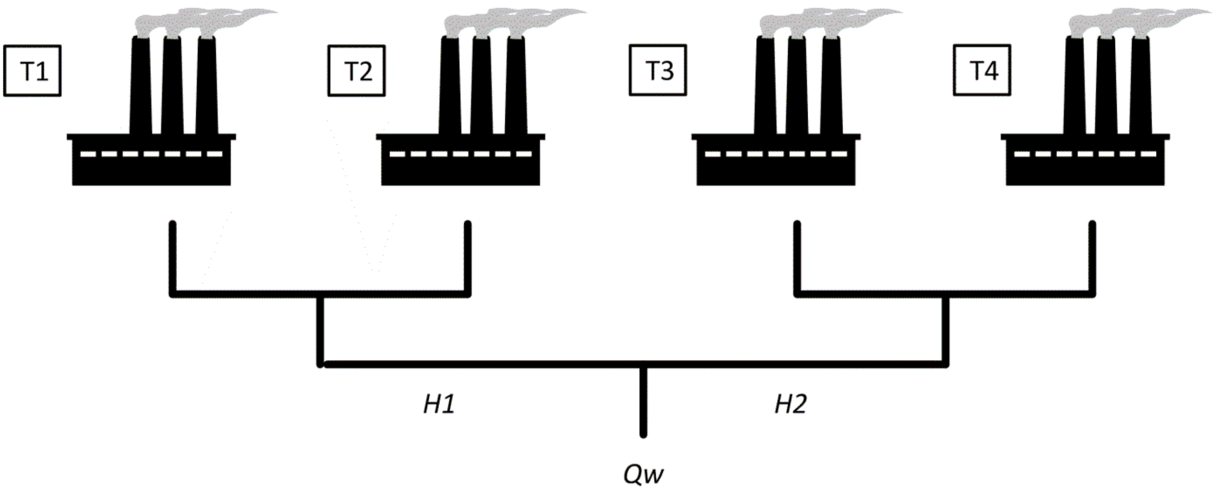
Optimalizace lineárních úloh

Pro teplárenskou síť na obrázku stanovte pro celkový požadovaný odběr tepla Q_w = 1600 MWt výkony jednotlivých tepláren $Q_1 - Q_4$ odpovídající minimálním celkovým provozním nákladům. Řešte pomocí lineárního programování.

a) Určete zadání úlohy lineárního programování v **základním tvaru**, stanovte vektory $\overline{c}$, $\overline{b}_{\leq}$, $\overline{b}_{=}$ a $\overline{b}_{\geq}$ a matice $[\mathbf{A}_{\leq}]$, $[\mathbf{A}_{=}]$ a $[\mathbf{A}_{\geq}]$.

b) Určete zadání úlohy lineárního programování v **kanonickém tvaru**, stanovte vektory $\overline{c}$, $\overline{b}$ a matici $[\mathbf{A}]$.

c) Vyřešte úlohy příkazem linprog v MATLABu.



Teplárny:

Název	Q_{min} [MWt]	Q_{max} [MWt]	Nákladová funkce
T1	50	600	$C_1(Q_1) = 1{,}4.Q_1$
T2	50	500	$C_2(Q_2) = 1{,}2.Q_2$
T3	50	700	$C_3(Q_3) = 1{,}5.Q_3$
T4	100	500	$C_4(Q_4) = 1{,}6.Q_4$

Horkovody:

Název	Q_{hmax} [MWt]
H1	900
H2	900

Návod

I. ZÁKLADNÍ TVAR ÚLOHY

Optimalizační úloha lineárního programování má tvar:

$$\bar{x}^* = \arg\left[\underset{\bar{x}\in X}{\text{opt}}\left(\bar{c}^T.\bar{x}\right)\right]$$

kde X je přípustná oblast (množina na které hledáme řešení). Ta je definována jako:

$$X = \left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^{\partial x} : \bar{x} \geq \bar{0} \text{ (vždy!)}, \left[\mathbf{A}_{\leq}\right].\bar{x} \leq \bar{b}_{\leq},\ \left[\mathbf{A}_{=}\right].\bar{x} = \bar{b}_{=} \text{ a } \left[\mathbf{A}_{\geq}\right].\bar{x} \geq \bar{b}_{\geq}\right\}$$

V našem případě je $\bar{x} = \bar{Q} = \left(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\right)^T$ a nákladová funkce

$$f\left(\bar{x}\right) = f\left(\bar{Q}\right) = c_1.Q_1 + c_2.Q_2 + c_3.Q_3 + c_4.Q_4 = \bar{c}^T.\bar{Q}$$

Pro omezení typu $\geq$ platí:

$$\begin{matrix} Q_1 \geq Q_{1\min} \\ Q_2 \geq Q_{2\min} \\ Q_3 \geq Q_{3\min} \\ Q_4 \geq Q_{4\min} \end{matrix} \quad \text{takže} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} Q_{1\min} \\ Q_{2\min} \\ Q_{3\min} \\ Q_{4\min} \end{pmatrix} \text{ tj. } \left[\mathbf{A}_{\geq}\right].\bar{x} \geq \bar{b}_{\geq}$$

Pro omezení typu $=$ platí:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_w \text{ takže } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = Q_w \text{ tj. } \left[\mathbf{A}_{=}\right].\bar{x} = \bar{b}_{=}$$

Pro omezení typu $\leq$ platí:

$$\begin{matrix} Q_1 \leq Q_{1\max} \\ Q_2 \leq Q_{2\max} \\ Q_3 \leq Q_{3\max} \\ Q_4 \leq Q_{4\max} \\ Q_1 + Q_2 \leq Q_{h1\max} \\ Q_3 + Q_4 \leq Q_{h2\max} \end{matrix} \quad \text{takže} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Q_{1\max} \\ Q_{2\max} \\ Q_{3\max} \\ Q_{4\max} \\ Q_{h1\max} \\ Q_{h2\max} \end{pmatrix} \text{ tj. } \left[\mathbf{A}_{\leq}\right].\bar{x} \leq \bar{b}_{\leq}$$

II. KANONICKÝ TVAR ÚLOHY

Množina přípustných řešení je pro tento typ úlohy ve tvaru:

$$X = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^{\partial \overline{x}} : \overline{x} \geq \overline{0} \ , \ \left[\mathbf{A}\right].\overline{x} = \overline{b} \right\}$$

Pro získání omezujících podmínek v této formě je třeba převést podmínky $\geq$ a $\leq$ na podmínky typu $=$. Převedení podmínek typu $\geq$ je následující:

$$x_i \geq b_i \ \rightarrow \ -x_i + \xi_i = -b_i \ \text{kde} \ \xi_i \geq 0$$

Pro převedení podmínek typu $\leq$ platí obdobně:

$$x_i \leq b_i \ \rightarrow \ x_i + \xi_i = b_i \ \text{kde} \ \xi_i \geq 0$$

kde ξ_i jsou doplňkové proměnné. Po aplikaci těchto úprav je možné získat jedinou matici $\left[\mathbf{A}\right]$ a vektor $\overline{b}$.

III. STRUČNÝ POPIS ALGORITMU

Řešení úlohy (optimum) leží (jsou-li splněny podmínky řešitelnosti) na vrcholu (obecně tzv. opěrnou nadrovinou) konvexního polyedru daného množinou přípustných řešení X. Je-li více proměnných než omezujících podmínek (*n* > *m* je-li matice $\left[\mathbf{A}\right]$ typu *m* x *n*), můžeme řešení zapsat ve tvaru

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_B \\ \overline{x}_N \end{pmatrix} \ \text{kde} \ \overline{x}_N = \overline{0}$$

kde $\overline{x}_B$ je *m* bázových proměnných a $\overline{x}_N$ je *n-m* nebázových proměnných. Jelikož platí

$$\overline{x}^* = \begin{pmatrix} \overline{x}_B^* \\ \overline{x}_N^* \end{pmatrix} = \arg\left[\underset{\overline{x} \in X}{\text{opt}} \left(\overline{c}^T . \overline{x} \right) \right] = \arg\left[\underset{\overline{x} \in X}{\text{opt}} \left(\begin{pmatrix} \overline{c}_B & \overline{c}_N \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \overline{x}_B \\ \overline{x}_N \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$\left[\mathbf{A}\right].\overline{x} = \overline{b} \ \text{tj.} \ \left[\left[\mathbf{A}_B\right] \quad \left[\mathbf{A}_N\right] \right] . \begin{pmatrix} \overline{x}_B \\ \overline{x}_N \end{pmatrix} = \overline{b}$$

můžeme si $\overline{x}_B$ vyjádřit jako

$$\overline{x}_B = \left[\mathbf{A}_B\right]^{-1} . \overline{b} - \left[\mathbf{A}_B\right]^{-1} . \left[\mathbf{A}_N\right] . \overline{x}_N$$

Úloha tedy spočívá v nalezení takové kombinaci indexů proměnných báze *B* a nebáze *N*, aby platilo

$$\overline{x}^* = \begin{pmatrix} \overline{x}_B^* \\ \overline{0} \end{pmatrix} = \arg\left[\underset{\overline{x} \in X}{\text{opt}} \left(\overline{c}_B^{\ T} . \overline{x}_B \right) \right] \ \text{tak, že} \ \overline{x}_B^* = \left[\mathbf{A}_B\right]^{-1} . \overline{b} \ , \ \overline{x}_N^* = \overline{0} \ \text{a} \ \overline{x} \in X$$

Poslední podmínka $\overline{x} \in X$ je velmi důležitá, protože **ne každá kombinace bazických indexů generuje přípustné** (natož optimální) **řešení**! V prvním kroku je tedy nutné najít alespoň jedno přípustné řešení, tedy takovou kombinaci *B*, pro kterou bude platit $\left[\mathbf{A}_B\right]^{-1}.\overline{b} \geq \overline{0}$.

Další popis bude kvůli stručnosti za předpokladu, že úlohou je minimalizace. Cílem algoritmu je postupně vyměňovat indexy bázových a nebázových proměnných dokud nedosáhneme minima cílové funkce. Pokud jsme nalezli přípustné řešení, je nutné otestovat, zda se jedná o minimum. Přepíšeme-li cílovou funkci do tvaru

$$f = \overline{c}_B^{\,T}.\left[\mathbf{A}_B\right]^{-1}.\overline{b} + \left(\overline{c}_N^{\,T} - \overline{c}_B^{\,T}.\left[\mathbf{A}_B\right]^{-1}.\left[\mathbf{A}_N\right]\right).\overline{x}_N = \overline{c}_B^{\,T}.\left[\mathbf{A}_B\right]^{-1}.\overline{b} + \overline{c}_{\mathrm{mod}}^{\,T}.\overline{x}_N$$

kde $\overline{c}_{\mathrm{mod}}$ je modifikovaný vektor cen úlohy. Bude-li pro alespoň jeden nebázový index k platit $c_{\mathrm{mod}\,k} < 0$, znamená to, že existuje alespoň jedna nebázová proměnná $x_k > 0$, $k \in N$, která snižuje hodnotu cílové funkce *f*. **Pokud** $\overline{c}_{\mathrm{mod}} \geq \overline{0}$ **nalezli jsme optimum**. V opačném případě vybereme do báze ten index *j*, který odpovídá $c_{\mathrm{mod}\,j} = \min\left(\overline{c}_{\mathrm{mod}}\right)$.

Zbývá tedy určit, který bázový index se naopak přesune do nebáze. Protože bude platit

$$f = \overline{c}_B^{\,T}.\left(\left[\mathbf{A}_B\right]^{-1}.\overline{b} - \left[\mathbf{A}_B\right]^{-1}.\left[\mathbf{A}_N\right]_{\bullet j}.x_j\right) + c_j.x_j = \overline{c}_B^{\,T}.\left(\overline{d} - \overline{w}.x_j\right) + c_j.x_j$$

je třeba maximalizovat x_j tak, že $d_k - x_j.w_k \geq 0,\ w_k > 0,\ k \in B$. Aby bylo x_j maximální, je nutné odstranit *i*-tou podmínku (a tedy *i*-tou bázovou proměnnou):

$$\frac{d_i}{w_i} = \min\left(\frac{d_k}{w_k}\right)$$

Po prohození *i*-tého prvku báze a *j*-tého prvku nebáze vstupujeme do další iterace.

Výsledky

a) Zadání základní úlohy:

$$\overline{c}^{\,T} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 1{,}2 & 1{,}5 & 1{,}6 \end{pmatrix} \quad \left[\mathbf{A}_=\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \overline{b}_= = 1600$$

$$\left[\mathbf{A}_\geq\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \overline{b}_\geq = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad \left[\mathbf{A}_\leq\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \overline{b}_\leq = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 700 \\ 500 \\ 900 \\ 900 \end{pmatrix}$$

b) Zadání úlohy v kanonickém tvaru:

$$\overline{c}^T = \begin{pmatrix} 1,4 & 1,2 & 1,5 & 1,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} -50 \\ -50 \\ -50 \\ -100 \\ 600 \\ 500 \\ 700 \\ 500 \\ 900 \\ 900 \\ 1600 \end{pmatrix}$$

c) Optimální řešení

$$Q_{1opt} = 400 \text{ MWt}$$
$$Q_{2opt} = 500 \text{ MWt}$$
$$Q_{3opt} = 600 \text{ MWt}$$
$$Q_{4opt} = 100 \text{ MWt}$$
$$C\left(\overline{Q}^*\right) = 2220$$