Označení a definice veličin.

opt	mini/maximalizace
w,T	Žádaná hodnota,transpozice,
®	relace typu ≤ nebo ≥
%	Index diagonální formy vektoru.
$\bar{\Gamma}\left(\bar{x}^*\right)$ $\bar{\epsilon}\left(\bar{x}^*\right)=\bar{0}, \bar{\mathcal{N}}\left(\bar{x}^*\right) ® \bar{0}$	Obecná omezovací podmínka podmínky typu rovnosti, nerovnosti
$\bar{\mathbf{1}}$	Sloupcový jednotkový vektor
$\bar{\mathbf{1}}_{\%}$	Jednotková matice
∂	Parciální derivace/ řád, rozměr
$\Re^{\partial \bar{x}}$	$\partial \bar{x}$ rozměrný prostor reálných čísel
$\bar{x}, \bar{y}$	Vektor veličin nezávislých/závislých
$\bar{x}_{\%}, \bar{\mu}_{\%}, \bar{\nu}_{\%}, \bar{\lambda}_{\%}$	Diagonální forma $\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\lambda}$
$\bar{x}^*, \bar{x}^{\#}$	Optimální $\bar{x}$, analytické centrum
$\bar{x}', \bar{x}'', \bar{N}', \bar{N}''$	nezáporné přídatné proměnné $\bar{x}, \bar{N}$,
$\bar{x}^L \le \bar{x} \le \bar{x}^U$,	Interval hodnot vektoru $\bar{x}$
$\bar{\mathcal{N}}^L \le \bar{\mathcal{N}}(\bar{x}) \le \bar{\mathcal{N}}^U$	Interval přípustných hodnot
$\nabla_{\bar{x}}^T \mathcal{F} = g_{\mathcal{F}}$	Gradient skalární funkce

$\mathcal{D}_x = \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} : \bar{\epsilon}(\bar{x}) = \bar{0}, \\ \bar{\mathcal{N}}(\bar{x}) ® \bar{0} \end{array} \right\}$	přípustný prostor proměnných $\bar{x}$
$\bar{\lambda}, \bar{\nu}$	Lagrangeovy-multiplikátory podmínek rovnosti a nerovnosti.
$\Phi(\bar{x}, \bar{\mu})$	Rozšířená cílová funkce
$\mathcal{P}(\theta)\ \ \mathcal{B}(\theta)$	Funkce θ pro ext. a inter. penalizaci
$\bar{\mu}_{\mathcal{P}}, \bar{\mu}_{\mathcal{B}}$,	vektory externích a interních penalizačních koeficientů
$\bar{\xi}^T = \left[\bar{x}^T, \bar{\lambda}^T, \bar{\nu}^T\right]$	složený vektor proměnných

$\nabla_{\bar{x}} f = \dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_{\partial \bar{x}}}\right]$	**derivace funkce podle** $\bar{x}$
$\nabla_{\bar{x}}^T f = \left(\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right)^T = \bar{G}(\bar{x})$	**Gradient skalární funkce**
$[J_{\mathcal{R}}] = \dfrac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_1} & \bullet & \dfrac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_{\partial \bar{x}}} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \dfrac{\partial \mathcal{R}_{\partial \Gamma}}{\partial x_1} & \bullet & \dfrac{\partial \mathcal{R}_{\partial \Gamma}}{\partial v_{\partial \bar{x}}} \end{bmatrix}$	**Jakobiova matice**
$[H] = \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla_{\bar{x}}^T f(\bar{x})$	**Hessova matice**

Ekvivalence omezujících podmínek a operací.

operace	původní tvar	nový tvar
Transformace nerovnosti na rovnost	$\mathcal{N}(\bar{x}) \le \bar{0}$	$\mathcal{N}(\bar{x}) + \mathcal{N}'' = \bar{0}, \mathcal{N}'' \ge \bar{0}$
	$\mathcal{N}(\bar{x}) \ge \bar{0}$	$\mathcal{N}(\bar{x}) - \mathcal{N}' = \bar{0}, \mathcal{N}' \ge \bar{0}$
transformace typů nerovností	$\mathcal{N}(\bar{x}) \le \bar{0}$	$-\mathcal{N}(\bar{x}) \ge \bar{0}$
	$\mathcal{N}(\bar{x}) \ge \bar{0}$	$-\mathcal{N}(\bar{x}) \le \bar{0}$
Transf. rovnosti na dvě nerovnosti	$\bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) = \bar{0}$	$\bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) \le \bar{0}, -\bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) \le \bar{0}$
transformace max→ min	$\max(\mathcal{F}(\bar{x}))$	$-\min(-\mathcal{F}(\bar{x}))$
Náhrada volné proměnné	$\bar{x}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2, \quad \bar{x}_1, \bar{x}_2 \ge \bar{0}$
zanedbání ofsetu a multiplikativní konstanty	$\arg opt\{\lambda.\mathcal{F}(x)+C\}$, .	$\arg opt\{\mathcal{F}(x)\}$

Operace s maticemi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{y}^T [A] \bar{x}\right) = \bar{y}^T [A] \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{x}^T [A] \bar{y}\right) = \bar{y}^T \left[A^T\right]$$

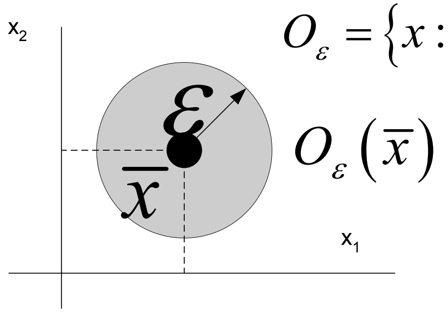
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{x}^T [A] \bar{x}\right) = \bar{x}^T [A] + \bar{x}^T \left[A^T\right] = 2\bar{x}^T [A]$$

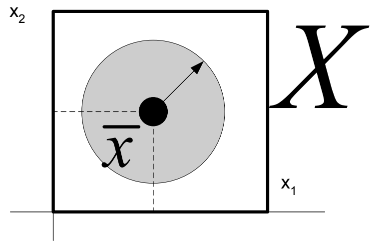
$$\left[A^T\right]^n = \left[A^n\right]^T$$

$$\left([A][B]\right)^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1} \qquad \left([A][B]\right)^T = [B]^T [A]^T$$

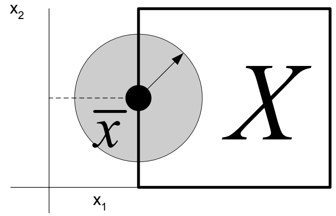
Charakteristiky bodu

$$O_\varepsilon = \left\{x : \left|x - x_1\right| \le \varepsilon, x \subseteq \mathrm{X}\right\}$$





Bod $\bar{x}$ je **vnitřním bodem množiny X**, existuje-li takové $O_\varepsilon(\bar{x}) \subset X$

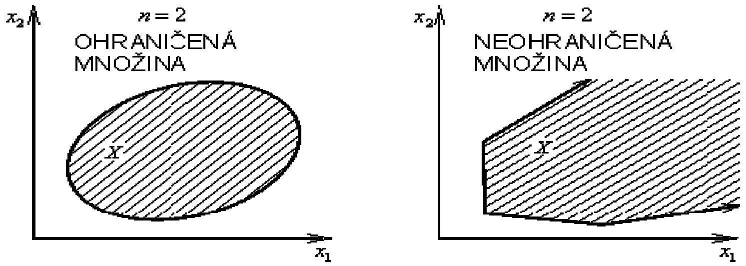


Bod $\bar{x}$ je **hraničním bodem množiny**, obsahuje-li jeho libovolné okolí alespoň jeden bod z X a alespoň jeden bod nepatřící do X

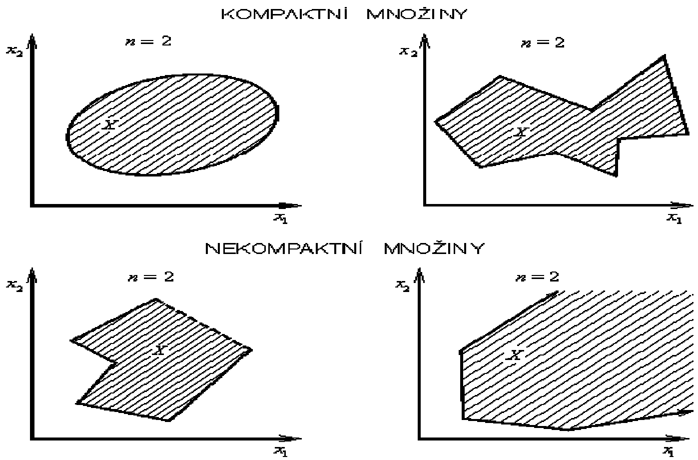
Množina všech hraničních bodů množiny X tvoří **hranici množiny** X)

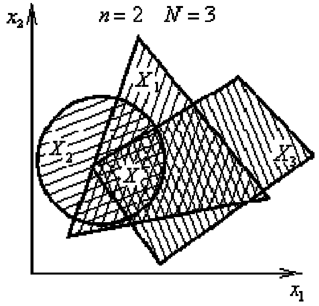
otevřená množina, má pouze vnitřní body .
uzavřená množina, obsahuje všechny své hraniční body .

ohraničená (omezená)množina, je-jestli euklidovská vzdálenost mezi dvěma libovolnými body z X je konečná, jinak množina je **neohraničená (neomezená)**,



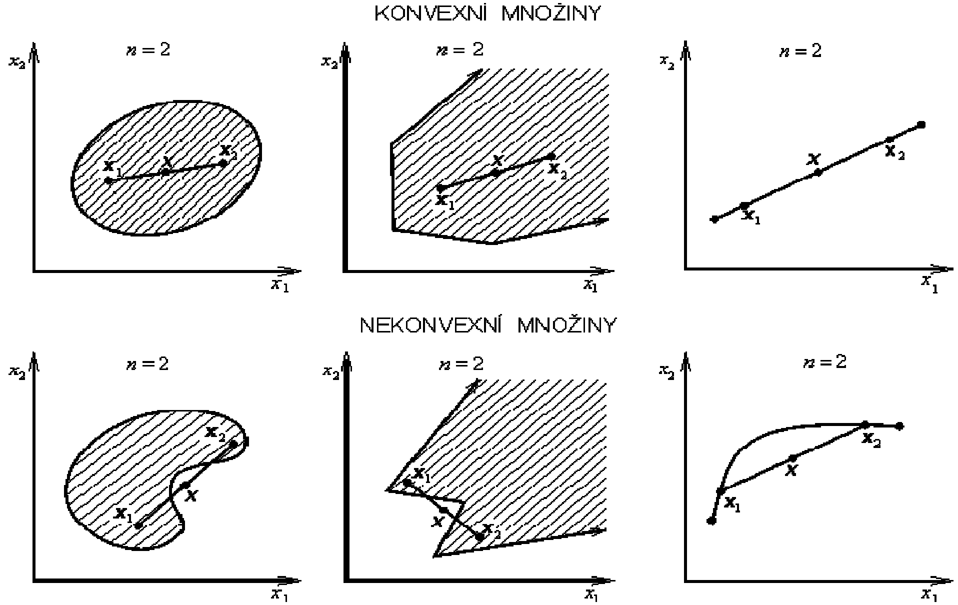
kompaktní množina je uzavřená a ohraničená





Konvexní množiny

Průnik konvexních množin je také konvexní .



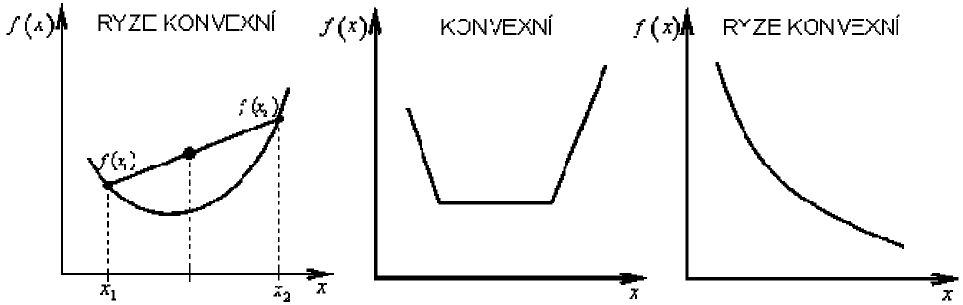
Konvexní množina obsahuje spolu se svými dvěma libovolnými body i úsečku, která tyto body spojuje .

Konvexní kombinace bodů vytvoří konvexní množinu.

Reálná **funkce** $f(\bar{x})$ se nazývá **konvexní** na množině **X**, když pro libovolné dva navzájem různé body

$\bar{x}_1$ a $\bar{x}_2$ z X platí:

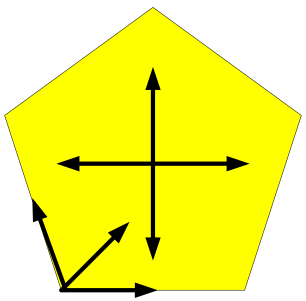
$$f\left(\beta \bar{x}_1 + (1-\beta)\bar{x}_2\right) \le f(\bar{x}_1) + (1-\beta) f(\bar{x}_2) \quad 0 < \beta < 1$$



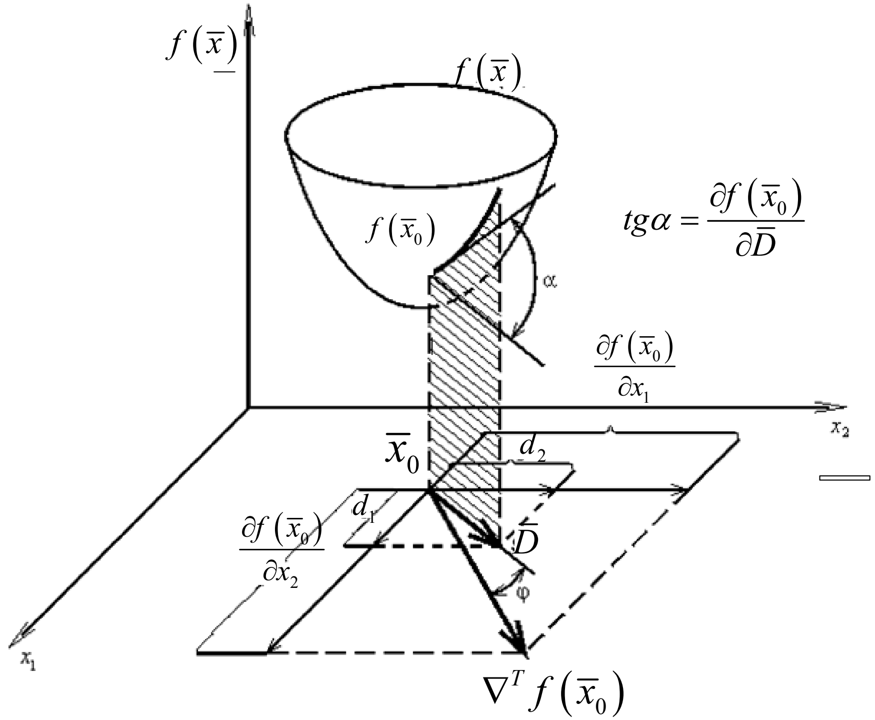
Přípustný směr:

$\bar{D}_x$ *je přípustný směr v bodě* $\bar{x}$ *jestliže existuje*

$\varepsilon > 0$, *že* $\bar{x} + \alpha \bar{D}_x \in X$ *pro* $0 \le \alpha \le \varepsilon$



Derivace ve směru.



$$\frac{df(\bar{x}_0)}{d\bar{D}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{D}) - f(\bar{x}_0)}{t} = \frac{df(\bar{x}_0)}{dt}$$

$$df(\bar{x}_0) = \sum_{k=1}^{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_{x_{k0}} dx_k, \qquad x_k = x_{k0} + d_k t \Rightarrow \frac{dx_k}{dt} = d_k$$

$$\frac{df(\bar{x}_0)}{dt} = \sum_{k=1}^{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} = \nabla^T f(\bar{x}_0).\bar{d}$$

Formulace optimalizační úlohy:

$$\bar{x}^* = \arg \mathop{opt}_{\bar{x}\in\mathcal{D}} \left\{ f(\bar{x}) \right\}$$

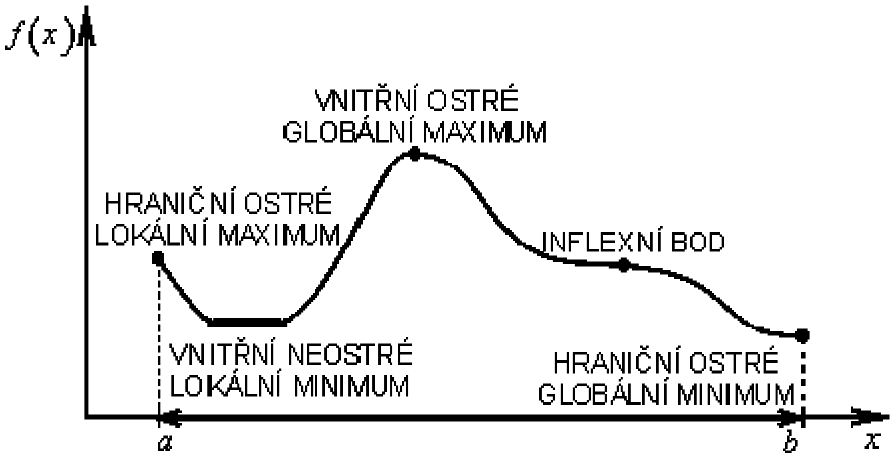
$\mathcal{D} \in \Re^{\partial x}$ *optimalizace bez omezení*

$$\mathcal{D} = \left\{ \bar{x} : \bar{\Gamma} \left\langle \begin{matrix} \overline{\mathcal{N}} \text{®} \bar{0} \\ \overline{\mathcal{R}} = \bar{0} \end{matrix} \right. \right\} \subset \Re^{\partial x}$$

optimalizace s omezením typu nerovnosti
optimalizace s omezením typu rovnosti

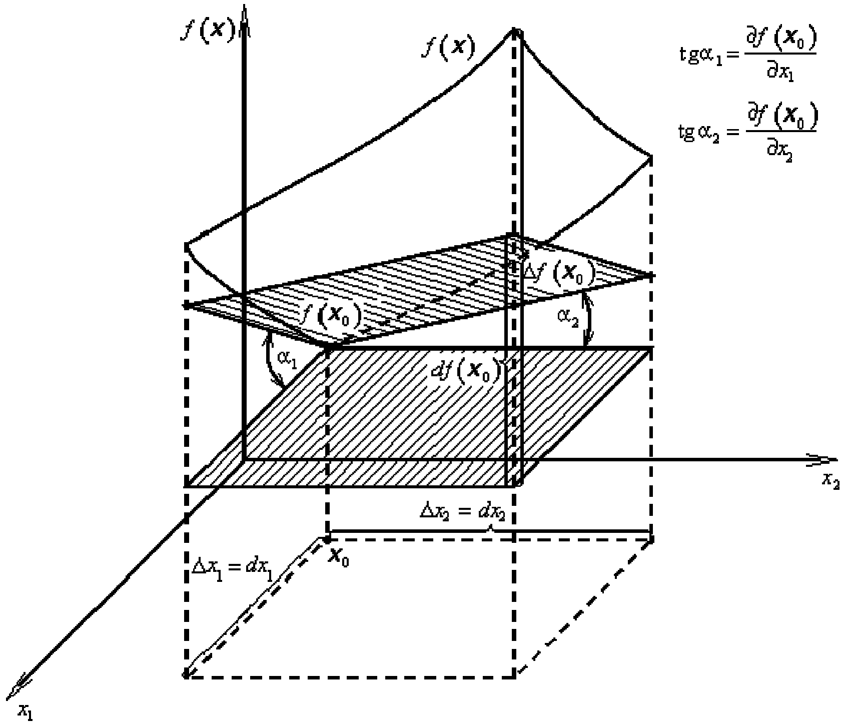
věta o existenci optima.

Každá spojitá funkce definovaná na kompaktní množině (ohraničená, uzavřená) má maximální i minimální hodnotu.



Aproximace funkce.

$$f(\bar{x}+\alpha\bar{D}) = \overbrace{\underbrace{f(\bar{x})+\alpha.\nabla f(\bar{x})\bar{D}.}_{\textit{lineární}}+0.5\alpha^2.\bar{D}^T.\bar{H}(\bar{x}).\bar{D}}^{\textit{kvadratická}}+\textit{zbytek}$$



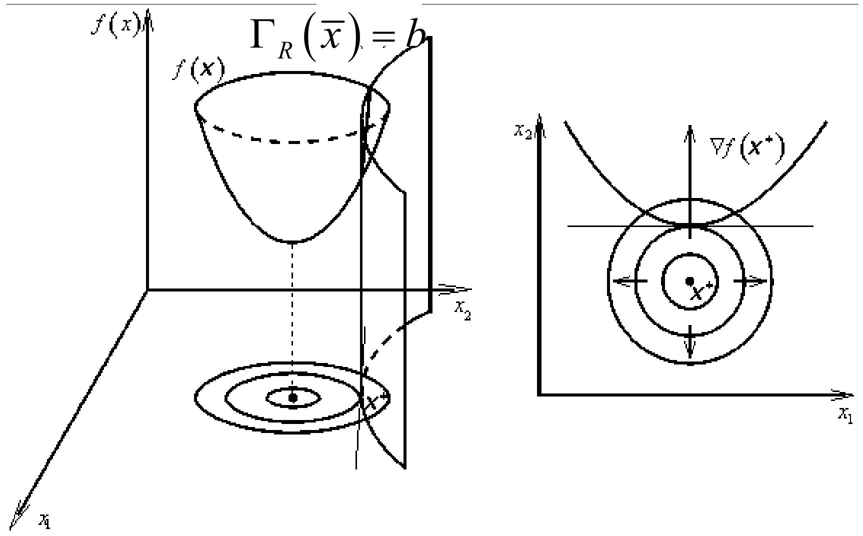
Podmínky pro optimum:

$$® \in \left\{ \begin{matrix} \geq \text{...pro minimum} \\ \leq \text{...pro maximum} \end{matrix} \right\}$$

Je-li $\overline{x}^*$ **bodem lokálního optima ,pak pro libovolný přípustný směr** $\overline{d}_x$ **platí**

	Hraniční bod	Vnitřní bod
1. řád	$\nabla f\left(\overline{x}^*\right)\overline{D}_x ® 0$	$\nabla f\left(\overline{x}^*\right) = \overline{0}$
2. řád	$\overline{d}_x^T \underbrace{\nabla^2 f\left(\overline{x}^*\right)}_{[H]} \overline{D}_x ® 0$	$\left[H\left(\overline{x}^*\right)\right] ® \ \overline{0}$

Vázané extrémy



Aktivní omezení Γ_a

aktivně zúčastňuje—►(má relaci =)!!

—►= jsou aktivní vždy

—►® je aktivní v hraničních bodech

Neaktivní omezení: neplatí = v®

aktivně se nezúčastňuje—►ignoruje se

Regulární bod. $\overline{x}^* = \overline{x}_R^*$ **je regulární,**

když $\left[J_\Gamma\left(x^*\right)\right]$ **má plnou řádkovou hodnost (=nezávislé gradienty)**

$$J_\Gamma = \frac{\partial\overline{\Gamma}_a}{\partial\overline{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Gamma_{a1}}{\partial x_1} & \bullet & \dfrac{\partial\Gamma_{a1}}{\partial x_{\partial\overline{x}}} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \dfrac{\partial\Gamma_{a\partial\Gamma}}{\partial x_1} & \bullet & \dfrac{\partial\Gamma_{a\partial\Gamma}}{\partial x_{\partial\overline{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^T \\ \bullet \\ g_{\partial\Gamma}^T \end{bmatrix}$$

Tečná nadrovina

$$\left\{\tau : \nabla\overline{\Gamma}_a\left(\overline{x}_R^*\right).\overline{\tau} = \overline{0}\right\}$$

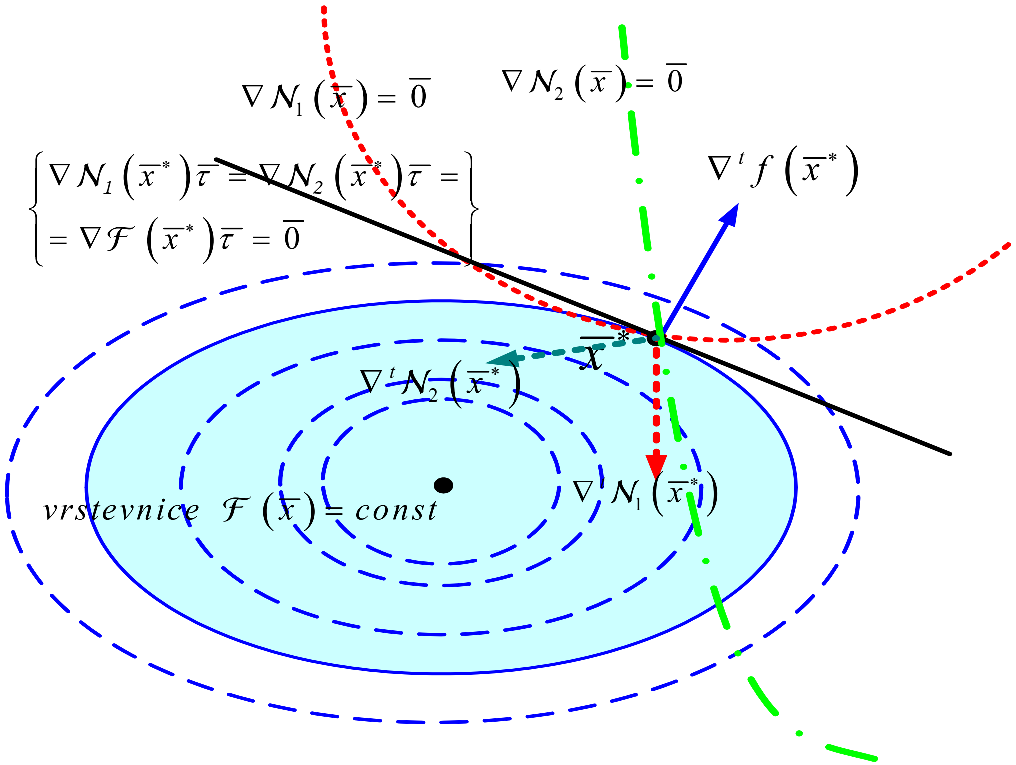
V extrému platí:

Gradient účelové funkce je lineární kombinací gradientů aktivních omezení.

$$\nabla\overline{\Gamma}_a\left(\overline{x}_R^*\right)\overline{\tau} = \nabla f\left(\overline{x}_R^*\right)\overline{\tau} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\nabla f\left(\overline{x}_R^*\right) + \overline{\lambda}^T\nabla\overline{\Gamma}_a\left(\overline{x}_R^*\right) = \overline{0} \Rightarrow$$

Situace v optimálním bodě:



KKT podmínky optima.

věta:je-li $\bar{x}^*$ regulárním bodem lokálního optima, pak existují $\bar{\lambda}, \bar{\nu}$ tak, že platí:

$$\nabla f\left(\bar{x}^*\right) + \bar{\lambda}^T \nabla \bar{€}\left(\bar{x}^*\right) + \bar{\nu}^T . \nabla \bar{\mathcal{N}}\left(\bar{x}^*\right) = \bar{0}$$

$$\bar{\nu}_{\%}^T \bar{\mathcal{N}}\left(\bar{x}^*\right) = \bar{0},\ \bar{\nu} ® \bar{0}\ \left(\nu_{neaktivního} = 0\right)$$

Lagrangeova funkce:

$$\mathcal{L}(\bar{\xi}) = \mathcal{F}(\bar{x}) + \lambda^T \bar{€}\left(\bar{x}\right) + \bar{\nu}^T \mathcal{N}\left(\bar{x}\right)$$

je zkonstruována tak, aby ve stacionárním bodě (podmínky 1.řádu) byly splněny KKT omezovací podmínky.

řád	**Podmínky optimality:**
1.	$\nabla_{\bar{x}}^T \mathcal{L}\left(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*\right) = \bar{0}$, $\quad \nabla_{\bar{\lambda}}^T \mathcal{L}\left(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*\right) = \bar{0}$ $\nabla_{\bar{\nu}} \mathcal{L}\left(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*\right) ® \bar{0}$, $\quad \overbrace{\nabla_{\bar{\nu}} L\left(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*\right) . \bar{\nu}^*}^{\left(\bar{\nu}^{*T} \bar{\mathcal{N}}\left(\bar{x}^*\right)\right)^T} = \bar{0}$
2.	**Ověření maximum/minimum** $\left[H\right] = \nabla_{\bar{x}}^2 L = \nabla^2 \mathcal{F}\left(\bar{x}^*\right) + \bar{\lambda}^T . \nabla^2 \bar{€}\left(\bar{x}^*\right) + \bar{\nu}^T . \nabla^2 \bar{\mathcal{N}}\left(\bar{x}^*\right)$ $\left[H\right]$ *je* pozitivně (minimum) / negativně (maximum) *semidefinitní*

Interpretace $\bar{\lambda}$ = stínové (marginální) ceny

=citlivost na změnu omezovacích podmínek

$$dL_{\bar{x}^*} = 0 = df + \bar{\lambda}^T d\bar{€} \Rightarrow \bar{\lambda}^T = -\frac{df}{d\bar{€}}$$

$\bar{b}$*..změna* $\bar{€}$ *v* $\bar{x}^*$

$$L\left(\bar{b}\right) = f\left(\bar{x}\left(\bar{b}\right)\right) + \bar{\lambda}^T\left(\bar{b}\right).\left\{\bar{€}\left(\bar{x}\left(\bar{b}\right)\right) - \bar{b}\right\}$$

$$\bar{€}\left(\bar{x}\left(\bar{b}\right)\right)_{\bar{x}^*} = \bar{b} \Rightarrow \frac{\partial \bar{€}\left(\bar{x}\left(\bar{b}\right)\right)_{\bar{x}^*}}{\partial \bar{b}} = \left(\frac{\partial \bar{€}\left(\bar{x}\left(\bar{b}\right)\right)}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}^*} \left(\frac{\partial \bar{x}\left(\bar{b}\right)}{\partial \bar{b}}\right)_{\bar{b}=\bar{0}} = \left[1_d\right]$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}^*} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}^*} + \bar{\lambda}^T \left(\frac{\partial \bar{€}}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}^*} = \bar{0} \Rightarrow \left(\frac{\partial f\left(\bar{x}(b)\right)}{\partial \bar{x}}\right) = -\bar{\lambda}^T \left(\frac{\partial \bar{€}\left(\bar{x}(b)\right)}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}^*}$$

$$\frac{\partial f\left(\bar{x}(b)\right)}{\partial \bar{b}}\bigg|_{\bar{b}=\bar{0}} = \left(\frac{\partial f\left(\bar{x}(b)\right)}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}^*} \left(\frac{\partial \bar{x}\left(\bar{b}\right)}{\partial \bar{b}}\right)_{\bar{b}=\bar{0}}$$

$$\frac{\partial f\left(\bar{x}(b)\right)}{\partial \bar{b}}\bigg|_{\bar{b}=\bar{0}} = -\bar{\lambda}^T \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{€}\left(\bar{x}(b)\right)}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}^*} \left(\frac{\partial \bar{x}\left(\bar{b}\right)}{\partial \bar{b}}\right)_{\bar{b}=\bar{0}}}_{\left[1_{\%}\right]} = -\bar{\lambda}^T$$

Interpretace KKT podmínek.

$$\min_{\bar{x} \subset \mathcal{D}} f(\bar{x}),\ \mathcal{D} = \left\{ \bar{x} : \mathcal{R}(\bar{x}) = \bar{0}, \overline{\mathcal{N}}(\bar{x}) \le \bar{0} \right\}$$

$$L = f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T . \mathcal{R}(\bar{x}) + \bar{\nu} . \left(\overline{\mathcal{N}}(\bar{x}) + \bar{x}'^2 \right)$$

$$zdůvodnění\ \bar{\nu} \ge \bar{0}$$

$$X_\Delta = \left\{ \bar{x} : \overline{\mathcal{R}}(\bar{x}) = \bar{0}, \overline{\mathcal{N}}(\bar{x}) \le \bar{b}, \bar{b} \ge 0 \right\}$$

Minimum na větší množině X_Δ nemůže být větší než na podmnožině X.

$$\min_{\bar{x} \subset \mathcal{D}_\Delta} f(\bar{x}) - \min_{\bar{x} \subset \mathcal{D}} f(\bar{x}) \le 0 \qquad \{\square\}$$

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{b}} = -\bar{\nu}^T \Rightarrow \Delta f(\bar{x}) = -\bar{\nu}^T . \bar{b}$$

$$pro\ \bar{b} \ge \bar{0}\ je\, \Delta f(\bar{x}) \le 0 \quad viz\{\square\} \Rightarrow \bar{\nu}^T \ge \bar{0}$$

$$zdůvodnění\ \bar{\nu}_\% \overline{\mathcal{N}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \nu_k} = 2\nu_k x_k' = 0 \Rightarrow \nu_k x_k'^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_k \mathcal{N}_k = 0 \Rightarrow \bar{\nu}_\% \overline{\mathcal{N}} = \bar{0}$$

Varianty relaxovaných funkcí.

$\bar{\xi}^T = \left[\bar{x}^T, \bar{\lambda}^T, \bar{\nu}^T \right]$ **vektor proměnných**

$\mu_{\mathcal{P}}, \mu_{\mathcal{B}}$ **externě řízené penalizační koeficienty**

$\mathcal{P}(\vartheta)$ **externí penelizace**

$\mathcal{B}(\vartheta)$ **interní penalizace**

Lagrangeova funkce:

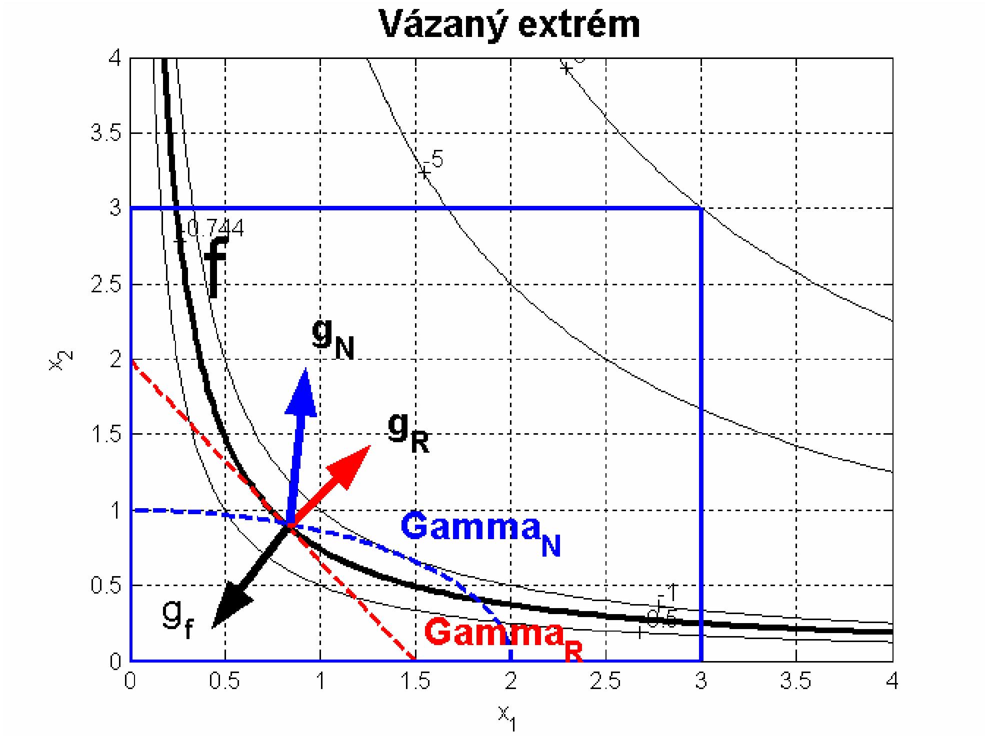
$$\mathcal{L}(\bar{\xi}) = \mathcal{F}(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T . \bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) + \bar{\nu}^T . \bar{\mathcal{N}}(\bar{x})$$

Rozšířená cílová funkce:

$$\Phi(\bar{x}, \mu_{\mathcal{P}}, \mu_{\mathcal{B}}) = \left\{ \mathcal{F}(\bar{x}) + \mu_{\mathcal{P}} . \mathcal{P}(\vartheta) + \mu_{\mathcal{B}}^{-1} . \mathcal{B}(\vartheta) \right\}$$

Rozšířená Lagrangeova funkce:

$$\mathcal{L}(\bar{\xi}) = \Phi(\bar{x}, \mu_{\mathcal{P}}, \mu_{\mathcal{B}}) + \bar{\lambda}^T . \bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) + \bar{\nu}^T . \bar{\mathcal{N}}(\bar{x})$$



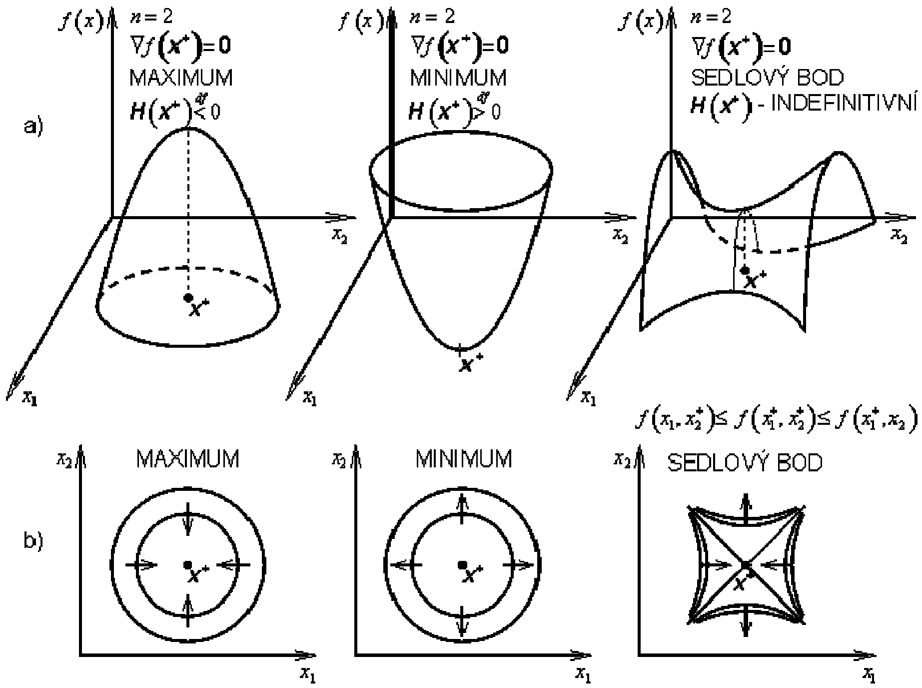
úloha $\min\{-x_1.x_2\}$

$$€ : 20.x_1 + 15.x_2 - 30 = 0$$

$$\mathcal{N} : 0.25x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$$

$$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 3$$

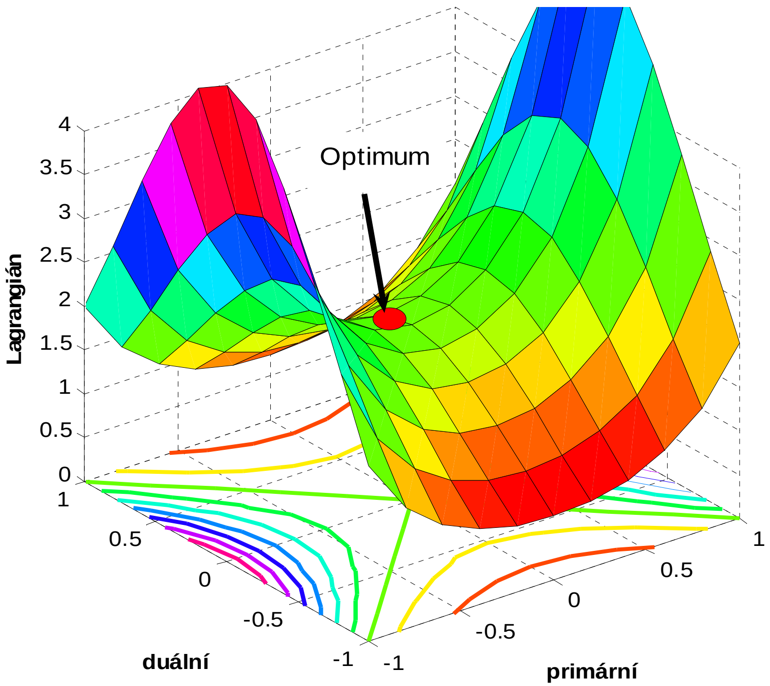
Dualita a sedlový problém.

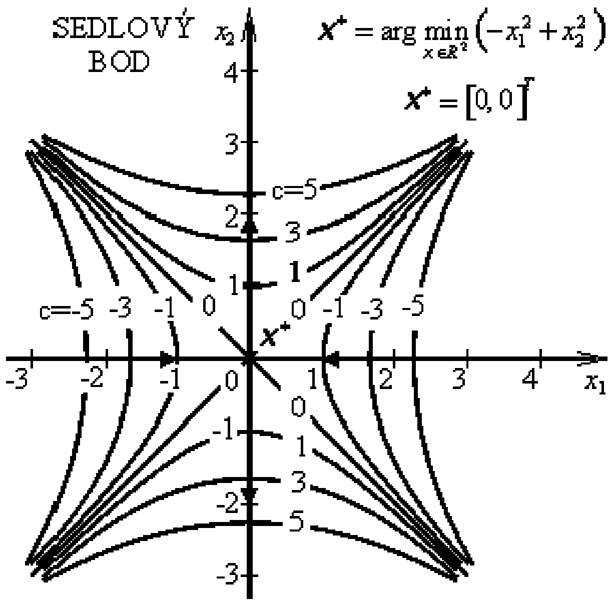


Lagrangeova funkce má sedlový bod $\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*$ **který je řešením optimalizace.**

$$L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}) \le L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) \le L(\bar{x}, \bar{\lambda}^*) \text{...bod minimaxu}$$

$$L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}) \ge L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) \ge L(\bar{x}, \bar{\lambda}^*) \text{...bod maxminima}$$





platí : $\min\limits_{\bar{x} \in \mathcal{D}} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \quad pro \quad \bar{x} \in \mathcal{D}, \bar{\lambda} \in \Lambda$

nerovnost se neporuší maximalizací

$$\max_{\bar{\lambda} \in \Lambda} \min_{\bar{x} \in \mathcal{D}} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le \max_{\bar{\lambda} \in \Lambda} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \quad pro\ \bar{x} \in \mathcal{D}$$

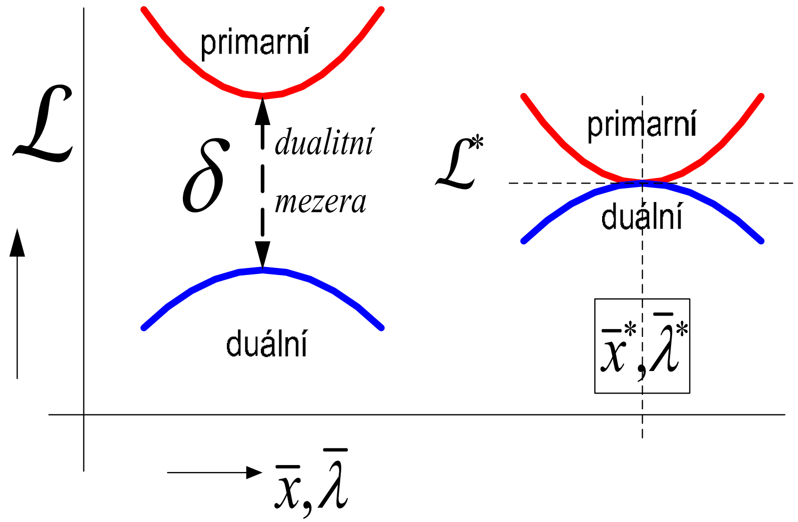
$$\max_{\bar{\lambda} \in \Lambda} \min_{\bar{x} \in \mathcal{D}} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le \min_{\bar{x} \in \mathcal{D}} \max_{\bar{\lambda} \in \Lambda} L(\bar{x}, \bar{\lambda})$$

maximum z minim ≤minimum z maxim

rovnost platí pouze pro optimální řešení.

Rozdíl funkčních hodnot při společném řešení obou úloh = **dualitní mezera** nese informaci o vzdálenosti aktuálního řešení od optima.

Dualitní mezera (gap)



	primární	**duální**
funkce	$L_P(\bar{x}) = \max\limits_{\bar{\lambda},\bar{\nu}\ge 0}\{L(\bar{\xi})\}$	$L_D(\bar{\lambda},\bar{\nu}) = \min\limits_{\bar{x}}\{L(\bar{\xi})\}$
úloha	$\min\limits_{\bar{x}}\{L_P(\bar{x})\}$	$\max\limits_{\bar{\lambda},\bar{\nu}\ge 0}\{L_D(\bar{\lambda},\bar{\nu})\}$

Úloha:

$$\min\left\{f(\bar{x}):\overline{\mathcal{N}}(\bar{x})\le\bar{0}\right\}$$

$$L_P(\bar{x},\bar{\nu})=\min_{\bar{x}}\left(f(\bar{x})+\bar{\nu}^T.\overline{\mathcal{N}}(\bar{x})\right)$$

$$L_D(\bar{x},\bar{\nu})=\max_{\bar{\nu}\ge 0}\left(f(\bar{x})+\bar{\nu}^T.\overline{\mathcal{N}}(\bar{x})\right)\left\langle\begin{array}{l}\bullet f(\bar{x})/\bar{x}\in\mathcal{D}\\ \bullet\infty/\bar{x}\notin X\end{array}\right.$$

$$\min_{\bar{x}\in\mathcal{D}} f(\bar{x})=\min_{\bar{x}\in\Re^{\partial\bar{x}}}\ \max_{\bar{\nu}>\bar{0}}\left\{f(\bar{x})+\bar{\nu}^T.\overline{\mathcal{N}}(\bar{x})\right\}$$

Primární úloha je totožná s výchozí úlohou,
duální úloha hledá hodnoty duálních proměnných (λ), které maximalizují duální funkci.
Duální úloha k duální úloze je primární úloha !

®/opt	**min**	**max**
≤0	$\nu<0$	$\nu>0$
≥0	$\nu<0$	$\nu>0$

polarita omezovacích multiplikátorů λ_N

Relace primární-duální.

	Primarní	**duální**	
	$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\ \bar{c}^T\bar{x}$	$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\ \bar{\lambda}^T\bar{b}$	
omezení	$[A]\bar{x}\ge\bar{b}$	$\bar{\nu}\ge\bar{0}$	**proměnné**
	$[A]\bar{x}\le\bar{b}$	$\bar{\nu}\le\bar{0}$	
	$[A]\bar{x}=\bar{b}$	$\bar{\lambda}$ volné	
proměnné	$\bar{x}\ge\bar{0}$	$\bar{\nu}^T[A]\le\bar{c}^T$	**omezení**
	$\bar{x}\le\bar{0}$	$\bar{\nu}^T[A]\ge\bar{c}^T$	
	$\bar{x}$ volné	$\bar{\lambda}^T[A]=\bar{c}^T$	

primární	**duální**
maximalizace	minimalizace
vektor	Transponovaný vektor
Vektor omezení	Vektor cílové funkce
Vektor cílové funkce	Vektor omezení

Interní a externí penalizace

Optimalizaci s omezením se nahrazuje optimalizací bez omezení.

Výchozí úloha:

$$\underset{\bar{x}\subset\mathcal{D}}{opt}\left\{f\left(\bar{x}\right)/\mathcal{D}:\ \bar{\mathcal{N}}\left(\bar{x}\right)\circledR\bar{0},\bar{\mathcal{R}}\left(\bar{x}\right)=\bar{0}\right\}$$

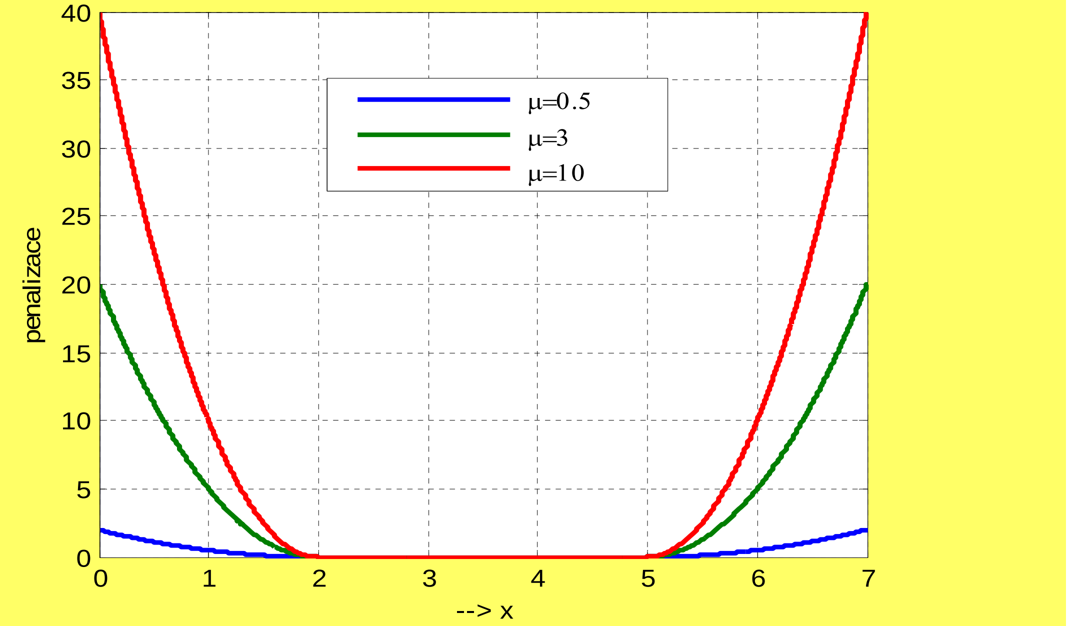
$$\pi\left(\bar{x},\mu_p,\mu_b\right)=$$

$$\underset{\bar{x}\subset\Re^{\partial\bar{x}}}{opt}\left\{f\left(\bar{x}\right)\pm\mu_p\left(\psi_p\left(\vartheta\right)\right)\pm\mu_b^{-1}\left(\psi_b\left(\vartheta\right)\right)\right\}\begin{matrix}\min\\\max\end{matrix}$$

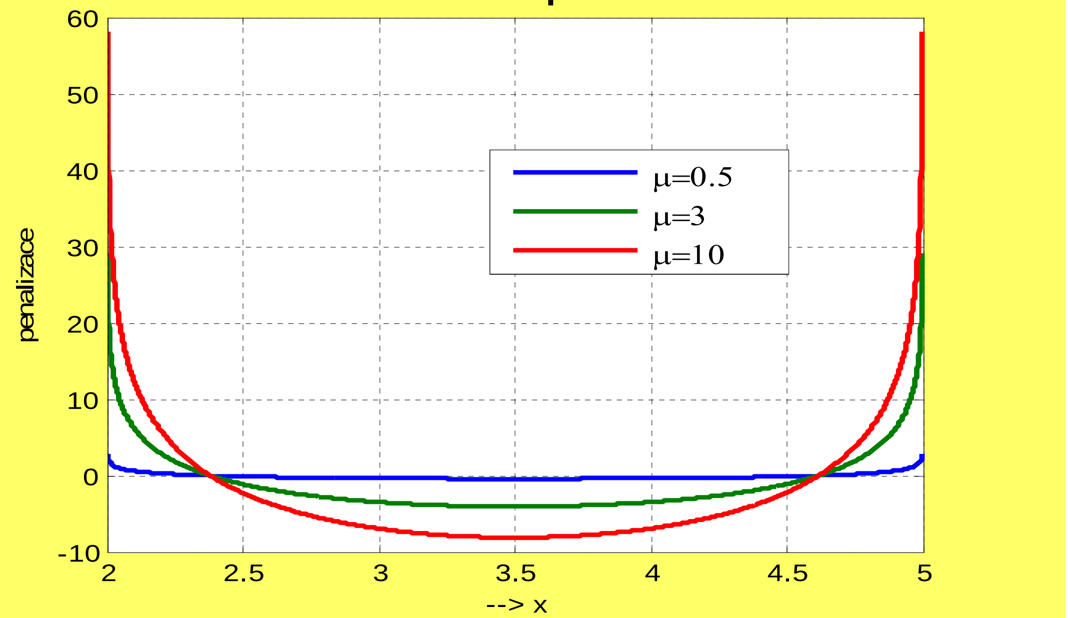
$$\mu_p>0\rightarrow\infty,\mu_b>0,\mu_b^{-1}\rightarrow 0,\ \textit{volí autor výpočtu}$$

	podmínky	**Realizace ψ**
Vnější penalizace **ψ_p**	$\psi_p\left(\vartheta\right)=0,\vartheta\overset{\circledR}{\underset{=}{}}0$ $\psi_p\left(\vartheta\right)>0,\vartheta\overset{\circledR}{\underset{\neq}{}}0$	$\sum_{k=1}^{\partial\bar{\mathcal{N}}}\max\left\{0,\mathcal{N}_k\left(\bar{x}\right)\right\}^2+$ $+\sum_{k=1}^{\partial\bar{\mathcal{R}}}\mathcal{R}_k\left(\bar{x}\right)^2$
Vnitřní penalizace **ψ_b**	$\psi_p\left(\vartheta\right)\geq 0,\vartheta\overset{<}{\underset{>}{}}0$ $\lim_{\vartheta\rightarrow 0^{\mp}}\psi_p\left(\vartheta\right)=\infty$ vyžaduje vnitřní body→Γ_N	$a)\sum_{k=1}^{\partial\bar{\mathcal{N}}}\frac{-1}{\mathcal{N}_k\left(\bar{x}\right)}$ $b)-\sum_{k=1}^{\partial\bar{\mathcal{N}}}\ln\left(-\mathcal{N}_k\left(\bar{x}\right)\right)$

obr.4. Externí penalizace



obr.5 Interní penalizace



Jaroslav Doležal, katedra elektroenergetiky ČVUT -FEL

Příklad formulace:

$$\pi\left(\bar{x},\mu_p,\mu_b\right)=$$

$$\min\left\{f\left(\bar{x}\right)+\mu_{pi}\sum_{k=1}^{\partial\bar{\mathcal{R}}}\mathcal{R}_k^2\left(\bar{x}\right)-\mu_{bi}^{-1}\sum_{k=1}^{\partial\bar{\mathcal{N}}}\ln\left(-\mathcal{N}_k\left(\bar{x}\right)\right)\right\}$$

i....číslo iterace

Algoritmus řešení.

1.i=0

volba $\mu_{bi}>0$, $\mu_{pi}>0$,

$\varepsilon>0$, $\varepsilon_b>0$

$\omega_{bi}>1$, $\omega_{pi}>1$

stanovení přípustného $\bar{x}_i\subset\mathcal{D}$

2.i=i+1

$$\bar{x}_i^*=\underset{\bar{x}\in X}{\arg opt}\left\{\pi\left(\bar{x},\mu_p,\mu_b\right)\right\}$$

3.kontrola konvergence

je-li $\left|\bar{x}_{i-1}-\bar{x}_i\right|\le\varepsilon$ **pak stop jinak 4.**

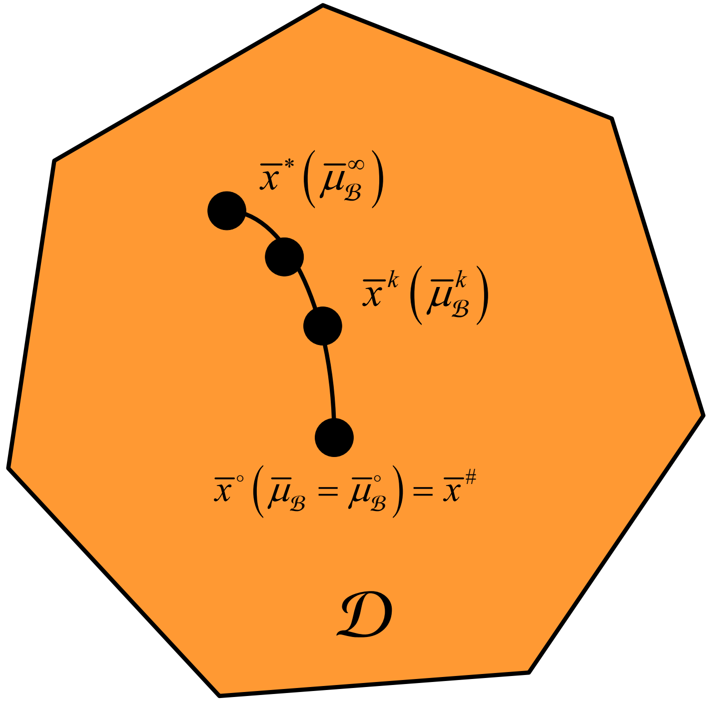
4.korekce μ

$\mu_{bi}=\mu_{bi}\cdot\omega_{bi}$

$\mu_{pi}=\mu_{pi}\cdot\omega_{pi}$

jdi na 2.

Metody vnitřního bodu (Interior point)



Předp: $\bar{\mathcal{N}}\left(\bar{x}\right)$ **jsou konvexní a hladké**

případ : $\mathcal{D}=\left\{\bar{x}:\bar{\mathcal{N}}\left(\bar{x}\right)<\bar{0},\ \textit{ohraničená}\right\}$

$$\psi_b\left(\bar{x}\right)=\left\langle\begin{array}{ll}-\sum_{k=1}^{\partial\bar{\mathcal{N}}}\ln\left(-\mathcal{N}_k\left(\bar{x}\right)\right) & if\ \ \bar{x}\in\mathcal{D}\\ \infty & if\ \ \bar{x}\notin\mathcal{N}\end{array}\right.$$

$$\bar{x}^{ac}=\underset{\bar{x}\in\mathcal{D}}{\arg\min}\left\{-\sum_{k=1}^{\partial\bar{\mathcal{N}}}\ln\left(-\mathcal{N}_k\left(\bar{x}\right)\right)\right\}=\underset{\bar{x}\in\mathcal{D}}{\arg\max}\left\{\ln\prod_{k=1}^{\partial\bar{\Gamma}}\left(-\mathcal{N}_k\left(\bar{x}\right)\right)\right\}$$

$$\bar{x}^{ac}=\underset{\bar{x}\in\mathcal{D}}{\arg\max}\left\{\prod_{k=1}^{\partial\bar{\mathcal{N}}}\left(-\mathcal{N}_k\left(\bar{x}\right)\right)\right\}$$ *..analytický střed nerovností*

metoda centrální cesty

$$\mathcal{D} = \left\{ \overline{x} : \overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right) \le \overline{0}, \right\}$$

$$\textit{úloha}: \min_{\overline{x} \in \mathcal{D}} f\left(\overline{x}\right)$$

$\alpha > 0$ *relativní váha mezi f a* $\mathcal{N}$

$$\pi\left(\alpha\right) = \alpha f\left(\overline{x}\right) - \sum_{k=1}^{\partial\overline{\mathcal{N}}} \ln\left(-\mathcal{N}_k\left(\overline{x}\right)\right)$$

$$\overline{x}^*\left(\alpha\right) = \arg \underset{\overline{x} \in \mathcal{D}}{opt}\, \pi\left(\alpha\right)$$

α = 0......analytický střed

α > 0......centrální cesta

metoda středů

volená proměnná $\gamma > f^*$

$$\textit{úloha}: \min_{\overline{x} \in \mathcal{D}} f\left(\overline{x}\right), \mathcal{D} = \left\{ \overline{x} : \overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right) \le \overline{0}, \right\}$$

$$\pi\left(\gamma\right) = -\ln\left(\gamma - f\left(\overline{x}\right)\right) - \sum_{k=1}^{\partial\overline{\mathcal{N}}} \ln\left(-\mathcal{N}_k\left(\overline{x}\right)\right)$$

$$\overline{x}^*\left(\gamma\right) = \arg \underset{\overline{x} \in \mathcal{D}}{opt}\, \pi\left(\alpha\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{\left(\gamma - f\left(\overline{x}^*\left(\gamma\right)\right)\right)} \rightarrow \overline{x}^*\left(\gamma\right) = \overline{x}^*\left(\alpha\right)$$

Paradigma IP

originální problém - omezení nerovností

$$\min_{\overline{x} \subset \mathcal{D}_a} f\left(\overline{x}\right),\ \mathcal{D}_a = \left\{ \overline{x} : \overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right) \ge \overline{0} \right\}$$

upravený problém - omezení rovností

$$\min_{\overline{x} \subset \mathcal{D}_b} f\left(\overline{x}\right), \mathcal{D}_b = \left\{ \overline{x} : \overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right) - \overline{x}' = \overline{0}, \overline{x}' \ge \overline{0} \right\}$$

obsluha nezápornosti $\overline{x}'$

$$\min_{\overline{x} \subset \mathcal{D}_c} f\left(\overline{x}\right) - \mu\left(\sum_{k=1}^{\partial\Gamma} \ln\left(x_k'\right)\right), \mathcal{D}_c = \left\{ \overline{x} : \overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right) - \overline{x}' = \overline{0} \right\}$$

relaxovaný problém: $\overline{\xi}^T = \left[\overline{x}^T, \overline{\lambda}^T, \overline{x}'^T\right]$

$$\min_{\overline{x} \subset \Re^{\partial\overline{x}}} £\left(\overline{\xi}\right) = f\left(\overline{x}\right) - \mu\left(\sum_{k=1}^{\partial\Gamma} \ln\left(x_k'\right)\right) - \overline{\lambda}^T\left(\overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right) - \overline{x}'\right)$$

podmínky 1.*řádu* $\partial £ / \partial \overline{\xi} = \overline{0}$

$$\frac{\partial £}{\partial \overline{x}} = \frac{\partial f\left(\overline{x}\right)}{\partial \overline{x}} - \frac{\partial \overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right)}{\partial \overline{x}} \overline{\lambda} = \overline{0}, \qquad \frac{\partial £}{\partial \overline{\lambda}} = \overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right) - \overline{x}' = \overline{0}$$

$$\frac{\partial £}{\partial \overline{x}'} = -\mu . \overline{x}_{\%}'^{-1} \overline{\text{❶}} + \overline{\lambda} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\overline{x}_{\%}' . \overline{\lambda}_{\%} . \overline{\text{❶}} = \mu \overline{\text{❶}}$$

$$\left[J\left(\overline{x}\right)\right]=\frac{\partial\overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}},\quad\left[H\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right)\right]=\frac{\partial^{2}f\left(\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}^{2}}-\overline{\lambda}^{T}.\frac{\overbrace{\partial^{2}\overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right)}^{\frac{\partial J(\overline{x})}{\partial\overline{x}}}}{\partial\overline{x}^{2}}$$

$$\begin{bmatrix}\left[H\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right)\right] & [0] & -\left[J\left(\overline{x}\right)\right]\\ \left[J\left(\overline{x}\right)\right] & -\overline{\mathbf{1}}_{\%} & [0]\\ [0] & [\Theta] & [\Omega]\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\Delta\overline{x}\\ \Delta\overline{\lambda}\\ \Delta\overline{x}'\end{bmatrix}$$

eliminací $\Delta\overline{x}'$

$$\begin{bmatrix}-\left[H\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right)\right] & \left[J^{T}\left(\overline{x}\right)\right]\\ \left[J\left(\overline{x}\right)\right] & [\Theta][\Omega]^{-1}\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\Delta\overline{x}\\ \Delta\overline{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^{T}f\left(\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}}-\left[J^{T}\left(x\right)\right]\overline{\lambda}\\ -\overline{\mathcal{N}}\left(\overline{x}\right)+\mu[\Omega]^{-1}\overline{\mathbf{1}}\end{bmatrix}$$

Paradigma IP kvadratického programování.

originální problém - omezení nerovností

$$\min_{\overline{x}\subset\mathcal{D}}\overline{c}^{T}\overline{x}+\frac{1}{2}\overline{x}^{T}[Q]\overline{x},\quad\mathcal{D}=\left\{\overline{x}:[A]\overline{x}\geq\overline{b},\overline{x}\geq\overline{0}\right\}$$

upravený problém - omezení rovností

$$\min_{\overline{x}\subset\mathcal{D}}f\left(\overline{x}\right),\mathcal{D}=\left\{\overline{x}:[A]\overline{x}-\overline{x}'-\overline{b}=\overline{0},\ \overline{x},\ \overline{x}'\geq\overline{0}\right\}$$

obsluha nezápornosti $\overline{x},\overline{x}'$

$$\min_{\overline{x}\subset\mathcal{D}}\overline{c}^{T}\overline{x}+\frac{1}{2}\overline{x}^{T}[Q]\overline{x}-\mu\left(\sum_{k=1}^{\partial\overline{\mathcal{N}}}\ln\left(x_{k}'\right)+\sum_{k=1}^{\partial\overline{b}}\ln\left(x_{k}\right)\right),$$

$$\mathcal{D}=\left\{\overline{x}:[A]\overline{x}-\overline{x}'-\overline{b}=\overline{0}\right\}$$

relaxovaný problém: $\overline{\xi}^{T}=\left[\overline{x}^{T},\overline{\lambda}^{T},\overline{x}'^{T}\right]$

$$\min_{\overline{x}\subset\Re^{\partial\overline{x}}}£\left(\overline{\xi}\right)=\overline{c}^{T}\overline{x}+\frac{1}{2}\overline{x}^{T}[Q]\overline{x}-\mu\left(\sum_{k=1}^{\partial\overline{\mathcal{N}}}\ln\left(x_{k}'\right)+\sum_{k=1}^{\partial\overline{b}}\ln\left(x_{k}\right)\right)+$$

$$+\overline{\lambda}_{R}^{T}\left(\overline{b}-[A]\overline{x}+\overline{x}'\right)$$

podmínky 1.řádu $\partial£/\partial\overline{\xi}=\overline{0}$

$$\overline{c}+[Q]\overline{x}-\underbrace{\mu\left\{\overline{x}_{\%}^{-1}\overline{\mathbf{1}}\right\}}_{\overline{z}}-\left[A^{T}\right]\overline{\lambda}=\overline{0},$$

$$\overline{z}=\mu\left\{\overline{x}_{\%}^{-1}\overline{\mathbf{1}}\right\}$$

$$\frac{\partial£}{\partial\overline{\lambda}}=\overline{b}-[A]\overline{x}+\overline{x}'=\overline{0}$$

$$\frac{\partial£}{\partial\overline{x}'}=-\mu\overline{x}_{\%}'^{-1}\overline{\mathbf{1}}+\overline{\lambda}=\overline{0}\Rightarrow$$

$$\bar{c}+[Q]\bar{x}-\mu.\bar{z}-\left[A^T\right]\bar{\lambda}=\bar{0}$$

$$\bar{x}_{\%}.\bar{z}_{\%}\overline{\text{❶}}=\mu\overline{\text{❶}}$$

$$\bar{x}'_{\%}\bar{\lambda}_{\%}\overline{\text{❶}}=\mu\overline{\text{❶}}$$

$$\bar{b}-[A]\bar{x}+\bar{x}'=\bar{0}$$

$$\bar{c}+[Q](\bar{x}+\Delta\bar{x})-\mu(\bar{z}+\Delta\bar{z})-\left[A^T\right]\left(\bar{\lambda}+\Delta\bar{\lambda}\right)=\bar{0}$$

$$\left[\bar{x}_{\%}+\Delta\left(\bar{x}_{\%}\right)\right]\left[\bar{z}_{\%}+\Delta\left(\bar{z}_{\%}\right)\right]\overline{\text{❶}}=\mu\overline{\text{❶}}$$

$$\left[\bar{x}'_{\%}+\Delta\left(\bar{x}'_{\%}\right)\right]\left[\bar{\lambda}_{\%}+\Delta\left(\bar{\lambda}_{\%}\right)\right]\overline{\text{❶}}=\mu\overline{\text{❶}}$$

$$\bar{b}-[A](\bar{x}+\Delta\bar{x})+(\bar{x}'+\Delta\bar{x}')=\bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} [Q] & -\overline{\text{❶}}_{\%} & [0] & -\left[A^T\right] \\ \bar{z}_{\%} & \bar{x}_{\%} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & \bar{x}'_{\%} & \bar{\lambda}_{\%} \\ -[A] & [0] & \overline{\text{❶}}_{\%} & [0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\bar{x} \\ \Delta\bar{z} \\ \Delta\bar{x}' \\ \Delta\bar{\lambda}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -\bar{c}-[Q]\bar{x}+\bar{z}+\left[A^t\right]\bar{\lambda} \\ \mu\overline{\text{❶}}-\bar{x}_{\%}\bar{z}_{\%}\overline{\text{❶}} \\ \mu\overline{\text{❶}}-\bar{x}'_{\%}\bar{\lambda}_{\%}\overline{\text{❶}} \\ [A]\bar{x}-\bar{b}-\bar{x}' \end{bmatrix}$$

Systém $2\left(\partial\bar{x}+\partial\bar{b}\right)$ rovnic pro $2\left(\partial\bar{x}+\partial\bar{b}\right)$ proměnných