# Unit Comminment

Určete optimální strategii najíždění a odstavování zdrojů pro pokrytí diagramu denního zatížení, pracují-li do soustavy 4 zdroje s nákladovými parametry:

| Zdroj | Nákladová funkce | Cena najetí $C_+$ | Cena odstavení $C_-$ |
|---|---|---|---|
| **1** | $C_1(P_1) = 500 + 8.P_1 + 0,004.P_1^2$ | 3000 | 1500 |
| **2** | $C_2(P_2) = 400 + 6,4.P_2 + 0,0048.P_2^2$ | 3000 | 1500 |
| **3** | $C_3(P_3) = 600 + 7,9.P_3 + 0,005.P_3^2$ | 3000 | 1500 |
| **4** | $C_4(P_4) = 400 + 7,5.P_4 + 0,0055.P_4^2$ | 3000 | 1500 |

Diagram zátěže:

| Krok | Doba [h] | $P_L$ [MW] |
|---|---|---|
| **1** | 4 | 1100 |
| **2** | 4 | 1400 |
| **3** | 4 | 1600 |
| **4** | 4 | 1800 |
| **5** | 4 | 1400 |
| **6** | 4 | 1100 |

Povolené kombinace zdrojů (zapnuto/vypnuto):

| Zdroj | $\overline{G}_1$ (g=1) | $\overline{G}_2$ (g=2) | $\overline{G}_3$ (g=3) | $\overline{G}_4$ (g=4) |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **4** | 1 | 0 | 1 | 0 |

a) Za předpokladu zadaného počátečního a koncového stavu $g_{zac} = 4$ $\left(tj.\ \overline{G}_4\right)$ a $g_{kon} = 4$ $\left(tj.\ \overline{G}_4\right)$

b) Jak se změní optimální strategie, bude-li navíc zadána $g_{zac} = 2$ v 2. kroku

c) Jako a) za předpokladu pouze zadaného počátečního stavu $g_{zac} = 2$

# Návod

I. FORMULACE ÚLOHY

Úkolem úlohy je najít v každém časovém intervalu $t = 1,\dots,Nt$ sestavu (kombinaci) provozovaných jednotek a jejich výkonů tak, aby celkový součet nákladů za celou dobu provozu byl minimální („commit“ = „vyčlenit“). To vše za předpokladu známého diagramu zatížení $P_{L\ 0..Nt-1} = \left\{P_{L\ 0},\dots,P_{L\ Nt-1}\right\}$ a dalších omezení jako je seznam přípustných sestav (grup) $\left\{\overline{G}_1,\dots,\overline{G}_{Ng}\right\}$

popř. spodní a horní meze výkonů každého zdroje $\overline{P}_{t-1\min}$ a $\overline{P}_{t-1\max}$. Zadána je výchozí $\overline{\xi}_0$ i konečná $\overline{\xi}_{Nt}$ sestava (náklady na přechod do konečné sestavy se započítávají do celkových nákladů). Základní formulace optimalizační úlohy má v tomto případě proto tvar:

$$\left\{\overline{P}_{0..Nt-1},\overline{\xi}_{0..Nt}\right\}^{\otimes}=\arg\left[\underset{\substack{\forall t\in\{1,..,Nt\}\\ \overline{P}_{t-1}\in X_{t-1},\overline{\xi}_t\in Y_t}}{\operatorname{opt}}\left(F\left(\overline{P}_{0..Nt-1},\overline{\xi}_{0..Nt}\right)\right)\right]=$$

$$=\arg\left[\underset{\substack{\forall t\in\{1,..,Nt\}\\ \overline{P}_{t-1}\in X_{t-1},\overline{\xi}_t\in Y_t}}{\operatorname{opt}}\left(\sum_{t=1}^{Nt}\sum_{j=1}^{Nj}C_j\left(P_{t-1j}\right).\xi_{t-1j}+C_{j+}.\eta_{tj+}+C_{j-}.\eta_{tj-}\right)\right]$$

kde $X_{0..Nt-1}$ a $Y_{0..Nt}$ tvoří množinu přípustné oblasti ve tvaru:

$$X_{t-1}=\left\{\overline{P}_{t-1}\in R^{Nj}:\sum_{j=1}^{Nj}P_{t-1j}=P_{L\ t-1}\text{ a popř. }\overline{P}_{t-1\min}\leq\overline{P}_{t-1}\leq\overline{P}_{t-1\max}\right\}\text{ pro }\forall\ t\in\{1,...,Nt\}$$

$$Y_t=\left\{\overline{\xi}_t\in\{0,1\}^{Nj}:\overline{\xi}_t\in\left\{\overline{G}_1,...,\overline{G}_{Ng}\right\}\right\}\text{ pro }\forall\ t\in\{1,...,Nt\}$$

a kde

| | |
|---|---|
| $Nt$ | počet časových intervalů |
| $Nj$ | celkový počet všech zdrojů (jednotek) |
| $Ng$ | počet všech povolených sestav zdrojů (grup) |
| $P_{tj}$ | výkon *j*-tého zdroje v časovém intervalu *t* |
| $C_j\left(P_{tj}\right)$ | nákladová funkce *j*-tého zdroje (je stejná pro všechny časové intervaly) |
| $\overline{P}_t$ | vektor výkonů všech zdrojů v časovém intervalu *t* |
| $\xi_{tj}$ | stav *j*-tého zdroje (tj. buď 0 - vypnut, 1 - v provozu) v časovém intervalu *t* |
| $\overline{\xi}_t$ | vektor stavů všech zdrojů v časovém intervalu *t* |
| $\overline{G}_i$ | *i*-tá přípustná sestava (grupa) |
| $C_{j+}$ | cena najetí *j*-tého zdroje (je stejná pro všechny časové intervaly) |
| $C_{j-}$ | cena odstavení *j*-tého zdroje (dtto) |
| $\eta_{tj+}$ | logická proměnná, zda došlo k najetí zdroje na zač. intervalu *t* $\eta_{tj+}=\xi_{tj}.\left(\xi_{tj}-\xi_{t-1j}\right)$ |

$\eta_{tj-}$ logická proměnná, zda došlo k odst. zdroje na zač. intervalu $t$ $\eta_{tj-} = \xi_{t-1j}.\left(\xi_{t-1j} - \xi_{tj}\right)$

Protože $\eta_{tj+}$ i $\eta_{tj-}$ je $f\left(\xi_{tj}, \xi_{t-1j}\right)$, je tedy i cílová funkce $F\left(\overline{P}_{0..Nt-1}, \overline{\xi}_{0..Nt}\right)$ **výlučně funkcí časových řad výkonů a stavů všech zdrojů**. Protože proměnné $\xi_{tj}$ jsou diskrétní (nabývají hodnoty 0 nebo 1), je na první pohled možné řešit sérii optimalizačních úloh $F_i^* = \mathrm{opt}\left[F\left(\overline{P}_{0..Nt-1}\right)\Big|_{\xi_{tj}=konst}\right]$ pro všechny přípustné kombinace $\xi_{tj}$. Optimum je pak nutno vybrat jako $F^{\otimes} = \mathrm{opt}\left[\left\{F_i^*, i = 1,..., N_{kombinací}\right\}\right]$. To je ale výpočetně značně náročný (i u méně složitých úloh prakticky nerealizovatelný) postup, protože bychom museli provést $Ng^{Nt}$ (maximálně až $2^{Nj.Nt}$) optimalizací funkcí o $Nj.Nt$ proměnných. Je proto nutné využít jiných postupů hledání optima, které tuto úlohu převádí do jednodušších vnořených optimalizačních podúloh.

## II. PRINCIPY DYNAMICKÉHO PROGRAMVÁNÍ

Pojem dynamické programování byl zaveden matematikem R. Bellmanem pro úlohy víceúrovňového rozhodování zahrnující změny v čase – dynamiku. Úkolem je vybrat pro $N$ kroků takovou strategii rozhodování $U_{1..N} = \left\{U_1,...,U_N\right\}$ vedoucí ke stavům $S_{1..N} = \left\{S_1,...,S_N\right\}$ aby kritérium (cena řešení) $J_{1N} = J_{1N}\left(S_{0..N}, U_{1..N}\right)$ byla optimální. Protože $S_{k-1}$ má význam předešlého stavu systému v *k* – 1. kroku a $U_k$ rozhodnutí pro *k*-tý krok, dá se určit stav, který nastane v *k.* kroku jako:

$$S_k = S^k\left(S_{k-1}, U_k\right)$$

kde $S^k$ je stavová (transformační) funkce v *k*-tém kroku.

**Se znalostí stavových funkcí, počátečního stavu $S_0$ a strategie rozhodování tak můžeme určit pomocí stavových funkcí všechny stavy** pro všechny kroky 1,…,*N*:

$$\begin{aligned}
S_1 &= S^1\left(S_0, U_1\right) = \phi_1\left(S_0, U_1\right) \\
S_2 &= S^2\left(S_1, U_2\right) = S^2\left(S^1\left(S_0, U_1\right), U_2\right) = \phi_2\left(S_0, U_{1..2}\right) \\
&\ldots \\
S_N &= S^N\left(S_{N-1}, U_N\right) = S^N\left(...S^1\left(S_0, U_1\right),..., U_N\right) = \phi_N\left(S_0, U_{1..N}\right)
\end{aligned}$$

Pokud si rozčleníme kriteriální funkci $J_{1N}$ a zavedeme částečné ceny řešení od *k*-tého kroku do konce (*N*-tého kroku) $J_{kN}$, pak s využitím předchozí úvahy můžeme takové funkce vyjádřit jako:

$$J_{kN} = J_{kN}\left(S_{k-1..N}, U_{k..N}\right) = J_{kN}\left(S_{k-1}, U_{k..N}\right)$$

Zaveďme dále funkce $f_k$ vyjadřující přírůstek nákladů z *k*-tého do *k*+1. kroku tak, že platí:

$$J_{kN}\left(S_{k-1}, U_{k..N}\right) = J_{k+1N}\left(S_k, U_{k+1..N}\right) + f_k\left(S_{k-1}, U_k\right)$$

Protože jsou stavy $S_{1..N}$ závislé na strategii $U_{1..N}$, přejde optimalizační úloha na tvar:

$$U_{1..N}^{\otimes} = \arg\left[\operatorname{opt}\left(J_{1N}\left(S_0, U_{1..N}\right)\right)\right] \quad U_{1..N} \in M_{U_{dov}}$$

**tedy jaká bude optimální strategie $U_{1..N}^{\otimes}$ při známém stavu na počátku $S_0$.**

Za předpokladu, že známe *k*-tý stav $S_k$, bude optimální (sub)strategie (tj. od $S_k$ až do $S_N$)

$$U_{k+1..N}^{*} = \arg\left[\operatorname{opt}\left(J_{k+1N}\left(S_k, U_{k+1..N}\right)\right)\right] = \arg\left[\operatorname{opt}\left(\sum_{j=k}^{N} f_{j+1}\left(S_j, U_{j+1}\right)\right)\right] \quad U_{k+1..N} \in M_{U_{dov}}$$

$$\text{kde optimum kritéria je } J_{k+1N}^{*} = \operatorname{opt}\left(J_{k+1N}\left(S_k, U_{k+1..N}\right)\right)$$

z čehož plyne důležitý poznatek: **nezávisle na předchozích rozhodnutích musí být strategie optimální vzhledem k dosaženému stavu**. Jinými slovy: strategie $U_{k+1..N}^{*}$ tak vede k optimální hodnotě kritéria $J_{k+1N}^{*}$ za předpokladu, že dospějeme do stavu $S_k$. Zbývá se jen zamyslet, jaké předchozí rozhodnutí $U_k$ vedoucí ke stavu $S_k$ je optimální, budeme-li znát $U_{k+1..N}^{*}$ a $J_{k+1N}^{*}$.

$$U_k^{*} = \arg\left[\operatorname{opt}\left(f_k\left(S_{k-1}, U_k\right) + J_{k+1N}^{*}\right)\right] \quad U_{k..N} \in M_{U_{dov}} \text{ a } J_{kN}^{*} = \operatorname{opt}\left(f_k\left(S_{k-1}, U_k\right) + J_{k+1N}^{*}\right)$$

Protože stav $S_{k-1}$ neznáme (kromě stavu $S_0$) musíme v každém kroku spočítat optimum pro všechny přípustné alternativy tohoto stavu (pozn. jejich počet může být na rozdíl od zadání naší úlohy v každém kroku obecně různý) tj. **podmíněná optimalizace** (symbol $*$ označuje podmíněné optimum). K nalezení optima je tedy potřeba provést celkem $1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{Nalt_i} 1$ sub-optimalizací nákladových funkcí $f_k + J_{k+1N}^{*}$ vyjadřujících cenu přechodu ze stavu $S_{k-1}$ do stavu $S_k$. Pokud tímto postupem dospějeme až do zadaného (vynuceného) stavu $S_0$, je tím nalezena i optimální strategie $U_{1..N}^{*} = U_{1..N}^{\otimes}$ i optimální hodnota kritéria $J_{1N}^{*} = J_{1N}^{\otimes}$ (symbol $\otimes$ označuje optimum celé úlohy). Zbývá jen určit jednotlivé stavy systému $S_{1..N}$ v následujících krocích. Ty spočítáme jako $S_k = S^k\left(S_{k-1}, U_k\right)$ . Této fázi říkáme **nepodmíněná optimalizace**.

Podstata dynamického programování tedy spočívá v rozložení původní optimalizační úlohy do jednodušších podúloh $\operatorname{opt}\left(f_k + J_{k+1N}^{*}\right) = \operatorname{opt}\left(f_k\right) + J_{k+1N}^{*}$ stejného typu.

## III. APLIKACE DP PRO UNIT COMMITMENT

Dynamické programování je využito v úloze Unit Commitment následovně. Cílová funkce (kritérium) je v našem případě:

$$J_{1Nt} = \sum_{t=1}^{Nt} \sum_{j=1}^{Nj} C_j\left(P_{t-1j}\right).\xi_{t-1j} + C_{j+}.\eta_{tj+} + C_{j-}.\eta_{tj-}$$

to lze rozčlenit na

$$J_{1Nt} = \sum_{t=1}^{Nt} f_t\left(\overline{P}_{t-1}, \overline{\xi}_{t-1}, \overline{\xi}_t\right)$$

přičemž hodnota kritéria od *t*-tého kroku až do konce je:

$$J_{tNt} = \sum_{t=i}^{Nt} f_i\left(\overline{P}_{i-1}, \overline{\xi}_{i-1}, \overline{\xi}_t\right) = f_t\left(\overline{P}_{t-1}, \overline{\xi}_{t-1}, \overline{\xi}_t\right) + J_{t+1Nt}$$

Optimalizaci tedy provedeme v *Nt* krocích. Stavem v *t*-tém kroku rozumíme v tomto případě přípustný vektor proměnných $S_{t-1} = \left(\overline{P}_{i-1}, \overline{\xi}_{i-1}\right)$ (stavy počítáme od indexu 0) a rozhodnutím v *t*-tém kroku rozumíme přípustný vektor proměnných $U_t = \overline{\xi}_t$ , tj. sestava, která je v *t+1.* kroku vybrána. V tomto případě platí pro stavovou funkci:

$$S_t = S^t\left(S_{t-1}, U_t\right) = S^t\left(\overline{P}_{t-1}, \overline{\xi}_{t-1}, \overline{\xi}_t\right)$$

kde $S^t$ je stavová funkce v *t*-tém kroku. Protože $U_t \in \left\{\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{Ng}\right\}$ a $t \in \{1, \ldots, Nt\}$ můžeme si soubor stavových funkcí představit jako matici

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1,1} & \ldots & \mathbf{U}_{1,Ng} \\ \ldots & \mathbf{U}_{t,g} & \ldots \\ \mathbf{U}_{Nt,1} & \ldots & \mathbf{U}_{Nt,Ng} \end{bmatrix}$$

Protože jsou vektory logických proměnných přípustných stavů $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{Ng}$ stejné pro $\forall t$, očíslujeme jejich pořadí od 1 do *Ng*. Prvky matice $[\mathbf{U}]$ tak nemusejí obsahovat přímo celé sestavy $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{Ng}$, ale **pouze jejich indexy** $1, \ldots, Ng$, které jsou jednoznačně zvolené sestavě přiřazeny. Jestliže provedeme optimalizaci stavů, pak jejich hodnota v každém kroku závisí také pouze na indexu sestavy. Optimalizovanému stavu tak můžeme rovněž **přiřadit index** $1, \ldots, Ng$.

Cílem **podmíněné optimalizace** je tedy v našem případě naplnit matici $[\mathbf{U}]$ tj. najít pro každý krok (= řádek matice) stavovou funkci tak, aby obecně platilo

$$\mathbf{U}^*_{t,S_{t-1}} = \arg\left[\operatorname{opt}\left(f_t\left(S_{t-1}, U_t\right) + J^*_{t+1Nt,S_t}\right)\right] \quad U_t \in M_{U_{dov}}$$

čemuž odpovídá podmíněná (tj. *za předpokladu že* nastal stav $S_{t-1}$) optimální hodnota kritéria:

$$\mathbf{J}^*_{t,S_{t-1}} = \operatorname{opt}\left(f_t\left(S_{t-1}, U_t\right) + \mathbf{J}^*_{t+1Nt,S_t}\right)$$

Vedle matice podmíněných optimálních strategií $\left[\mathbf{U}^*\right]$ tak souběžně vzniká matice $\left[\mathbf{J}^*\right]$, která obsahuje odpovídající hodnoty části cílové funkce (kritéria) od *t*-tého kroku až do konce (*Nt*) při zvoleném stavu $S_{t-1}$ a pokračující optimální strategii $U_{t..N}$ od *t* až do konce.

Protože známe počáteční stav $S_0$ i počáteční rozhodnutí $U_0$, je cílem **nepodmíněné optimalizace** je v našem případě postupně dosazovat do stavových funkcí podle schématu:

$$U_{t+1}^{\otimes} = S^t\left(S_{t-1}, U_t\right) = S^t\left(U_t^{\otimes}\right) = \mathbf{U}^*_{t,U_t^{\otimes}}$$

Postupným dosazováním pak obdržíme posloupnost $\left\{U_1^{\otimes},\dots,U_{Nt}^{\otimes}\right\}$, zkráceně $U_{1..Nt}^{\otimes}$ neboli optimální strategii výběru sestav.

## IV. STRUČNÝ POPIS ALGORITMU

1. Nejprve provedeme pomocné optimalizace:

   1.a Pro všechny kombinace sestav a všechny časové úseky provedeme *ekonomický dispečink výkonů*, optimální náklady uložíme do matice $\left[\mathbf{C}\right]$ a odpovídající rozdělení výkonů do matice $\left[\mathbf{P}\right]$.

$$\left[\mathbf{C}\right] = \left[ Nt\left\{ \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{\mathbf{C}_{1,1} \quad \dots \quad \mathbf{C}_{1,Ng}}}^{Ng}} \\ \mathbf{C}_{1,1} & \dots & \mathbf{C}_{1,Ng} \\ \dots & \mathbf{C}_{t,g} & \dots \\ \mathbf{C}_{Nt,1} & \dots & \mathbf{C}_{Nt,Ng} \end{array} \right. \right] \quad \text{kde } \mathbf{C}_{t,g} = \underset{\overline{P}_{t-1}\in X_{t-1}}{\text{opt}} \left[\text{diag}\left(\overline{G}_g\right).\overline{C}\left(\overline{P}_{t-1}\right)\right]$$

$$\left[\mathbf{P}\right] = \left[ Nt\left\{ \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{\mathbf{P}_{1,1} \quad \dots \quad \mathbf{P}_{1,Ng}}}^{Ng}} \\ \mathbf{P}_{1,1} & \dots & \mathbf{P}_{1,Ng} \\ \dots & \mathbf{P}_{t,g} & \dots \\ \mathbf{P}_{Nt,1} & \dots & \mathbf{P}_{Nt,Ng} \end{array} \right. \right] \quad \text{kde } \mathbf{P}_{t,g} = \arg\left[\underset{\overline{P}_{t-1}\in X_{t-1}}{\text{opt}} \left[\text{diag}\left(\overline{G}_g\right).\overline{C}\left(\overline{P}_{t-1}\right)\right]\right]$$

   1.b Stanovíme náklady přechodu z jedné sestavy (*i*) do druhé (*j*) pro všechny kombinace sestav a výsledky uložíme do matice $\left[\mathbf{T}\right]$.

$$\left[\mathbf{T}\right] = \left[ Ng\left\{ \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{\mathbf{T}_{1,1} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{1,Ng}}}^{Ng}} \\ \mathbf{T}_{1,1} & \dots & \mathbf{T}_{1,Ng} \\ \dots & \mathbf{T}_{t,g} & \dots \\ \mathbf{T}_{Nt,1} & \dots & \mathbf{T}_{Nt,Ng} \end{array} \right. \right]$$

$$\text{kde } \mathbf{T}_{i,j} = \sum_{k=1}^{Nj} C_{k+}.\overline{G}_j(k).\left(\overline{G}_j(k) - \overline{G}_i(k)\right) + C_{k-}.\overline{G}_i(k).\left(\overline{G}_i(k) - \overline{G}_j(k)\right)$$

2. Následuje fáze podmíněné optimalizace. Postupujeme od konce k začátku.

2.a Máme-li zadán konečný stav $S_{Nt}$, známe i poslední rozhodnutí $U_{Nt} = g_{kon}$. Pro všechny kombinace sestav spočítáme náklady provozu $S_{Nt-1}$ a ceny přechodu do stavu $S_{Nt}$. Výsledky uložíme *Nt*-tých řádků do matic $\left[\mathbf{J}^*\right]$ a $\left[\mathbf{U}^*\right]$.

$$\mathbf{J}^*_{Nt,g} = \mathbf{C}_{Nt,g} + \mathbf{T}_{g,g_{kon}} \text{ a } \mathbf{U}^*_{Nt,g} = g_{kon}$$

2.b Pro další kroky *Nt*-1 až 2 platí:

$$\mathbf{J}^*_{t,g} = \min_{h=1,..,Ng}\left[\mathbf{C}_{t,g} + \mathbf{T}_{g,h} + \mathbf{J}^*_{t+1,h}\right] \text{ a } \mathbf{U}^*_{Nt,g} = \arg\left[\min_{h=1,..,Ng}\left[\mathbf{C}_{t,g} + \mathbf{T}_{g,h} + \mathbf{J}^*_{t+1,h}\right]\right]$$

2.c Pro první krok $S_0 = g_{zac}$:

$$\mathbf{J}^*_{1,g_{zac}} = \min_{h=1,..,Ng}\left[\mathbf{C}_{1,g_{zac}} + \mathbf{T}_{1,h} + \mathbf{J}^*_{2,h}\right] \text{ a } \mathbf{U}^*_{1,g_{zac}} = \arg\left[\min_{h=1,..,Ng}\left[\mathbf{C}_{1,g_{zac}} + \mathbf{T}_{1,h} + \mathbf{J}^*_{2,h}\right]\right]$$

3. Fáze nepodmíněné optimalizace

3.a Pro první krok platí

$$U_0^{\otimes} = g_{zac}$$

3.b Pro další kroky 2 až *Nt*-1 platí

$$U_{t+1}^{\otimes} = \mathbf{U}^*_{t,U_t^{\otimes}}$$

# Výsledky

a) Optimální strategie:

$$U_{1..Nt}^{\otimes} = \left\{\bar{G}_4, \bar{G}_3, \bar{G}_3, \bar{G}_3, \bar{G}_3, \bar{G}_4\right\}$$

b) Optimální strategie:

$$U_{1..Nt}^{\otimes} = \left\{\bar{G}_4, \bar{G}_2, \bar{G}_1, \bar{G}_1, \bar{G}_3, \bar{G}_4\right\}$$

c) Optimální strategie:

$$U_{1..Nt}^{\otimes} = \left\{\bar{G}_2, \bar{G}_1, \bar{G}_1, \bar{G}_1, \bar{G}_1, \bar{G}_1\right\}$$