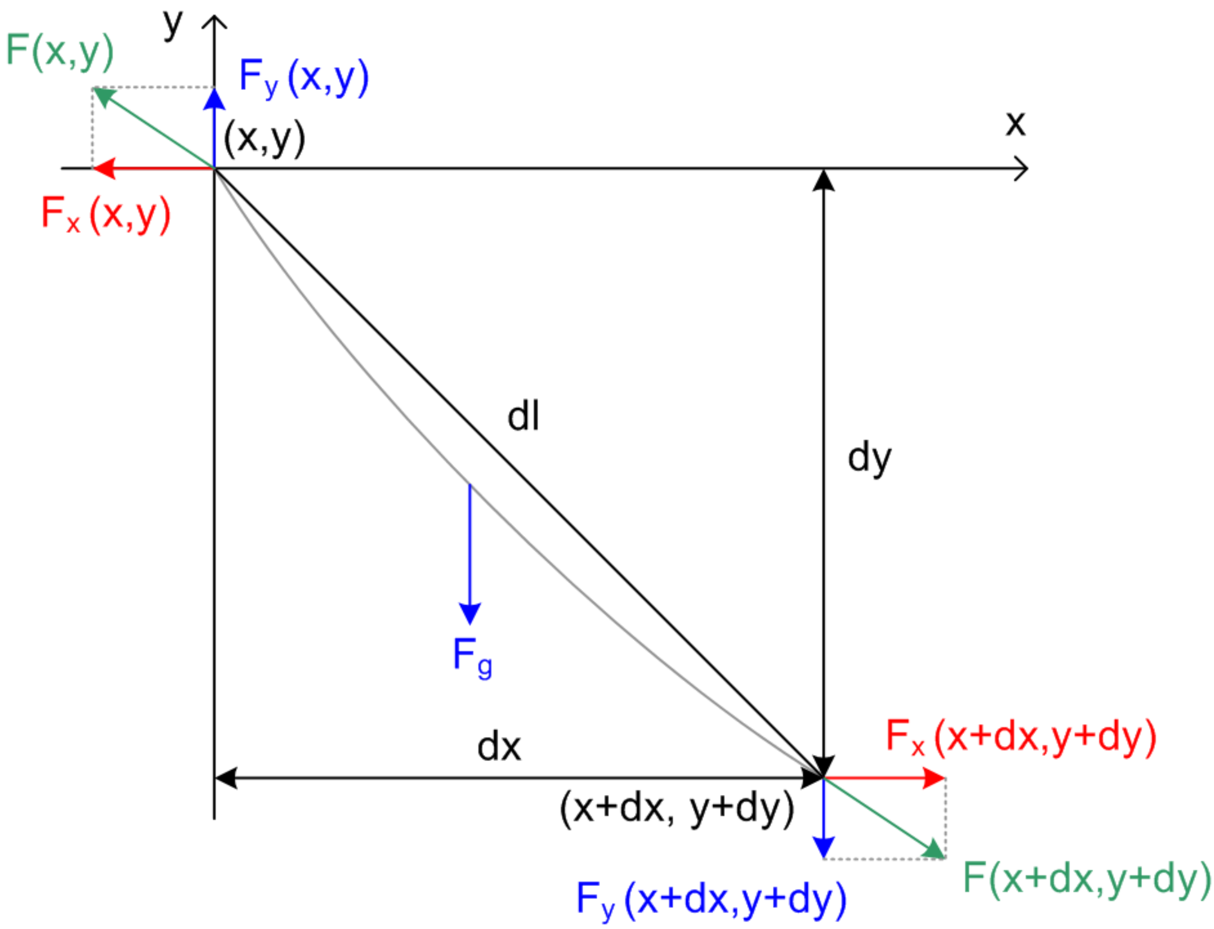
Odvození rovnice řetězovky

Předpoklady:

- lano je dokonale pružné, bez prodloužení
- vybraný element je tak krátký, že lze nahradit úsečkou



- vyjádření elementu délky lana:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = dx\sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

- gravitační síla působící na element lana:

$$F_g = \rho_L.g.dl = \rho_L.g.\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

kde ρ_L je „délková hustota“ vodiče (kg/m)

- síly ve směru osy x:

$$F_x(x,y) = F_x(x+dx, y+dy)$$
$$F_x(x, y(x)) = F_x(x+dx, y(x+dx))$$
$$f_x(x) = f_x(x) + \frac{df_x(x)}{dx}dx$$
$$\underline{\frac{df_x(x)}{dx} = 0} \qquad (1)$$

- síly ve směru osy y

$$-F_y(x,y) + F_y(x+dx, y+dy) + F_g = 0$$
$$-F_y(x, y(x)) + F_y(x+dx, y(x+dx)) + F_g = 0$$
$$-f_y(x) + f_y(x) + \frac{df_y(x)}{dx}dx + \rho_L.g.\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = 0$$
$$\frac{df_y(x)}{dx}dx + \rho_L.g.\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = 0$$
$$\underline{\frac{df_y(x)}{dx} + \rho_L.g.\sqrt{1+(y'(x))^2} = 0} \qquad (2)$$

- vyjádření momentů (momenty vztáhneme k bodu x,y):

$$\frac{dx}{2}\rho_L.g.\sqrt{1+(y'(x))^2}\cdot dx + f_y(x+dx)\cdot dx - f_x(x+dx)\cdot dy = 0$$
$$dy = y'(x+dx).dx$$
$$\frac{dx}{2}\rho_L.g.\sqrt{1+(y'(x))^2} + f_y(x+dx) - f_x(x+dx)\cdot y'(x+dx) = 0$$

$$dx \to 0$$

$$\underbrace{\frac{dx}{2}\rho_L.g.\sqrt{1+(y'(x))^2}}_{\to 0} + f_y(x+\underbrace{dx}_{\to 0}) - f_x(x+\underbrace{dx}_{\to 0})\cdot y'(x+\underbrace{dx}_{\to 0}) = 0$$

$$\underline{f_y(x) - f_x(x)\cdot y'(x) = 0} \qquad (3)$$

- pro model v SW Mathematica použijeme následující odvozené rovnice:

1. $\frac{df_x(x)}{dx} = 0$
2. $\frac{df_y(x)}{dx} + \rho_L.g.\sqrt{1+(y'(x))^2} = 0$
3. $f_y(x) - f_x(x)\cdot y'(x) = 0$