3. Cvičení

Výpočet ustáleného chodu soustavy pomocí Newton-Raphsonovy iterační metody

Pro odvození použití Newton-Raphsonovy iterační metody si uvedeme základní vztah pro uzlové výkony dle rovnice (1), tentokrát v maticovém zápisu. Index *n* značí počet uzlů. Jedná se o *jednofázovou náhradu, resp. o použití sdružených napětí v trojfázovém systému*.

$$[\hat{S}] = [\hat{U}_{diag}][\hat{I}^*] = [\hat{U}_{diag}][\hat{Y}^*][\hat{U}^*] \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{U}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{U}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Y}^*_{1,1} & \hat{Y}^*_{1,2} & \dots & \hat{Y}^*_{1,n} \\ \hat{Y}^*_{2,1} & \hat{Y}^*_{2,2} & \dots & \hat{Y}^*_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{Y}^*_{n,1} & \hat{Y}^*_{n,2} & \dots & \hat{Y}^*_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}^*_1 \\ \hat{U}^*_2 \\ \vdots \\ \hat{U}^*_n \end{bmatrix}$$

Roznásobením matice z rovnice (1) získáme obecný vztah pro zdánlivý výkon i-tého uzlu dle rovnice (2).

$$\hat{S}_i = \hat{U}_i \sum_{j=1}^{n} \hat{Y}^*_{i,j} \hat{U}^*_j \tag{2}$$

Napětí a admitance z admitanční matice si vyjádříme v exponenciálním tvaru dle (3) a (4).

$$\hat{U}_i = |\hat{U}_i| e^{j*\mathrm{Arg}(\hat{U}_i)} = U_i e^{j\delta_i} \tag{3}$$

$$\hat{Y}_{i,j} = |\hat{Y}_{i,j}| e^{j*\mathrm{Arg}(\hat{Y}_{i,j})} = Y_{i,j} e^{j\varepsilon_{i,j}} \tag{4}$$

Rovnice (3) a (4) dosadíme do rovnice (2) a dostaneme upravený vztah pro zdánlivé výkony v uzlech (5).

$$\hat{S}_i = U_i e^{j\delta_i} \sum_{j=1}^{n} Y_{i,j} e^{-j\varepsilon_{i,j}} * U_j e^{-j\delta_j} = U_i \sum_{j=1}^{n} Y_{i,j} * U_j * e^{j(\delta_i - \delta_j - \varepsilon_{i,j})} \tag{5}$$

V této fázi je ještě potřebné vyjádřit činný a jalový výkon. Nejprve však použijeme rovnici (6). Cosinus bude udávat činný výkon a sinus jalový výkon dle (7) a (8).

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j * \sin(\varphi) \tag{6}$$

$$P_i = U_i \sum_{j=1}^{n} Y_{i,j} * U_j * \cos(\delta_i - \delta_j - \varepsilon_{i,j}) \tag{7}$$

$$Q_i = U_i \sum_{j=1}^{n} Y_{i,j} * U_j * \sin(\delta_i - \delta_j - \varepsilon_{i,j}) \tag{8}$$

Dále budeme pro sestavení metody potřebovat sestavit Jakobiho funkcionální matici. Při určitém zjednodušení si uvedeme základní pravidla sestavení této matice:

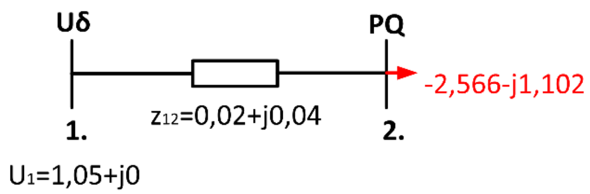
1. **Prvky matice jsou tvořeny vždy parciálními derivacemi <u>známých</u> uzlových činných a jalových výkonů dle <u>neznámých</u> velikostí a fází napětí.**
2. **Za PU uzel vystupuje v Jakobiánu činný výkon. Tento činný výkon a všechny ostatní zadané výkony se derivují dle fáze napětí v PU uzlu.**
3. **Za PQ uzel vystupuje v Jakobiánu činný i jalový výkon. Tento činný i jalový výkon a všechny ostatní zadané výkony se derivují dle fáze napětí v PQ uzlu a velikosti napětí v PQ uzlu.**
4. **Za Uδ uzel (slack) se do Jakobiánu nedostávají žádné veličiny (na základě pravidla 1).**

Pro shrnutí potřebných kroků si uveďme postup:

1. Odhad neznámých U^k a δ^k v nultém kroku k = 0
2. Výpočet známých výkonů P^k a Q^k za pomocí odhadnutých hodnot U^k a δ^k
3. Výpočet defektu výkonů $\Delta PQ^k = PQ_{zadané} - PQ^k$
4. Sestavení Jakobiánu z obecných vztahů výkonů
5. Inverzní matice Jakobiánu
6. $\Delta\delta U^k = J^{-1}.\Delta PQ^k$
7. $\delta U^{k+1} = \delta U^k + \Delta\delta U^k$

Řešení problému uzlů Uδ a PQ

Jako nejzákladnější příklad si zvolíme dvojuzlovou síť, kde jeden uzel bude typu Uδ (slack) a druhý bude PQ. Síť je specifikována na obrázku 1, parametry jsou uvedeny v poměrných jednotkách.



Obr. 1: Specifikace zadané sítě

Jakobián pro tuto soustavu (9) bude dle pravidla 3 rozměru 2x2 a bude složen z parciálních derivací činného a jalového výkonu druhého uzlu dle příslušných fází a velikostí uzlových napětí.

$$\begin{bmatrix}\Delta P_2^k \\ \Delta Q_2^k\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2^k}{\partial U_2} \\ \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2^k}{\partial U_2}\end{bmatrix}}_{[J^k]} \cdot \begin{bmatrix}\Delta \delta_2^k \\ \Delta U_2^k\end{bmatrix} => \begin{bmatrix}\Delta \delta_2^k \\ \Delta U_2^k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2^k}{\partial U_2} \\ \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2^k}{\partial U_2}\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}\Delta P_2^k \\ \Delta Q_2^k\end{bmatrix} \tag{9}$$

Pomocí (7) a (8) si nejprve vyjádříme obecné vztahy pro činné a jalové výkony druhého uzlu (10) a (11).

$$P_2^k = U_1 U_2^k Y_{2,1} \cos(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) + (\mathrm{U}_2^k)^2 Y_{2,2} \cos(\varepsilon_{2,2}) \tag{10}$$

$$Q_2^k = U_1 U_2^k Y_{2,1} \sin(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) - (\mathrm{U}_2^k)^2 Y_{2,2} \sin(\varepsilon_{2,2}) \tag{11}$$

Derivací těchto výrazů pak získáme členy jakobiánu (12), (13), (14) a (15).

$$[J^k](1,1) = \frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} = -U_1 U_2^k Y_{2,1} \sin(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) \tag{12}$$

$$[J^k](1,2) = \frac{\partial P_2^k}{\partial U_2} = U_1 Y_{2,1} \cos(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) + 2\, U_2^k Y_{2,2} \cos(\varepsilon_{2,2}) \tag{13}$$

$$[J^k](2,1) = \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_2} = U_1 U_2^k Y_{2,1} cos(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) \tag{14}$$

$$[J^k](2,2) = \frac{\partial Q_2^k}{\partial U_2} = U_1 Y_{2,1} \sin(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}) - 2\, U_2^k Y_{2,2} \sin(\varepsilon_{2,2}) \tag{15}$$

Hodnoty ve slacku δ_1 a U_1 známe a budou tedy pro všechny iterace konstantní a rovny požadovaným hodnotám. Hodnoty dalšího kroku budou:

$$\begin{bmatrix}\Delta\delta_2^{k+1}\\ \Delta U_2^{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\delta_2^{k}\\ U_2^{k}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Delta\delta_2^{k}\\ \Delta U_2^{k}\end{bmatrix} \tag{16}$$

Následuje výpočet se strukturou: číslo iterace, fáze napětí v uzlu 2, absolutní hodnota napětí v uzlu 2, napětí v uzlu 2 v komplexním tvaru, odchylka fáze napětí druhého uzlu od předešlé iterace, odchylka absolutní hodnoty napětí druhého uzlu od předešlé iterace.

Iterace	δ_2 [rad]	Abs[U_2] [p.j.]	$U_{2\,fazor}$ [p.j.]	ϵ_{δ_2}	ϵ_{U_2}
0	0	1	0	0	0
1	-0.0767619	0.952211	0.949407 - 0.0730217 i	-0.0767619	-0.0477895
2	-0.0812261	0.945715	0.942597 - 0.0767323 i	-0.00446418	-0.00649592
3	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	-0.0000368243	-0.000062367
4	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	-2.95309×10^{-9}	-5.44883×10^{-9}
5	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	1.38778×10^{-16}	1.11022×10^{-16}
6	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	-3.33067×10^{-16}	0.
7	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	1.52656×10^{-16}	1.11022×10^{-16}
8	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	1.249×10^{-16}	-1.11022×10^{-16}
9	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	-3.33067×10^{-16}	0.
10	-0.0812629	0.945652	0.942532 - 0.0767619 i	1.52656×10^{-16}	1.11022×10^{-16}

Výpočet je možno ověřit vyjádřením požadovaných hodnot v uzlech z výsledných napětí poslední iterace. Hodnota napětí v poslední iteraci je:

$$\hat{U}_2 = 0.942532 - 0.0767619i\ p.j$$

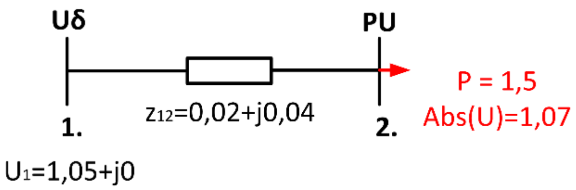
Výkony v uzlech jsou pak:

$$\hat{S}_1 = \hat{U}_1 \cdot \left(\hat{Y}_{1,2}(\hat{U}_1 - \hat{U}_2)\right)^* = 2.74 + 1.45i\ p.j.$$

$$\hat{S}_2 = \hat{U}_2 \cdot \left(\hat{Y}_{1,2}(\hat{U}_2 - \hat{U}_1)\right)^* = -2.566 - 1.102i\ p.j.$$

Řešení problému uzlů Uδ a PU

Jako druhý příklad si ukážeme opět výpočet ve dvojuzlové síti, kde bude uzel Uδ (slack) a uzel PU. Výpočty budeme opět realizovat v poměrných jednotkách. Síť je specifikována na obrázku 2.



Obr. 2: Specifikace zadané sítě

Jakobián pro tuto soustavu (17) bude dle pravidla 2 rozměru 1x1 a bude složen z parciálních derivací činného výkonu dle fáze napětí v druhém uzlu.

$$[\Delta P_2^k] = \underbrace{\left[\frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2}\right]}_{[J^k]} \cdot [\Delta\delta_2^k] => [\Delta\delta_2^k] = \left[\frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2}\right]^{-1} \cdot [\Delta P_2^k] \tag{17}$$

Jediný prvek jakobiánu tedy bude (18):

$$[J^k] = \left[\frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2}\right] = \left[-U_1 U_2 Y_{2,1} \sin\left(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}\right)\right] \tag{18}$$

Hodnoty dalších kroků pak budou:

$$\left[\Delta\delta_2^{k+1}\right] = \left[\delta_2^k\right] + \left[\Delta\delta_2^k\right] \tag{19}$$

Následuje výpočet se strukturou: číslo iterace, fáze napětí v uzlu 2, napětí v uzlu 2 v komplexním tvaru, odchylka fáze napětí druhého uzlu od předešlé iterace.

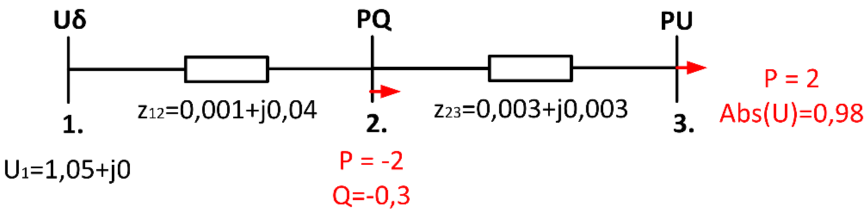
Iterace	δ_2 [rad]	$U_{2\,fazor}$ [p.j.]	ϵ_{δ_2}
0	0	0	0
1	0.0572319	1.06825 + 0.0612047 i	0.0572319
2	0.0564651	1.06829 + 0.0603856 i	-0.000766736
3	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	-1.26623×10^{-7}
4	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	-3.37924×10^{-15}
5	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	-8.32667×10^{-17}
6	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	-8.32667×10^{-17}
7	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	1.66533×10^{-16}
8	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	-8.32667×10^{-17}
9	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	-8.32667×10^{-17}
10	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	1.66533×10^{-16}

Výkony v uzlech jsou pak:

$$\hat{S}_1 = \hat{U}_1 \cdot \left(\hat{Y}_{1,2}\left(\hat{U}_1 - \hat{U}_2\right)\right)^* = -1.46 + 0.25i\ p.j.$$

$$\hat{S}_2 = \hat{U}_2 \cdot \left(\hat{Y}_{1,2}\left(\hat{U}_2 - \hat{U}_1\right)\right)^* = 1.5 - 0.17i\ p.j.$$

Řešení problému tří uzlů Uδ, PQ a PU



Obr. 7: Specifikace zadané sítě

Jakobián pro tuto soustavu (20) bude dle pravidel 2 a 3 rozměru 3x3:

$$\begin{bmatrix}\Delta P_2^k\\ \Delta P_3^k\\ \Delta Q_2^k\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2^k}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_2^k}{\partial U_2}\\ \frac{\partial P_3^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_3^k}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_3^k}{\partial U_2}\\ \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2^k}{\partial \delta_3} & \frac{\partial Q_2^k}{\partial U_2}\end{bmatrix}^{-1}}_{[J^k]} \cdot \begin{bmatrix}\Delta \delta_2^k\\ \Delta \delta_3^k\\ \Delta U_2^k\end{bmatrix} \tag{20}$$

Nejprve si pomocí (7) a (8) vyjádříme obecné vzorce pro požadované činné a jalové výkony v uzlech:

$$P_2^k = U_1 U_2^k Y_{2,1}\cos\left(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}\right) + \left(\mathrm{U}_2^k\right)^2 Y_{2,2}\cos\left(\varepsilon_{2,2}\right) + U_2^k U_3 Y_{2,3}\cos\left(\delta_2^k - \delta_3^k - \varepsilon_{2,3}\right) \tag{21}$$

$$P_3^k = \underbrace{U_1 U_3 Y_{3,1}\cos\left(\delta_3^k - \delta_1 - \varepsilon_{3,1}\right)}_{0} + U_2^k U_3 Y_{3,2}\cos\left(\delta_3^k - \delta_2^k - \varepsilon_{3,2}\right) + U_3^2 Y_{3,3}\cos\left(\varepsilon_{3,3}\right) \tag{22}$$

$$Q_2^k = U_1 U_2^k Y_{2,1}\sin\left(\delta_2^k - \delta_1 - \varepsilon_{2,1}\right) - \left(\mathrm{U}_2^k\right)^2 Y_{2,2}\sin\left(\varepsilon_{2,2}\right) + U_2^k U_3 Y_{2,3}\sin\left(\delta_2^k - \delta_3^k - \varepsilon_{2,3}\right) \tag{22}$$

Obdobně jako v předchozích příkladech vyjádříme všechny potřebné parciální derivace pro sestavení jakobiánu (20). Iteraci k+1 kroku pak vyjádříme jako:

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_2^{k+1} \\ \Delta\delta_3^{k+1} \\ \Delta U_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2^{k} \\ \delta_3^{k} \\ U_2^{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\delta_2^{k} \\ \Delta\delta_3^{k} \\ \Delta U_2^{k} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Následuje výpočet se strukturou: číslo iterace, fáze napětí v uzlu 2, fáze napětí v uzlu 3, absolutní hodnota napětí v uzlu 2, napětí v uzlu 2 v komplexním tvaru, napětí v uzlu 3 v komplexním tvaru.

Iterace	δ_2 [rad]	δ_3 [rad]	Abs[U_2] [p.j.]	$U_{2\,fazor}$ [p.j.]	$U_{3\,fazor}$ [p.j.]
0	0	0	1	0	0
1	0.00457662	0.0154033	0.978582	0.978572 + 0.00447858 i	0.979884 + 0.0150946 i
2	0.000971073	0.011716	0.978323	0.978323 + 0.000950023 i	0.979933 + 0.0114814 i
3	0.000969574	0.011714	0.978323	0.978322 + 0.000948556 i	0.979933 + 0.0114794 i
4	0.000969574	0.011714	0.978323	0.978322 + 0.000948556 i	0.979933 + 0.0114794 i
5	0.000969574	0.011714	0.978323	0.978322 + 0.000948556 i	0.979933 + 0.0114794 i
6	0.000969574	0.011714	0.978323	0.978322 + 0.000948556 i	0.979933 + 0.0114794 i
7	0.000969574	0.011714	0.978323	0.978322 + 0.000948556 i	0.979933 + 0.0114794 i
8	0.000969574	0.011714	0.978323	0.978322 + 0.000948556 i	0.979933 + 0.0114794 i
9	0.000969574	0.011714	0.978323	0.978322 + 0.000948556 i	0.979933 + 0.0114794 i
10	0.000969574	0.011714	0.978323	0.978322 + 0.000948556 i	0.979933 + 0.0114794 i