrozšířenější metoda pro nelineární rovnice
- využívá Taylorův polynom
- převádí řešení nelineárních rovnic na řešení lineárních, postupné zpřesňování odhadu

Základní úvaha

$$f(x) = c$$

Je-li $x^{(0)}$ počáteční odhad a $\Delta x^{(0)}$ odchylka od správného řešení, pak

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) = c$$

Taylorova řada

$$f(x)\Big|_{x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{df(x_0)}{dx}\right)^{(k)}}{k!} (x - x_o)^k$$

Rozvojem do Taylorovy řady dostaneme

$$f(x^{(0)}) + \left(\frac{df}{dx}\right)^{(0)} \Delta x^{(0)} + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)^{(0)} (\Delta x^{(0)})^2 + \ldots = c$$

Zanedbáním vyšších řádů (linearizace)

$$\Delta c^{(0)} \approx \left(\frac{df}{dx}\right)^{(0)} \Delta x^{(0)}$$

kde

$$\Delta c^{(0)} = c - f(x^{(0)})$$

je tzv. defekt.

Přičtením $\Delta x^{(0)}$ k počátečnímu odhadu získáme druhou aproximaci

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \frac{\Delta c^{(0)}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^{(0)}}$$

(pozn: nelze pro nulovou derivaci)

Stejnými vztahy v dalších krocích získáme algoritmus metody:

$$\Delta c^{(k)} = c - f(x^{(k)})$$

$$\Delta x^{(k)} = \frac{\Delta c^{(k)}}{\left(\dfrac{df}{dx}\right)^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

$$\Delta c^{(k+1)} = c - f(x^{(k+1)})$$

Systém n rovnic o n neznámých

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_n$$

Rozvojem do Taylorových řad dostaneme

$$(f_1)^{(0)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^{(0)} \Delta x_1^{(0)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^{(0)} \Delta x_2^{(0)} + \ldots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^{(0)} \Delta x_n^{(0)} = c_1$$

$$(f_2)^{(0)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^{(0)} \Delta x_1^{(0)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^{(0)} \Delta x_2^{(0)} + \ldots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)^{(0)} \Delta x_n^{(0)} = c_2$$

....

$$(f_n)^{(0)} + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)^{(0)} \Delta x_1^{(0)} + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)^{(0)} \Delta x_2^{(0)} + \ldots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)^{(0)} \Delta x_n^{(0)} = c_n$$

V maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} c_1 - (f_1^{(0)}) \\ c_2 - (f_2^{(0)}) \\ \vdots \\ c_n - (f_n^{(0)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^{(0)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^{(0)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^{(0)} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^{(0)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^{(0)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)^{(0)} & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)^{(0)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

zkráceně

$$\left(\Delta C^{(0)}\right) = \left(J^{(0)}\right) \cdot \left(\Delta X^{(0)}\right)$$

Potom

$$\left(\Delta X^{(0)}\right) = \left(J^{(0)}\right)^{-1} \cdot \left(\Delta C^{(0)}\right)$$

Algoritmus metody tedy je:

$$\left(\Delta C^{(k)}\right) = \begin{pmatrix} c_1 - (f_1^{(k)}) \\ c_2 - (f_2^{(k)}) \\ \vdots \\ c_n - (f_n^{(k)}) \end{pmatrix}$$

$$\left(\Delta X^{(k)}\right) = \left(J^{(k)}\right)^{-1} \cdot \left(\Delta C^{(k)}\right)$$

$$\left(X^{(k+1)}\right) = \left(X^{(k)}\right) + \left(\Delta X^{(k)}\right)$$

$$\left(\Delta C^{(k+1)}\right)=\begin{pmatrix} c_1-(f_1^{(k+1)}) \\ c_2-(f_2^{(k+1)}) \\ \vdots \\ c_n-(f_n^{(k+1)}) \end{pmatrix}$$

kde

$$\left(\Delta X^{(k)}\right)=\begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\left(J^{(k)}\right)=\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^{(k)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^{(k)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^{(k)} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^{(k)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^{(k)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)^{(k)} & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)^{(k)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)^{(k)} \end{pmatrix}$$

$(J^{(k)})$ – Jakobiho matice, předpoklad regulárnosti

Řešení výkonových toků (Load Flow)

Systém U-I rovnic lze rozšířit na závislost mezi napětím a výkonem

$$\hat{I}_k = \sum_{m=1}^{n} \hat{U}_{fm} \hat{Y}_{(k,m)}$$

$$\hat{S}_k = 3\hat{S}_{fk} = 3\hat{U}_{fk} \hat{I}_k^* = 3\hat{U}_{fk} \sum_{m=1}^{n} \hat{U}_{fm}^* \hat{Y}_{(k,m)}^*$$

$$\hat{S}_k = \hat{U}_k \sum_{m=1}^{n} \hat{U}_m^* \hat{Y}_{(k,m)}^*$$

$$\left(\hat{S}\right) = \left(\hat{U}_{diag}\right)\left(\hat{Y}^*\right)\left(\hat{U}^*\right)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \dots \\ \hat{S}_k \\ \dots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{U}_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{U}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{Y}^*_{(1,1)} & \dots & \dots & \dots & \hat{Y}^*_{(1,n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{Y}^*_{(k,1)} & \dots & \hat{Y}^*_{(k,k)} & \dots & \hat{Y}^*_{(k,n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{Y}^*_{(n,1)} & \dots & \dots & \dots & \hat{Y}^*_{(n,n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{U}^*_1 \\ \dots \\ \hat{U}^*_k \\ \dots \\ \hat{U}^*_n \end{pmatrix}$$

- zadané výkony → nelinearita

Cíl: určení **P, Q, U, δ** v uzlech a větvích

Pozn.: Předpoklad symetrického systému i jeho zatížení → jednofázové modely.

Jednotlivé typy uzlů

Výkon v uzlu		Složky fázoru napětí v uzlu	
zadán	má se určit	zadán	má se určit
–	P, Q	U, δ	–
P, Q	–	–	U, δ
P	Q	U	δ
Q	P	δ	U

slack – „bilanční uzel“ (swing bus), dorovná P, Q pro ztráty a celkovou výkonovou bilanci, jako mohutná soustava, velký zdroj
PQ – zátěže
PU – generátory, regulované napětí

Veličiny

- pevné – požadavky (P,Q u zátěží; P u generátorů)
- stavové – nezávisle proměnné (U,δ u zátěží; δ u generátorů)
- řídicí – zde neměnné (U u slacku a generátorů), mění se při optimalizacích

Výpočty v poměrných hodnotách

Pojmenované hodnoty

$$\hat{S} = 3\hat{U}_f\hat{I}^* = \sqrt{3}\hat{U}\hat{I}^* \qquad \hat{U}_f = \hat{Z}\hat{I} \qquad \hat{U} = \sqrt{3}\hat{Z}\hat{I}$$

Vztažné hodnoty

$$\hat{S}_v = \sqrt{3}\hat{U}_v\hat{I}_v^*$$

$$\hat{Z}_v = \frac{\hat{U}_v}{\sqrt{3}\hat{I}_v} = \frac{\hat{U}_v}{\sqrt{3}\left(\dfrac{\hat{S}_v}{\sqrt{3}\hat{U}_v}\right)^*} = \frac{U_v^2}{\hat{S}_v^*}$$

Poměrné hodnoty

$$\hat{s} \cdot S_v = \sqrt{3} \cdot \hat{u} \cdot U_v \cdot \hat{i}^* \cdot I_v^* \qquad \hat{u} \cdot U_v = \sqrt{3} \cdot \hat{z} \cdot Z_v \cdot \hat{i} \cdot I_v$$

$$\underline{\hat{s} = \hat{u} \cdot \hat{i}^*} \qquad \underline{\hat{u} = \hat{z} \cdot \hat{i}}$$

Uzlový proud

$$\hat{I}_k = \hat{U}_{fk}\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n} \hat{Y}_{km} + \hat{Y}_{k0}\right) - \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n} \hat{U}_{fm}\hat{Y}_{km}$$

$$\hat{i}_i = \hat{u}_i \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij}\hat{u}_j$$

Uzlový výkon

$$p_i + jq_i = \hat{u}_i \cdot \hat{i}_i^*$$

$$\hat{i}_i = \frac{p_i - jq_i}{\hat{u}_i^*}$$

tedy

$$\frac{p_i - jq_i}{\hat{u}_i^*} = \hat{u}_i \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij}\hat{u}_j$$

Gauss-Seidel Power Flow Solution

Řešení pro U, δ:

$$\hat{u}_i^{(k+1)} = \frac{\dfrac{p_i - jq_i}{\hat{u}_i^{*(k)}} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij}\hat{u}_j^{(k)}}{\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij}}$$

(pozn. pro zátěže P, Q < 0)

Řešení pro P:

$$p_i^{(k+1)} = \mathrm{Re}\left\{ \hat{u}_i^{*(k)} \left[\hat{u}_i^{(k)} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij}\hat{u}_j^{(k)} \right] \right\}$$

Řešení pro Q:

$$q_i^{(k+1)} = -\mathrm{Im}\left\{ \hat{u}_i^{*(k)} \left[\hat{u}_i^{(k)} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij} \hat{u}_j^{(k)} \right] \right\}$$

Pro prvky admitanční matice

$$\hat{y}_{(i,i)} = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \hat{y}_{ij} \qquad \hat{y}_{(i,j)} = -\hat{y}_{ij}$$

PQ: U, δ slack známé → 2(n-1) neznámých

$$\hat{u}_i^{(k+1)} = f(p_i, q_i, \hat{u}_j^{(k)})$$

PU:

$$q_i^{(k+1)} = f(\hat{u}_i^{(k)}, \hat{u}_j^{(k)})$$

$$\hat{u}_i^{(k+1)} = f(p_i, q_i^{(k+1)}, \hat{u}_j^{(k)})$$

imaginární část necháme, reálnou dopočteme

$$\left(e_i^{(k+1)}\right)^2 + \left(f_i^{(k+1)}\right)^2 = \left|\hat{u}_i\right|^2$$

$$e_i^{(k+1)} = \sqrt{\left|\hat{u}_i\right|^2 - \left(f_i^{(k+1)}\right)^2}$$

Newton-Raphson Power Flow Solution

$$\hat{S}_i = \hat{U}_i \sum_{j=1}^{n} \hat{U}_j^* \hat{Y}_{(i,j)}^* = U_i^2 \hat{Y}_{(i,i)}^* + \hat{U}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \hat{U}_j^* \hat{Y}_{(i,j)}^*$$

$$\hat{S}_i = f_i\left(\left(\hat{U}\right)\right)$$

Vyjádření v exponenciálním tvaru

$$\hat{S}_i = P_i + jQ_i \qquad \hat{U}_i = U_i e^{j\delta_i} \qquad \hat{Y}_{(i,j)} = Y_{(i,j)} e^{j\theta_{(i,j)}}$$

$$\hat{S}_i = U_i e^{j\delta_i} \sum_{j=1}^{n} U_j Y_{(i,j)} e^{-j\left(\delta_j + \theta_{(i,j)}\right)}$$

Rozdělení výkonu na reálnou a imaginární část

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} U_i U_j Y_{(i,j)} \cos\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} U_i U_j Y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

→ 2 rovnice pro každý PQ uzel, 1 rovnice pro každý PU uzel

Pro změnu výkonu můžeme psát (linearizovaně)

$$\Delta\hat{S}_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \hat{S}_i}{\partial \delta_j} \Delta\delta_j + \frac{\partial \hat{S}_i}{\partial U_j} \Delta U_j \right)$$

$$\Delta P_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} \Delta\delta_j + \frac{\partial P_i}{\partial U_j} \Delta U_j \right)$$

$$\Delta Q_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} \Delta\delta_j + \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} \Delta U_j \right)$$

Úplný rozpis rovnic

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2^{(k)} \\ \cdots \\ \Delta P_n^{(k)} \\ \Delta Q_2^{(k)} \\ \cdots \\ \Delta Q_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2}^{(k)} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_n}^{(k)} & \frac{\partial P_2}{\partial U_2}^{(k)} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial U_n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \delta_2}^{(k)} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial \delta_n}^{(k)} & \frac{\partial P_n}{\partial U_2}^{(k)} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial U_n}^{(k)} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2}^{(k)} & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_n}^{(k)} & \frac{\partial Q_2}{\partial U_2}^{(k)} & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial U_n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_2}^{(k)} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_n}^{(k)} & \frac{\partial Q_n}{\partial U_2}^{(k)} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial U_n}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(k)} \\ \cdots \\ \Delta \delta_n^{(k)} \\ \Delta U_2^{(k)} \\ \cdots \\ \Delta U_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Rovnice v kompaktnější formě

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial \delta} & \dfrac{\partial P}{\partial U} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \delta} & \dfrac{\partial Q}{\partial U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix}$$

$$(J) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial \delta} & \dfrac{\partial P}{\partial U} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \delta} & \dfrac{\partial Q}{\partial U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

Počty rovnic pro *n* uzlů, *s* slacků, *m* PU uzlů, *p* PQ uzlů (n = s + m + p):

ΔP x (n-s), ΔQ x (n-s-m)

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} U_i U_j Y_{(i,j)} \cos\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_i U_j Y_{(i,j)} \sin\left(-\delta_i + \delta_j + \theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = U_i U_j Y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right) \qquad j \neq i$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_i} = 2U_i Y_{(i,i)} \cos\left(\theta_{(i,i)}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_j Y_{(i,j)} \cos\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_j} = U_i Y_{(i,j)} \cos\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right) \qquad j \neq i$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} U_i U_j Y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_i U_j Y_{(i,j)} \cos\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = -U_i U_j Y_{(i,j)} \cos\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right) \qquad j \neq i$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_i} = -2U_i Y_{(i,i)} \sin\left(\theta_{(i,i)}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_j Y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_j} = U_i Y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right) \qquad j \neq i$$

Nástin iteračního řešení

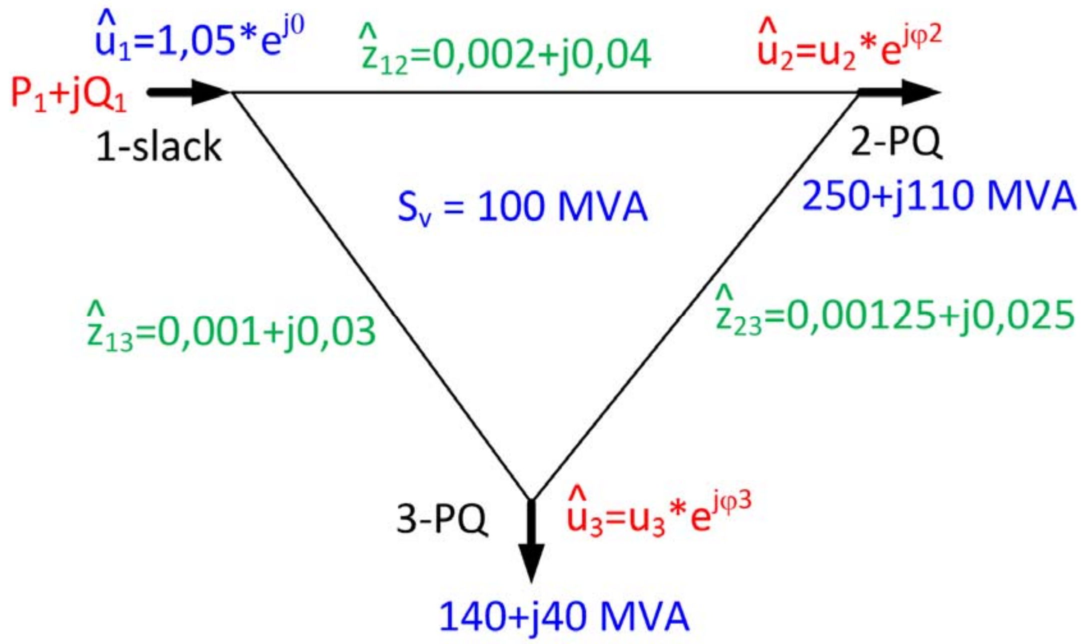
$$\begin{pmatrix} \delta \\ U \end{pmatrix}^{(k)}$$

defekt $$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} P_{zad} \\ Q_{zad} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}^{(k)}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix}^{(k)} = \left(J^{(k)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}^{(k)}$$

$$\begin{pmatrix} \delta \\ U \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \delta \\ U \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{pmatrix}^{(k)}$$

Příklad



$$\hat{u}_2^{(0)} = 1;\ \hat{u}_3^{(0)} = 1$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.062 \\ -0.055 \\ -1.246 \\ -1.664 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} -2.437 \\ -1.344 \\ 0.146 \\ 1.264 \end{pmatrix} \qquad \left(J^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 66.08 & -39.90 & 3.17 & -1.99 \\ -39.90 & 74.86 & -1.99 & 3.04 \\ -3.30 & 1.99 & 63.59 & -39.90 \\ 1.99 & -3.16 & -39.90 & 71.53 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta u \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.0709 \\ -0.0564 \\ 0.0171 \\ 0.0267 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \delta \\ u \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.0709 \\ -0.0564 \\ 1.0171 \\ 1.0267 \end{pmatrix}$$

$$\hat{u}_{2fin} = 1.0144 \cdot e^{-j0.0697};\ u_{3fin} = 1.0239 \cdot e^{-j0.0554}$$

$$\hat{s}_{1fin} = 3.913 + j1.805$$

$$(y) = \begin{pmatrix} 2.35 - j58.23 & -1.24 + j24.93 & -1.10 + j33.29 \\ -1.24 + j24.93 & 3.24 - j64.83 & -1.99 + j39.90 \\ -1.10 + j33.29 & -1.99 + j39.90 & 3.10 - j73.19 \end{pmatrix}$$

Decoupled Power Flow Solution

Přenosové soustavy: vyšší poměr X/R vedení
Vazby $\Delta P \sim \Delta\delta$, $\Delta Q \sim \Delta U$ silnější než $\Delta P \sim \Delta U$, $\Delta Q \sim \Delta\delta$.
Proto lze zjednodušit Jakobiho matici:

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Q}{\partial U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta U \end{pmatrix}$$

Tzv. „Decoupled problem“ obvykle vyžaduje kratší čas výpočtu. Více iterací, ale rychlejší počítání s maticemi. (Počet operací k řešení soustavy lin. rovnic roste rychleji než lineárně.)
2 soustavy řešeny sekvenčně v každém kroku.
Konvergence přesná, jen změna Jakobiho matice, tj. iteračních kroků.
Přibližné řešení, až když zjednodušené vztahy pro P, Q.

Ideální vedení (R = 0, G = 0)

$$P_{ij} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij} \qquad Q_{ij} = \frac{U_i^2}{X_{ij}} - \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \cos \delta_{ij} - U_i^2 \cdot \frac{B}{2}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \cos \delta_{ij} \qquad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial U_i} = \frac{U_j}{X_{ij}} \sin \delta_{ij} \qquad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial U_j} = \frac{2U_i - U_j \cos \delta_{ij}}{X_{ij}}$$

Pro málo zatížená vedení ($\delta_{ij} \to 0$) decoupling dost přesný.

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \qquad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_{ij}} = 0$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial U_i} = 0 \qquad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial U_i} = \frac{2U_i - U_j}{X_{ij}}$$

Další zjednodušení omezí počítání **J_1** a **J_4** každou iteraci.

Fast Decoupled Power Flow Solution

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} u_i u_j y_{(i,j)} \sin\left(-\delta_i + \delta_j + \theta_{(i,j)}\right)$$

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_i u_j y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j=1}^{n} u_i u_j y_{(i,j)} \sin\left(-\delta_i + \delta_j + \theta_{(i,j)}\right) - u_i^2 y_{(i,i)} \sin\left(\theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = q_i - u_i^2 y_{(i,i)} \sin\left(\theta_{(i,j)}\right) = q_i - u_i^2 b_{(i,i)}$$

$$b_{(i,i)} = y_{(i,i)} \sin\left(\theta_{(i,j)}\right) = \mathrm{Im}\left\{y_{(i,i)}\right\}$$

Obvykle $b_{(i,i)} >> q_i$ a $u_i^2 \approx u_i$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_i} = -u_i b_{(i,i)}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_j} = u_i u_j y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

Obvykle $\delta_i \approx \delta_j$, $u_j \approx 1$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_j} = u_i y_{(i,j)} \sin\left(-\theta_{(i,j)}\right)$$

$$b_{(i,j)} = y_{(i,j)} \sin\left(\theta_{(i,j)}\right) = \mathrm{Im}\left\{y_{(i,j)}\right\}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta_j} = -u_i b_{(i,j)}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -2u_i y_{(i,i)} \sin\left(\theta_{(i,i)}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} u_j y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_i u_j y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -u_i y_{(i,i)} \sin\left(\theta_{(i,i)}\right) + \sum_{j=1}^{n} u_j y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -u_i y_{(i,i)} \sin\left(\theta_{(i,i)}\right) + q_i$$

Obvykle $b_{(i,i)} = y_{(i,i)} \sin\left(\theta_{(i,j)}\right) = \mathrm{Im}\left\{y_{(i,i)}\right\} >> q_i$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = -u_i b_{(i,i)}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = u_i y_{(i,j)} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{(i,j)}\right)$$

Obvykle $\delta_i \approx \delta_j$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = u_i y_{(i,j)} \sin\left(-\theta_{(i,j)}\right)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = -u_i b_{(i,j)}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\Delta p}{u} \\ \dfrac{\Delta q}{u} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b' & 0 \\ 0 & b'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta u \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta u \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b'^{-1} & 0 \\ 0 & b''^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta p}{u} \\ \dfrac{\Delta q}{u} \end{pmatrix}$$

b´ a **b´´** jsou tedy imaginární části admitanční matice (v p.u.), jejich inverze se počítá jen jednou. (Pozn.: Dělení napětími prvek po prvku.)

Konvergence přesná, jen změna Jakobiho matice, tj. iteračních kroků.

Uvažujeme-li $u_i^2 \approx u_i \approx 1$, lze počítat také:

$$\begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta u \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b'^{-1} & 0 \\ 0 & b''^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{pmatrix}$$

DC Power Flow

Poměrné hodnoty. Předpoklady:

$$u_i \approx u_j \approx 1 \qquad \sin\delta_{ij} \approx \delta_{ij} \qquad b_{ij} = -\frac{1}{x_{ij}}$$

$$P_{ij} = \frac{U_i U_j}{X_{ij}} \sin\delta_{ij}$$

$$p_{ij} \cdot S_v = \frac{u_i \cdot U_v \cdot u_j \cdot U_v}{x_{ij} \cdot Z_v} \sin\delta_{ij}$$

$$p_{ij} = \frac{u_i \cdot u_j}{x_{ij}} \sin\delta_{ij} \;\Rightarrow\; p_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_{ij}} = \frac{\delta_i - \delta_j}{x_{ij}}$$

Maticově

$$p_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\delta_i - \delta_j}{x_{ij}} = \delta_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_{ij}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\delta_j}{x_{ij}}$$

$$p_i = \delta_i b'_{(i,i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \delta_j b'_{(i,j)}$$

$$(p) = (b')(\delta)$$

Jen podélné reaktance → **b´** singulární. 1 uzel jako referenční s $\delta = 0$ → matice **b´´** o řád menší.
(DC model nepočítá ztráty, tedy netřeba slack, ale reference úhlu ano.)

$$(\delta) = (b'')^{-1}(p)$$

$$\big((u) = (g)^{-1}(i)\big)$$