## 2. Non-symmetric Catenary

Nond-symmetric catenary has generally the same shape, only ends in points of different heights.

To describe a non-symmetric catenary, we will look for such a coordination system where the equation of non-symmetric catenary is the same as for a symmetric one:

$$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c} \quad (\mathrm{m})$$

### Coordinate system origin position determination

Presume that we know the span length a, the constant c and the different of heights of suspension points h. We can than write two equations for x-coordination of suspension points $x_A$ and $x_B$ (see Fig 2.1 and use equation above for $y_A$ and $y_B$):

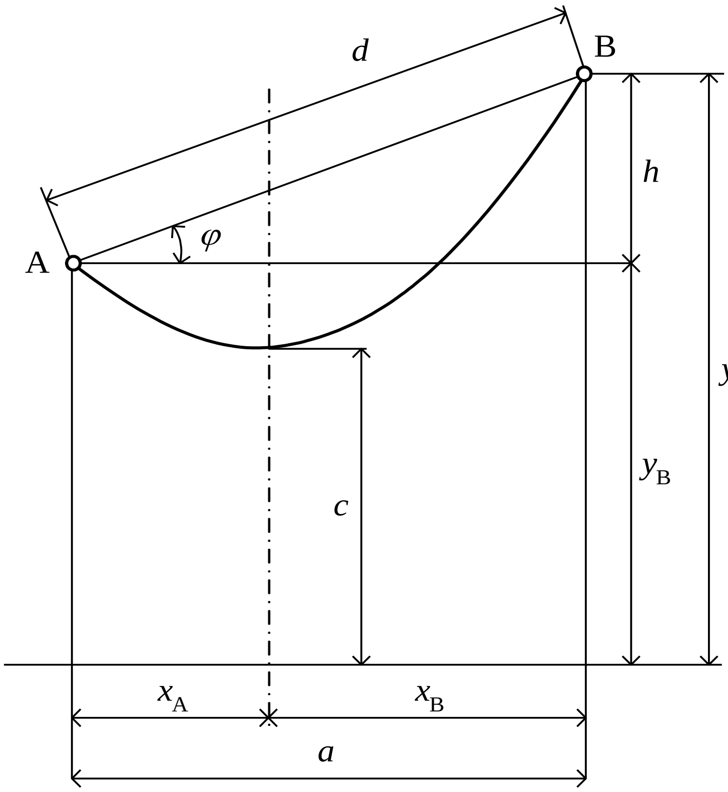



*Fig. 2.1. Position of coordination system origin*

$$x_A = a - x_B$$

$$h = c\cosh\frac{x_B}{c} - c\cosh\frac{x_A}{c}$$

We can solve this system of equations for $x_B$ (and $x_A$). At this point we know the horizontal position of axes origin. To get the vertical position we will use again equation of catenary to solve $y_B$:

$$y_B = c \cosh \frac{x_B}{c}$$

Now, the position of coordination system origin relative to the suspension points positions is defined.

## Catenary vertex position

Maximal theoretical sag $f_m$ is

$$f_m = y_B - c$$

Vertex of the catenary is between suspension points A and B if

$$h < -c + c \cosh \frac{a}{c}$$

Vertex of the catenary is in the low suspension point A if

$$h = -c + c \cosh \frac{a}{c}$$

Vertex of the catenary is not between suspension points A and B if

$$h > -c + c \cosh \frac{a}{c}$$

## Length of non-symmetric catenary

Length of wire between points A and B is

$$l_{\mathrm{AB}} = \int_{-x_{\mathrm{A}}}^{0} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{x_{\mathrm{B}}} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

Using

$$y = c\cosh\frac{x}{c}$$

$$y' = \sinh\frac{x}{c}$$

We will get formula for evaluation of length of the wire from coordinates $x_{\mathrm{A}}$ and $x_{\mathrm{B}}$ and parameter $c$:

$$l_{\mathrm{AB}} = \int_{-x_{\mathrm{A}}}^{0} \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{x_{\mathrm{B}}} \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = c\left(\sinh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c} + \sinh\frac{x_{\mathrm{A}}}{2c}\right) \quad \text{(m)}$$

However, it is possible to find a formula for $l_{\mathrm{AB}}$ that uses parameters independent on the coordinate system (parameters $c$ and dimensions $h$ and $a$). To derive the formula, let's examine the following expression:

$$\left(\frac{l_{\mathrm{AB}}}{c}\right)^2-\left(\frac{h}{c}\right)^2=\left(\sinh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c}+\sinh\frac{x_{\mathrm{A}}}{c}\right)^2-\left(\cosh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c}-\cosh\frac{x_{\mathrm{A}}}{c}\right)^2=$$

$$=-2+2\left(\cosh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c}\cdot\cosh\frac{x_{\mathrm{A}}}{c}+\sinh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c}\cdot\sinh\frac{x_{\mathrm{A}}}{c}\right)=2\cosh\left(\frac{x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{A}}}{c}\right)-2=$$

$$=4\sinh^2\left(\frac{x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{A}}}{2c}\right)=4\sinh^2\frac{a}{2c}$$

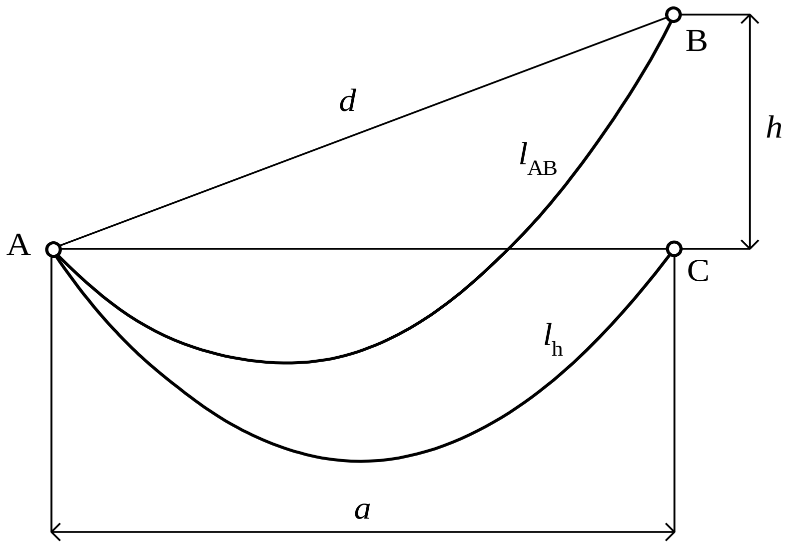
We got the enquired formula:

$$l_{\mathrm{AB}}^2=h^2+\left(2c\cdot\sinh\frac{a}{2c}\right)^2$$

The expression in brackets is length of wire in case of symmetrical catenary $l_{\mathrm{h}}$ (for the same c and a). Therefore:

$$l_{\mathrm{AB}}^2=h^2+l_{\mathrm{h}}^2$$

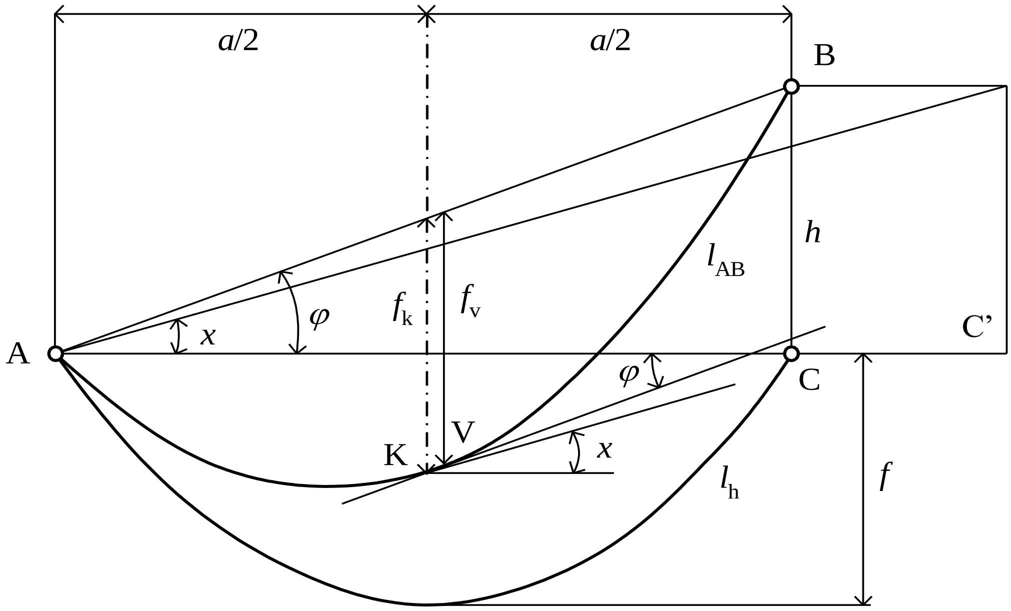
I tis called generalized Pythagorean theorem



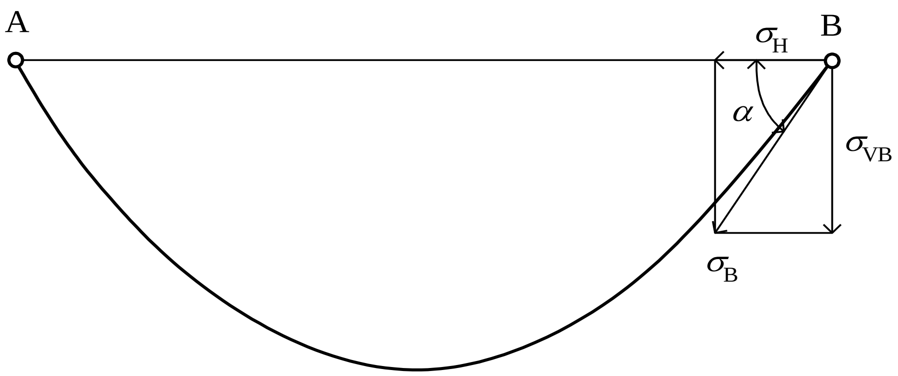

*Obr. 2.2. G*eneralized Pythagorean theorem

# Sag of non-symmetric catenary

Following sags can be defined:




*Obr. 2.3a*




*Obr. 2.3b*

*Characteristic sag:* in the middle between A and B – vertical distance between catenary and line AB.

$$x_{\mathrm{k}} = \frac{x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}}{2}$$

*Apparent sag:* It is a vertical distance between a line connecting points A and B and parallel line tangential to catenary.

$$y' = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{h}{a} = \sinh\frac{x_{\mathrm{v}}}{c}$$

$$y_{\mathrm{v}} = c \cdot \cosh\frac{x_{\mathrm{v}}}{c}$$

## 3. Stress in wire

- Horisontal component of stress is constant along a catenary.
- Vertical component of stress in a point at catenary is equal to the weight of weir between this point and vertex.
- Stress in any point at catenary has always tangential direction to the catenary.

Při výpočtu průhybu jsme zjistili, že vodorovná složka namáhání $\sigma_H$ je v každém bodě, tedy i v závěsném stejná. Výsledné namáhání $\sigma_B$ v závěsném bodě B leží ve směru tečny k řetězovce v tomto bodě.

Směr tečny svírá v závěsném bodě s osou $x$ úhel $\alpha$. Platí tedy

$$\sigma_B = \frac{\sigma_H}{\cos\alpha} \quad \text{(MPa)}$$

a pro tečnu v libovolném bodě řetězovky platí

$$y' = \mathrm{tg}\,\alpha = \sinh\frac{x}{c}$$

a v závěsném bodě $x = \dfrac{a}{2}$ můžeme psát

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sinh\frac{a}{2c}$$

úpravou dostaneme

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \cosh\frac{a}{2c}$$

Po dosazení dostaneme

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \sigma_{\mathrm{H}} \cdot \cosh\frac{a}{2c} = \sigma_{\mathrm{H}}\,\frac{y_{\mathrm{B}}}{\alpha} \quad (\mathrm{MPa})$$

z rovnice průhybu dostaneme

$$\cosh\frac{a}{2c} = \frac{f_{\mathrm{m}}}{c} + 1$$

po dosazení

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \sigma_{\mathrm{H}}\left(\frac{f_{\mathrm{m}}}{c} + 1\right) = \sigma_{\mathrm{H}} + f_{\mathrm{m}}\,\gamma z$$

Tím jsme dostali vztah pro namáhání v závěsném bodě řetězovky, který závisí pro daný vodič jen na průhybu $f_{\mathrm{m}}$.

Když vezmeme v úvahu parabolu

$$f_{\mathrm{m}} = \frac{a^2 \gamma z}{8\sigma_{\mathrm{H}}}$$

a namáhání

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \sigma_{\mathrm{H}} + \frac{a^2 \left(\gamma z\right)^2}{8\sigma_{\mathrm{H}}}$$

bude tah v závěsném bodě

$$F_{\mathrm{B}} = \sigma_{\mathrm{B}}\, S = \sigma_{\mathrm{H}} \cdot \cosh\frac{a}{2c} \cdot S = \sigma_{\mathrm{H}}\, S + f_{\mathrm{m}}\, S\, y\, z = \sigma_{\mathrm{H}} \frac{y_{\mathrm{B}}}{\mathrm{c}} S \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{B}} = y_{\mathrm{B}} \left(q_1 + q_2\right)$$

Z této rovnice je zřejmé, že tah v závěsném bodě se rovná tíze vodiče délky $y_{\mathrm{B}}$ nebo tahu ve vrcholu $F_{\mathrm{H}}$ a tíze vodiče délky rovnající se průhybu $f_{\mathrm{m}}$. Svislou složku namáhání $\sigma_{\mathrm{vB}}$ určíme z *obr. 2.3*. Platí

$$\sigma_{\mathrm{vB}} = \sigma_{\mathrm{H}} \cdot tg\, \alpha$$

$$tg\, \alpha = \sinh\frac{x}{c}$$

a v závěsném bodě

$$tg\, \alpha = \sinh\frac{a}{2c}$$

tedy

$$\sigma_{\mathrm{vB}} = \sigma_{\mathrm{H}} \cdot \sinh \frac{a}{2c}$$

kde je podle (2.45) délka řetězovky

$$l_{\mathrm{s}} = 2c \cdot \sinh \frac{a}{2c}$$

Dosazením

$$\sigma_{\mathrm{vB}} = \sigma_{\mathrm{H}} \frac{l_{\mathrm{s}}}{2c} = \sigma_{\mathrm{H}} \frac{l_{\mathrm{s}} \gamma z}{2\sigma_{\mathrm{H}}} = \frac{l_{\mathrm{s}} \gamma z}{2} \qquad (2.61)$$

svislou složku tahu určíme z namáhání

$$F_{\mathrm{B}} = S\,\sigma_{\mathrm{vB}} = S\,\sigma_{\mathrm{H}} \cdot \sinh \frac{a}{2c}$$

$$F_{\mathrm{vB}} = \frac{S\,l_{\mathrm{s}} \gamma z}{2} = \frac{l_{\mathrm{s}} \left(q_1 + q_2\right)}{2} = \frac{a\left(q_1 + q_2\right)}{2}$$

Svislý tah v závěsném bodě se rovná tíze poloviční délky vodiče, zvětšené o přídavné zatížení. Všechny tyto vztahy platí pro řetězovku i parabolu.

Jen tehdy, je-li v závěsném bodě vodiče mechanické napětí alespoň o 4 % větší než v bodě průhybové křivky, je nutné uvažovat mechanické napětí v závěsném bodě. Tento případ nastává u velkých rozpětí nebo při velkém převýšení závěsů.

# 4. Odvození stavové rovnice

Předchozí výpočty vznikly za předpokladu, že namáhání napnutého vodiče je konstantní. Ve skutečnosti se však namáhání mění vlivem teploty, námrazku a větru. Jsme v oblasti konstantního průřezu, tzn. platí Hookův zákon.

Nyní uvažujeme dva stavy vedení. Počáteční stav označíme indexem 0 a nový stav označíme indexem 1. Změna délky vodiče $\Delta l_\vartheta$ (m) vlivem změny teploty se určí ze vztahu

$$\Delta l_\vartheta = \alpha\, l_0 \left(\vartheta_1 + \vartheta_0\right) \qquad \Delta l_\vartheta > 0 \text{ pro } \vartheta_1 > \vartheta_0$$

$\alpha$ - činitel délkové tepelné roztažnosti lana ( $°C^{-1}$ ),

$l_0$ - původní délka zavěšeného vodiče (m),

$\vartheta_0$ - původní teplota vodiče ( $°C^{-1}$ ),

$\vartheta_1$ - nová teplota vodiče ( $°C^{-1}$ ).

Změna délky vodiče $\Delta l_\sigma$ (m) vlivem změny namáhání

$$\Delta l_\sigma = \frac{l_0}{E}\left(\sigma_{H1} + \sigma_{H0}\right) \qquad \Delta l_\sigma < 0 \text{ pro } \sigma_{H1} < \sigma_{H0}$$

$E$ - modul pružnosti vodiče (MPa),

$\sigma_{H0}$ - horizontální složka namáhání vodiče v původním stavu (MPa),

$\sigma_{H1}$ - horizontální složka namáhání vodiče v novém stavu (MPa).

Celková změna z $l_0$ na $l_1$ se určí podle vzorce

$$\Delta l = l_1 - l_0 = \Delta l_\vartheta + \Delta l_\sigma = l_0 \left[ \alpha\left(\vartheta_1 - \vartheta_0\right) + \frac{1}{E}\left(\sigma_{H1} - \sigma_{H0}\right) \right]$$

Délka lana zavěšeného mezi dvěma stožáry při stavu $k$ se vypočte podle vzorce

$$l_k = a + \frac{a^3 \gamma_k^2}{24\sigma_{Hk}^2}$$

$a$ – rozpětí (m).

$\gamma$ - měrná tíha 1 m vodiče ($\mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{-1}$).

Změna délky vlivem změny namáhání se vypočte podle vzorce

$$\Delta l = l_1 - l_0 = \frac{a^3}{24}\left( \frac{\gamma_1^2}{\sigma_{H1}^2} - \frac{\gamma_0^2}{\sigma_{H0}^2} \right)$$

Porovnáním výše uvedených rovnic dostaneme stavovou rovnici

$$l_0\left[\alpha\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)+\frac{1}{E}\left(\sigma_{H1}-\sigma_{H0}\right)\right]=\frac{a^3}{24}\left(\frac{\gamma_1^2}{\sigma_{H1}^2}-\frac{\gamma_0^2}{\sigma_{H0}^2}\right)$$

Protože lze přibližně uvažovat

$$l_0 = a$$

potom lze psát stavovou rovnici ve tvaru

$$\alpha\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)+\frac{1}{E}\left(\sigma_{H1}-\sigma_{H0}\right)=\frac{a^2}{24}\left(\frac{\gamma_1^2}{\sigma_{H1}^2}-\frac{\gamma_0^2}{\sigma_{H0}^2}\right)$$

a po úpravě do tvaru kubické rovnice pro výpočet namáhání nového stavu 1

$$\sigma_{H1}^3+\sigma_{H1}^2\left[\frac{E\,a^2\,\gamma_0^2}{24\sigma_{H0}^2}+\alpha E\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)-\sigma_{H0}\right]-\frac{a^2\,\gamma_1^2\,E}{24}=0$$

Pro praxi se $\gamma_0$ a $\gamma_1$ nahradí pomocí měrné tíhy vodiče $\gamma_v$ a přetížení vodiče s pomocí následujících rovnic

$$\gamma_1=\gamma_v\,z_1 \qquad \gamma_2=\gamma_v\,z_2$$

potom stavová rovnice přejde na tvar

$$\sigma_{H1}^3+\sigma_{H1}^2\left[\frac{E\,\gamma_v^2}{24}\left(\frac{a\,z_0}{\sigma_{H0}}\right)^2+\alpha E\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)-\sigma_{H0}\right]-\frac{E\,\gamma_v^2}{24}\left(a\,z_1\right)^2=0$$