

3. Cvičení

Výpočet ustáleného chodu soustavy pomocí Newton-Raphsonovy iterační metody

Pro odvození použití Newton-Raphsonovy iterační metody si uvedeme základní vztah pro uzlové výkony dle rovnice (1), tentokrát v maticovém zápisu. Index n značí počet uzlů. Jedná se o *jednofázovou náhradu, resp. o použití sdružených napětí v trojfázovém systému*.

$$[\hat{S}] = [\hat{U}_{diag}][\hat{I}^*] = [\hat{U}_{diag}][\hat{Y}^*][\hat{U}^*] \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{U}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{U}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Y}_{1,1}^* & \hat{Y}_{1,2}^* & \dots & \hat{Y}_{1,n}^* \\ \hat{Y}_{2,1}^* & \hat{Y}_{2,2}^* & \dots & \hat{Y}_{2,n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{Y}_{n,1}^* & \hat{Y}_{n,2}^* & \dots & \hat{Y}_{n,n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_1^* \\ \hat{U}_2^* \\ \vdots \\ \hat{U}_n^* \end{bmatrix}$$

Roznásobením matice z rovnice (1) získáme obecný vztah pro zdánlivý výkon i -tého uzlu dle rovnice (2).

$$\hat{S}_i = \hat{U}_i \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{i,j}^* \hat{U}_j^* \quad (2)$$

Napětí a admitance z admitanční matice si vyjádříme v exponenciálním tvaru dle (3) a (4).

$$\hat{U}_i = |\hat{U}_i| e^{j \text{Arg}(\hat{U}_i)} = U_i e^{j \delta_i} \quad (3)$$

$$\hat{Y}_{i,j} = |\hat{Y}_{i,j}| e^{j \text{Arg}(\hat{Y}_{i,j})} = Y_{i,j} e^{j \varepsilon_{i,j}} \quad (4)$$

Rovnice (3) a (4) dosadíme do rovnice (2) a dostaneme upravený vztah pro zdánlivé výkony v uzlech (5).

$$\hat{S}_i = U_i e^{j \delta_i} \sum_{j=1}^n Y_{i,j} e^{-j \varepsilon_{i,j}} * U_j e^{-j \delta_j} = U_i \sum_{j=1}^n Y_{i,j} * U_j * e^{j(\delta_i - \delta_j - \varepsilon_{i,j})} \quad (5)$$

V této fázi je ještě potřebné vyjádřit činný a jalový výkon. Nejprve však použijeme rovnici (6). Cosinus bude udávat činný výkon a sinus jalový výkon dle (7) a (8).

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j * \sin(\varphi) \quad (6)$$

$$P_i = U_i \sum_{j=1}^n Y_{i,j} * U_j * \cos(\delta_i - \delta_j - \varepsilon_{i,j}) \quad (7)$$

$$Q_i = U_i \sum_{j=1}^n Y_{i,j} * U_j * \sin(\delta_i - \delta_j - \varepsilon_{i,j}) \quad (8)$$

Dále budeme pro sestavení metody potřebovat sestavit Jakobiho funkcionální matici. Při určitém zjednodušení si uvedeme základní pravidla sestavení této matice:

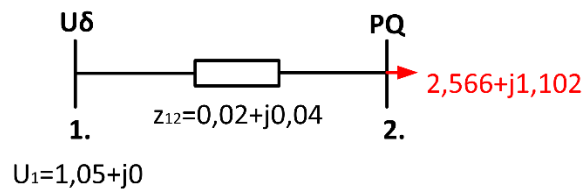
1. **Prvky matice jsou tvořeny vždy parciálními derivacemi známých uzlových činných a jalových výkonů dle neznámých velikostí a fází napětí.**
2. Za PU uzel vystupuje v Jakobiánu činný výkon. Tento činný výkon a všechny ostatní zadané výkony se derivují dle fáze napětí v PU uzlu.
3. Za PQ uzel vystupuje v Jakobiánu činný i jalový výkon. Tento činný i jalový výkon a všechny ostatní zadané výkony se derivují dle fáze napětí v PQ uzlu a velikosti napětí v PQ uzlu.
4. Za U0 uzel (slack) se do Jakobiánu nedostávají žádné veličiny (na základě pravidla 1).

Pro shrnutí potřebných kroků si uveďme postup:

1. Odhad neznámých U^k a δ^k v nultém kroku $k = 0$
2. Výpočet známých výkonů P^k a Q^k za pomoci odhadnutých hodnot U^k a δ^k
3. Výpočet defektu výkonů $\Delta P Q^k = P Q_{\text{zadané}} - P Q^k$
4. Sestavení Jakobiánu z obecných vztahů výkonů
5. Inverzní matice Jakobiánu
6. $\Delta \delta U^k = J^{-1} \cdot \Delta P Q^k$
7. $\delta U^{k+1} = \delta U^k + \Delta \delta U^k$

Řešení problému uzlů U δ a PQ

Jako nejzákladnější příklad si zvolíme dvojuzlovou síť, kde jeden uzel bude typu U δ (slack) a druhý bude PQ. Síť je specifikována na obrázku 1, parametry jsou uvedeny v poměrných jednotkách.



Obr. 1: Specifikace zadané sítě

Jakobián pro tuto soustavu (9) bude dle pravidla 3 rozměru 2x2 a bude složen z parciálních derivací činného a jalového výkonu druhého uzlu dle příslušných fází a velikostí uzlových napětí.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^k \\ \Delta Q_2^k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2^k}{\partial U_2} \\ \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2^k}{\partial U_2} \end{bmatrix}}_{[J^k]} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^k \\ \Delta U_2^k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^k \\ \Delta U_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2^k}{\partial U_2} \\ \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2^k}{\partial U_2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta P_2^k \\ \Delta Q_2^k \end{bmatrix} \quad (9)$$

Pomocí (7) a (8) si nejprve vyjádříme obecné vztahy pro činné a jalové výkony druhého uzlu (10) a (11).

$$P_2^k = U_1 U_2^k Y_{2,1} \cos(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) + (U_2^k)^2 Y_{2,2} \cos(\varepsilon_{2,2}) \quad (10)$$

$$Q_2^k = U_1 U_2^k Y_{2,1} \sin(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) - (U_2^k)^2 Y_{2,2} \sin(\varepsilon_{2,2}) \quad (11)$$

Derivací těchto výrazů pak získáme členy jakobiánu (12), (13), (14) a (15).

$$[J^k](1,1) = \frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} = -U_1 U_2^k Y_{2,1} \sin(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) \quad (12)$$

$$[J^k](1,2) = \frac{\partial P_2^k}{\partial U_2} = U_1 Y_{2,1} \cos(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) + 2 U_2^k Y_{2,2} \cos(\varepsilon_{2,2}) \quad (13)$$

$$[J^k](2,1) = \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_2} = U_1 U_2^k Y_{2,1} \cos(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) \quad (14)$$

$$[J^k](2,2) = \frac{\partial Q_2^k}{\partial U_2} = U_1 Y_{2,1} \sin(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) - 2 U_2^k Y_{2,2} \sin(\varepsilon_{2,2}) \quad (15)$$

Hodnoty ve slacku δ_1 a U_1 známe a budou tedy pro všechny iterace konstantní a rovny požadovaným hodnotám. Hodnoty dalšího kroku budou:

$$\begin{bmatrix} \Delta \delta_2^{k+1} \\ \Delta U_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2^k \\ U_2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^k \\ \Delta U_2^k \end{bmatrix} \quad (16)$$

Následuje výpočet se strukturou: číslo iterace, fáze napětí v uzlu 2, absolutní hodnota napětí v uzlu 2, napětí v uzlu 2 v komplexním tvaru, odchylka fáze napětí druhého uzlu od předešlé iterace, odchylka absolutní hodnoty napětí druhého uzlu od předešlé iterace.

Iterace	δ_2 [rad]	Abs[U_2] [p.j.]	U_2 fázor [p.j.]	ϵ_{δ_2}	ϵ_{U_2}
0	0	1	0	0	0
1	-0.0767619	0.952211	0.949407 - 0.0730217 i	-0.0767619	-0.0477895
2	-0.0812261	0.945715	0.942597 - 0.0767323 i	-0.00446418	-0.00649592
3	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	-0.0000368243	-0.000062367
4	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	-2.95309 $\times 10^{-9}$	-5.44883 $\times 10^{-9}$
5	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	1.38778 $\times 10^{-16}$	1.11022 $\times 10^{-16}$
6	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	-3.33067 $\times 10^{-16}$	0.
7	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	1.52656 $\times 10^{-16}$	1.11022 $\times 10^{-16}$
8	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	1.249 $\times 10^{-16}$	-1.11022 $\times 10^{-16}$
9	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	-3.33067 $\times 10^{-16}$	0.
10	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	1.52656 $\times 10^{-16}$	1.11022 $\times 10^{-16}$

Výpočet je možno ověřit vyjádřením požadovaných hodnot v uzlech z výsledných napětí poslední iterace. Hodnota napětí v poslední iteraci je:

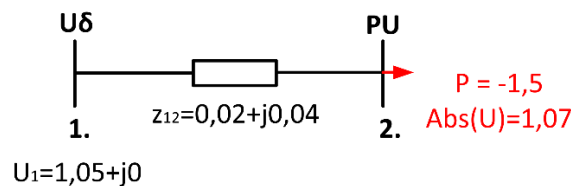
$$\hat{U}_2 = 0.942532 - 0.0767619i \text{ p.j.}$$

Výkon ve druhém uzlu je pak:

$$\hat{S}_2 = \hat{U}_2 \cdot (\hat{Y}_{1,2}(\hat{U}_2 - \hat{U}_1))^* = -2.566 - 1.102i \text{ p.j.}$$

Řešení problému uzlů U δ a PU

Jako druhý příklad si ukážeme opět výpočet ve dvojuzlové síti, kde bude uzel U δ (slack) a uzel PU. Výpočty budeme opět realizovat v poměrných jednotkách. Síť je specifikována na obrázku 2.



Obr. 2: Specifikace zadané sítě

Jakobián pro tuto soustavu (17) bude dle pravidla 2 rozměru 1x1 a bude složen z parciálních derivací činného výkonu dle fáze napětí v druhém uzlu.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} \end{bmatrix}}_{[J^k]} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta P_2^k \end{bmatrix} \quad (17)$$

Jediný prvek jakobiánu tedy bude (18):

$$[J^k] = \left[\frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} \right] = [-U_1 U_2 Y_{2,1} \sin(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1})] \quad (18)$$

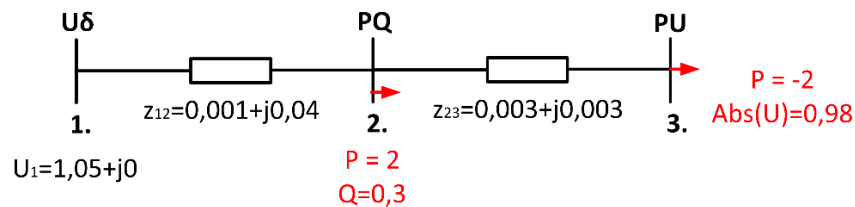
Hodnoty dalších kroků pak budou:

$$\begin{bmatrix} \Delta \delta_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^k \end{bmatrix} \quad (19)$$

Následuje výpočet se strukturou: číslo iterace, fáze napětí v uzlu 2, napětí v uzlu 2 v komplexním tvaru, odchylka fáze napětí druhého uzlu od předešlé iterace.

Iterace	δ_2 [rad]	U_2 fázor [p.j.]	ϵ_{δ_2}
0	0	0	0
1	-0.0762795	1.06689 - 0.0815399 i	-0.0762795
2	-0.0778727	1.06676 - 0.0832396 i	-0.00159323
3	-0.0778735	1.06676 - 0.0832404 i	-7.62063×10^{-7}
4	-0.0778735	1.06676 - 0.0832404 i	-1.74277×10^{-13}
5	-0.0778735	1.06676 - 0.0832404 i	-2.63678×10^{-16}
6	-0.0778735	1.06676 - 0.0832404 i	2.63678×10^{-16}
7	-0.0778735	1.06676 - 0.0832404 i	-2.63678×10^{-16}
8	-0.0778735	1.06676 - 0.0832404 i	2.63678×10^{-16}
9	-0.0778735	1.06676 - 0.0832404 i	-2.63678×10^{-16}
10	-0.0778735	1.06676 - 0.0832404 i	2.63678×10^{-16}

Řešení problému tří uzlů U δ , PQ a PU



Obr. 7: Specifikace zadané sítě

Jakobián pro tuto soustavu (20) bude dle pravidel 2 a 3 rozměru 3x3:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^k \\ \Delta P_3^k \\ \Delta Q_2^k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_2^k}{\partial U_2} \\ \frac{\partial P_3^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_3^k}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_3^k}{\partial U_2} \\ \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_3} & \frac{\partial Q_2^k}{\partial U_2} \end{bmatrix}}_{[J^k]}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^k \\ \Delta \delta_3^k \\ \Delta U_2^k \end{bmatrix} \quad (20)$$

Nejprve si pomocí (7) a (8) vyjádříme obecné vzorce pro požadované činné a jalové výkony v uzlech:

$$P_2^k = U_1 U_2^k Y_{2,1} \cos(\delta_2^k - \delta_1 - \epsilon_{2,1}) + (U_2^k)^2 Y_{2,2} \cos(\epsilon_{2,2}) + U_2^k U_3 Y_{2,3} \cos(\delta_2^k - \delta_3^k - \epsilon_{2,3}) \quad (21)$$

$$P_3^k = \underbrace{U_1 U_3 Y_{3,1} \cos(\delta_3^k - \delta_1 - \epsilon_{3,1})}_0 + U_2^k U_3 Y_{3,2} \cos(\delta_3^k - \delta_2^k - \epsilon_{3,2}) + U_3^2 Y_{3,3} \cos(\epsilon_{3,3}) \quad (22)$$

$$Q_2^k = U_1 U_2^k Y_{2,1} \sin(\delta_2^k - \delta_1 - \epsilon_{2,1}) - (U_2^k)^2 Y_{2,2} \sin(\epsilon_{2,2}) + U_2^k U_3 Y_{2,3} \sin(\delta_2^k - \delta_3^k - \epsilon_{2,3}) \quad (22)$$

Obdobně jako v předchozích příkladech vyjádříme všechny potřebné parciální derivace pro sestavení jakobiánu (20). Iteraci k+1 kroku pak vyjádříme jako:

$$\begin{bmatrix} \Delta \delta_2^{k+1} \\ \Delta \delta_3^{k+1} \\ \Delta U_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2^k \\ \delta_3^k \\ U_2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^k \\ \Delta \delta_3^k \\ \Delta U_2^k \end{bmatrix} \quad (23)$$

Následuje výpočet se strukturou: číslo iterace, fáze napětí v uzlu 2, fáze napětí v uzlu 3, absolutní hodnota napětí v uzlu 2, napětí v uzlu 2 v komplexním tvaru, napětí v uzlu 3 v komplexním tvaru.

Iterace	δ_2 [rad]	δ_3 [rad]	Abs[U_2] [p.j.]	$U_{2\text{ fazor}}$ [p.j.]	$U_{3\text{ fazor}}$ [p.j.]
0	0	0	1	0	0
1	0.00457662	0.0154033	0.978582	$0.978572 + 0.00447858 i$	$0.979884 + 0.0150946 i$
2	0.000971073	0.011716	0.978323	$0.978323 + 0.000950023 i$	$0.979933 + 0.0114814 i$
3	0.000969574	0.011714	0.978323	$0.978322 + 0.000948556 i$	$0.979933 + 0.0114794 i$
4	0.000969574	0.011714	0.978323	$0.978322 + 0.000948556 i$	$0.979933 + 0.0114794 i$
5	0.000969574	0.011714	0.978323	$0.978322 + 0.000948556 i$	$0.979933 + 0.0114794 i$
6	0.000969574	0.011714	0.978323	$0.978322 + 0.000948556 i$	$0.979933 + 0.0114794 i$
7	0.000969574	0.011714	0.978323	$0.978322 + 0.000948556 i$	$0.979933 + 0.0114794 i$
8	0.000969574	0.011714	0.978323	$0.978322 + 0.000948556 i$	$0.979933 + 0.0114794 i$
9	0.000969574	0.011714	0.978323	$0.978322 + 0.000948556 i$	$0.979933 + 0.0114794 i$
10	0.000969574	0.011714	0.978323	$0.978322 + 0.000948556 i$	$0.979933 + 0.0114794 i$