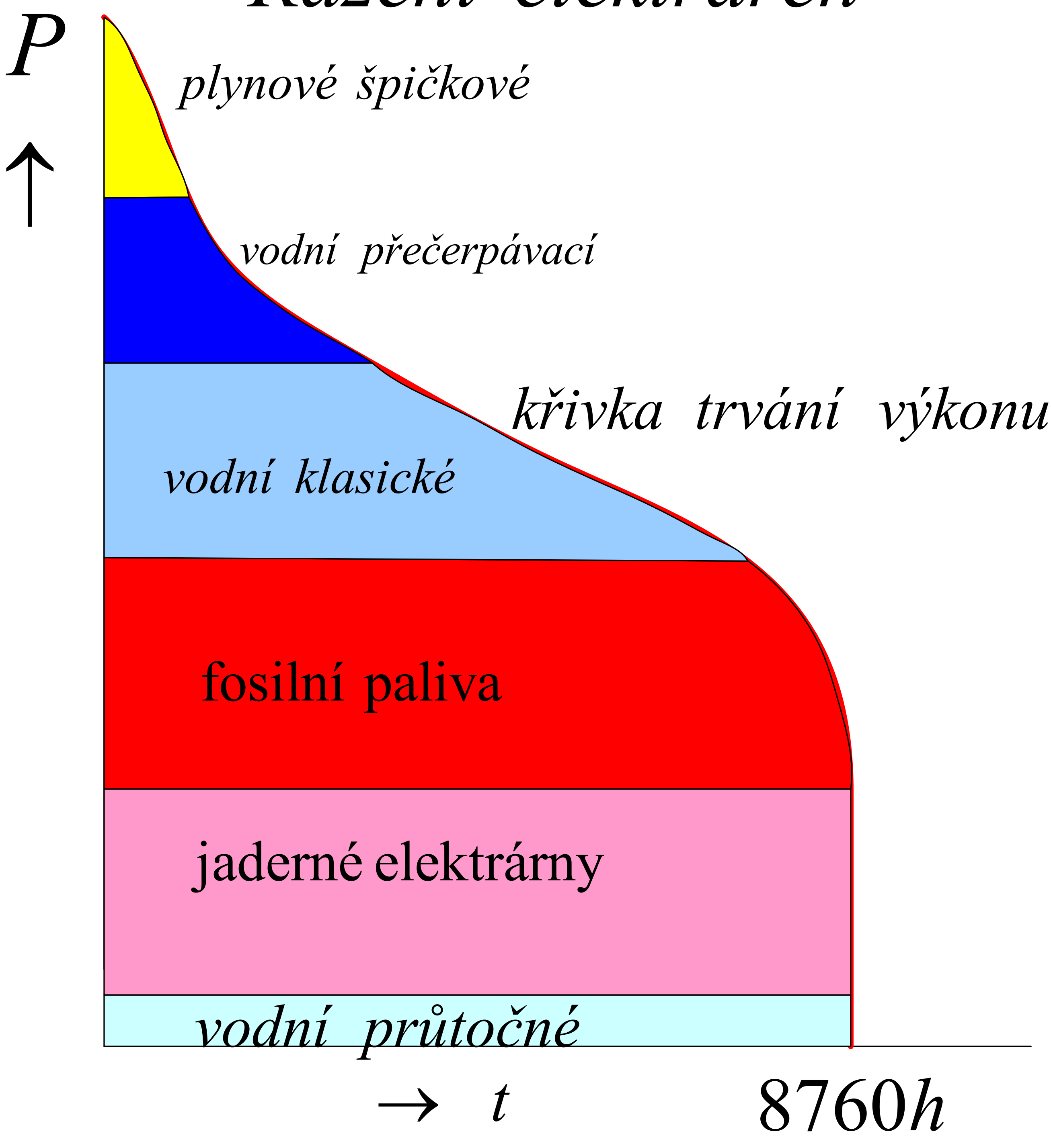
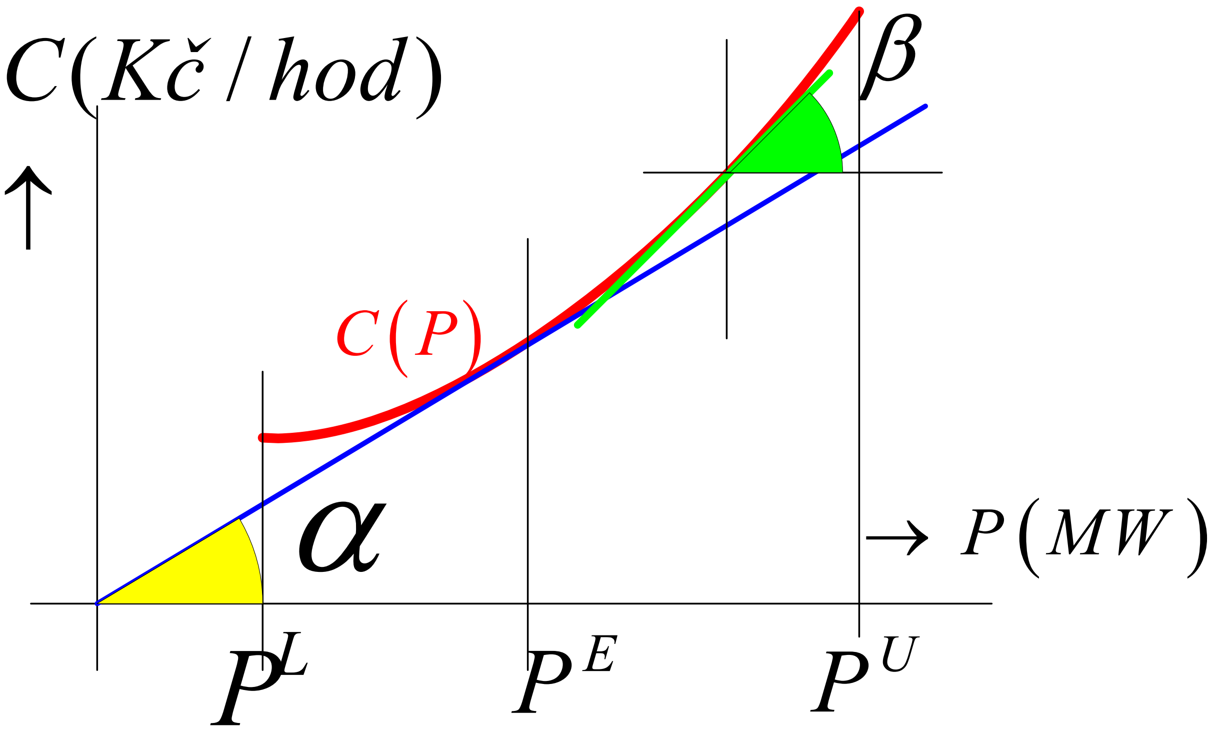
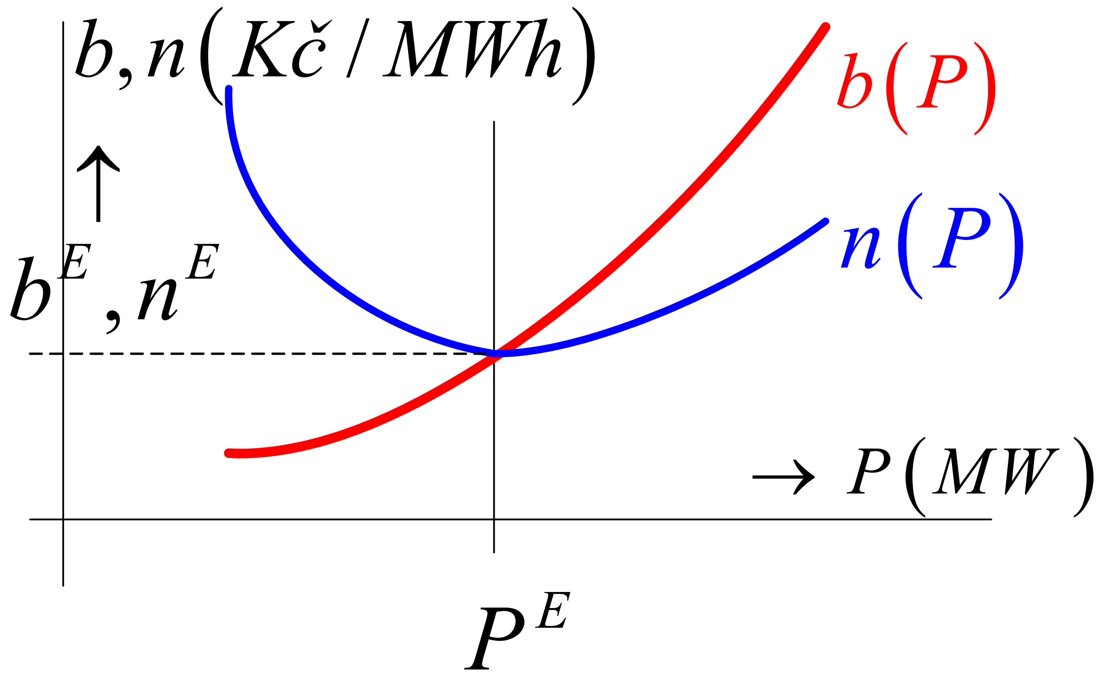
Řazení elektráren







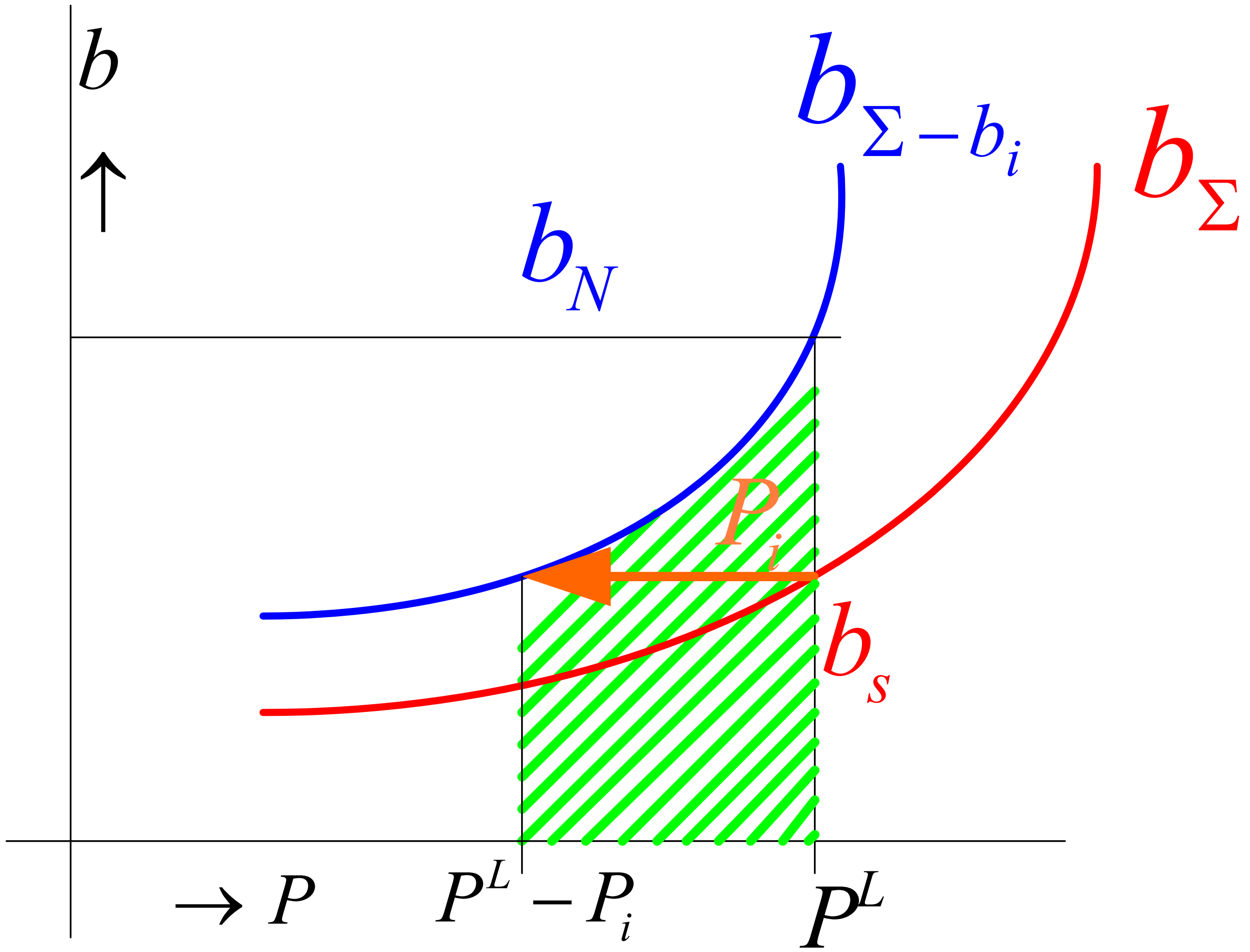
$n = C(P)/P = \mathrm{tg}\,\alpha$....měrné náklady

$b = dC(P)/dP = tg\,\beta$..poměrný přírůstek nákladů

P^L, P^U...minimální a maximální výkon

P^E ekonomický výkon

Odstavování bloku



P_i... *výkon odstavované* $i-$*té elektrárny*

Podmínka ekonomicky výhodného odstavení :

$C(P_i) = n(P_i).P_i$ *náklady na provoz* $i-$*té elektrárny*

změna nákladů způsobená odpojením $i-$*té elektrárny* :

$$C_\Delta(P_i) = \int_{P^L-P_i}^{P^L} b_{\Sigma-b_i}(P)dP \approx \frac{b_s + b_n}{2} P_i$$

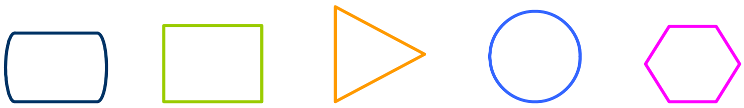
Výsledná podmínka :

$$C(P_i) - C_\Delta(P_i) > 0 \Rightarrow n(P_i) > \frac{b_s + b_n}{2}$$

Dynamické programování – dopravní problém ($N = 5$)

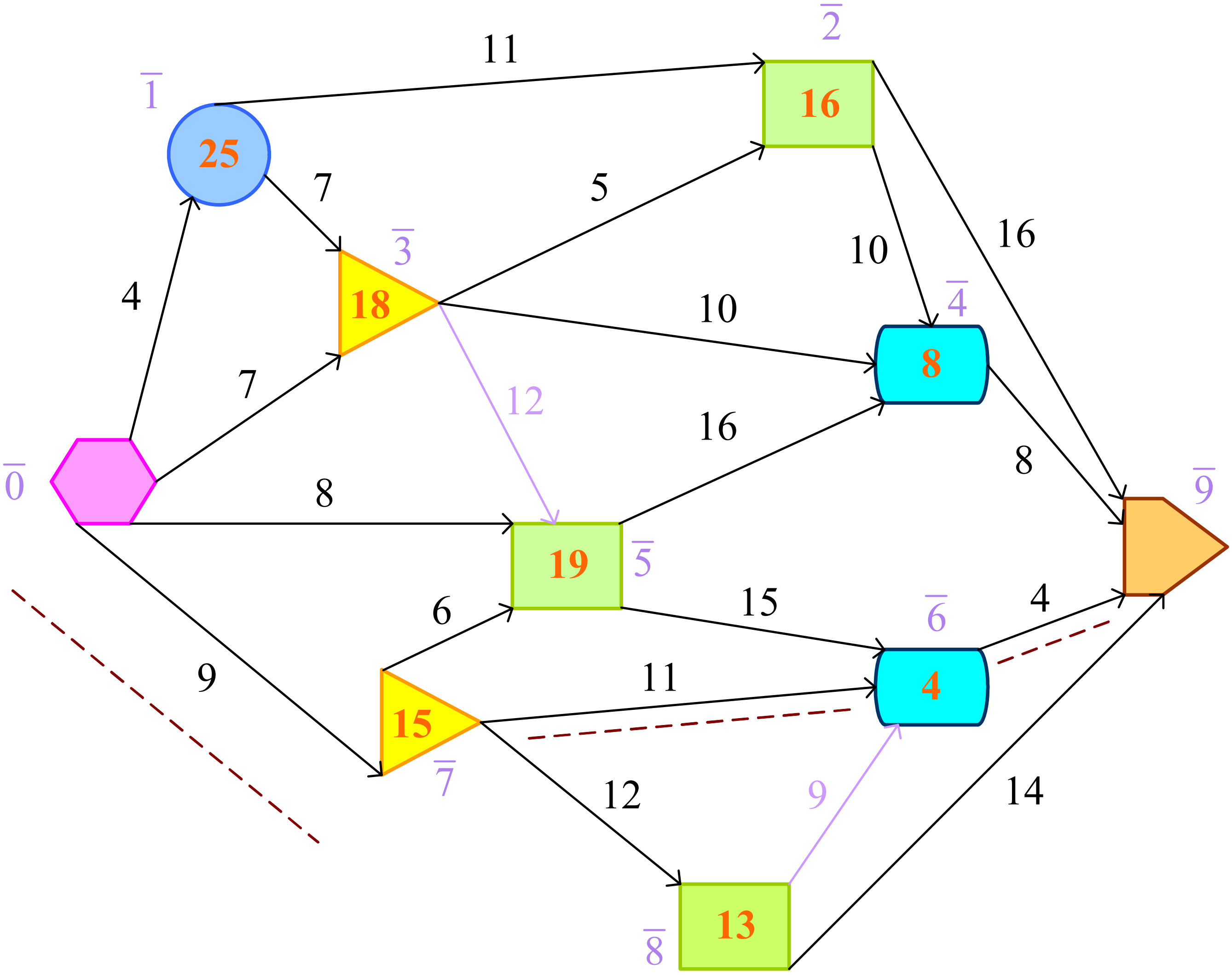
Skupiny s_k …. do N ne více jak za N-k kroků

k	4	3	2	1	0
S_k	4, 6	2, 5, 8	3, 7	1	0



$$J_k^*(i) = \min\left\{a_{ij} + J_{k+1}^*(j)\right\} \quad \rightarrow \quad \text{hodnota } i - j = a_{ij},\ i = S_{k-1},\ j = S_k$$

$$u_k^*(i) = j$$



$$k=4 \quad \rightarrow \quad J_5^*(4)=8$$

$$J_5^*(6)=4$$

$$k=3 \quad \rightarrow \quad J_4^*(2)=\min \begin{array}{ll} 16/U_4(2)=9 & \leftarrow \\ 10+8=18/U_4(2)=4 & \end{array}$$

$$J_4^*(5)=\min \begin{array}{ll} 16+8=24/U_4(5)=4 & \\ 15+4=19/U_4(5)=6 & \leftarrow \end{array}$$

$$J_4^*(8)=\min \begin{array}{ll} 9+4=13/U_4(8)=6 & \leftarrow \\ 14/U_4(8)=9 & \end{array}$$

$$k=2 \quad \rightarrow \quad J_3^*(3)=\min \begin{array}{ll} 5+16=21/U_3(3)=2 & \\ 10+8=18/U_3(3)=8 & \leftarrow \\ 12+15+4=31/U_3(3)=5 & \end{array}$$

$$J_3^*(7)=\min \begin{array}{ll} 6+15+4=25/U_3(7)=5 & \\ 11+4=15/U_3(7)=6 & \leftarrow \\ 12+9+4=25/U_3(7)=8 & \end{array}$$

$$k=1 \quad \rightarrow \quad J_2(1)=\min \begin{array}{ll} 11+16=27/U_2(1)=2 & \\ 7+18=25/U_2(1)=3 & \leftarrow \end{array}$$

$$J_1(0)=24 \qquad \{0,\ 7,\ 6,\ 9\}$$

Dynamické programování

Autor: R. Bellman (USA) – převádí hledání extrému $N \cdot n$ proměnných na hledání extrému funkce n proměnných v N krocích.

<u>Princip</u> <u>optimality</u>: Nezávisle na předchozích rozhodnutích musí být pokračující strategie *optimální vzhledem k dosaženému stavu*.

Aplikace na rozhodovací proces

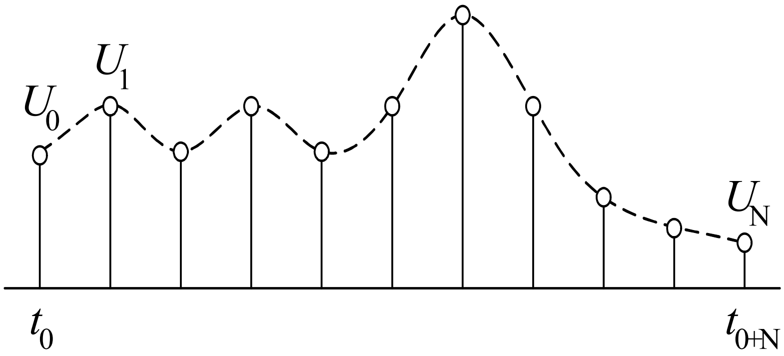
$$\underset{t_{k-1}}{\boxed{S_{k-1}}} \xrightarrow{U_k} \underset{t_k}{\boxed{S_k}}$$

stavová rovnice

$$S_k = S\left(S_{k-1}, U_k\right)$$

$$U_k^j = \left\{U_k,\, U_{k+1},\, \dots,\, U_j\right\} \quad \text{strategie rozhodnutí}$$

$$S_k^j = \left\{S_k,\, S_{k+1},\, \dots,\, S_j\right\} \quad \text{trajektorie stavů}$$



Úloha: Stanovit U_1^N tak, aby kriterium

$$J_1^N\left(S_0^N,\, U_1^N\right) \qquad (2)$$

bylo optimální

Věta: Koncový stav S_N závisí na výchozím S_0 a strategii U_1^N.

důkaz :

$$S_1 = S(S_0, U_1)$$

$$S_2 = S(S_1, U_2) = S(S(S_0, U_1), U_2) = \phi_2(S_0, U_1^2)$$

$$S_N = \phi_N(S_0, U_1^N) \tag{3}$$

Z rovnice (2) vyloučíme nadbytečné stavy

$$J_1^{N\otimes} = (S_0, U_1^N) \tag{4}$$

a analogicky pro všechny zbylé stavy

$$J_k^{N\otimes} = (S_{k-1}, U_k^N) \tag{5}$$

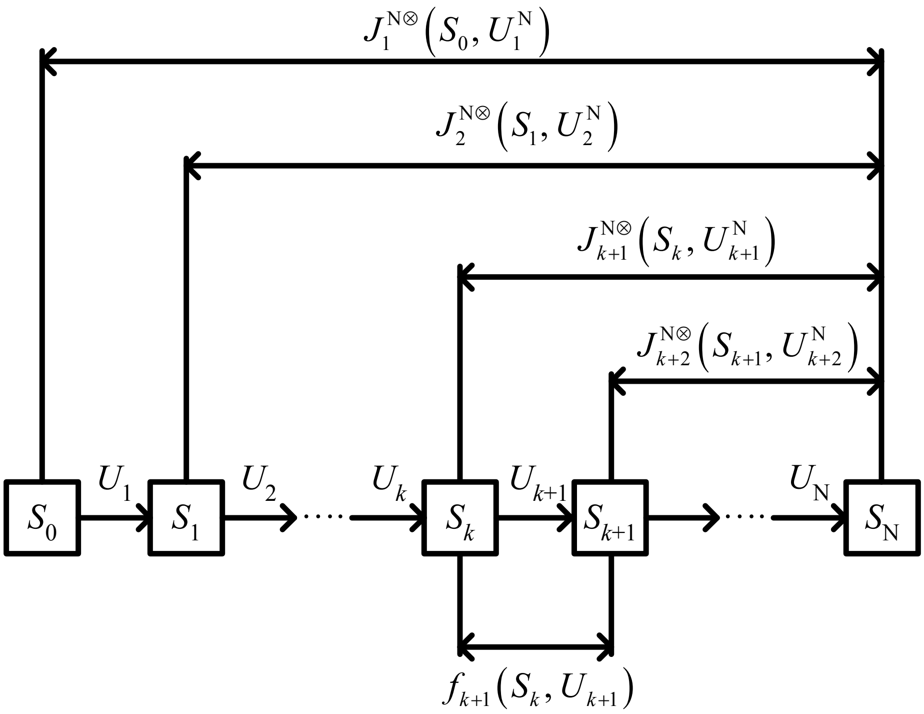


Schéma N-krokového rozhodovacího procesu

Optimální strategie:

$$ {}^{*}U_1^{\mathrm{N}} = \arg\operatorname{opt} \tilde{J}_1^{\mathrm{N}}\left(S_0, U_1^{\mathrm{N}}\right) \qquad U_1^{\mathrm{N}} \in U_1^{\mathrm{N}}\mathrm{dov} $$

Podmínky na kriteria optimality

1. musí být definováno pro každé přirozené $k \leq N \Rightarrow$ existuje posloupnost:

$$ J_1^{1\otimes} = \left(S_0, U_1\right),\ J_1^{2\otimes} = \left(S_0^2, U_1^2\right), \dots ,\ J_1^{\mathrm{N}\otimes} = \left(S_0^{\mathrm{N}}, U_1^{\mathrm{N}}\right) $$

obecně: $J_1^{k\otimes} = \left(S_0^k, U_1^k\right)$ pro $k = 1$ až N

2. kriterium $J_1^{k\otimes} = \left(S_0^k, U_1^k\right)$ pro $k \geq 2$ lze vyjádřit pomocí kriteria $J_1^{k-1} = \left(S_0^{k-1}, U_1^{k-1}\right)$ a zadané funkce $\varphi_k\left(S_{k-1}, U_k\right)$

vhodné: $J_1^{k\otimes} = \left(S_0^k, U_1^k\right) = \sum_{i=1}^{k} f_i\left(S_{i-1}, U_i\right)$

Výpočetní postup

$$ J_{\mathrm{N}+1}\left(S_{\mathrm{N}}\right) = 0 $$

1. Blok podmíněné optimalizace pro

$$ k = N, \dots , 1, 1 $$

$$ u_k^{*}\left(S_{k-1}\right) = $$

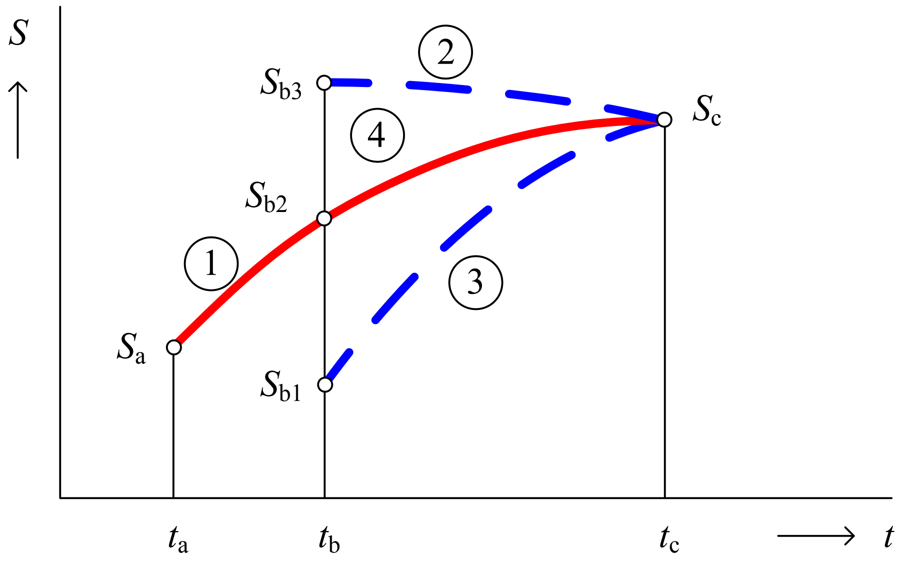
$$ {}^{*}J_k^{\mathrm{N}}\left(S_{k-1}\right) = $$

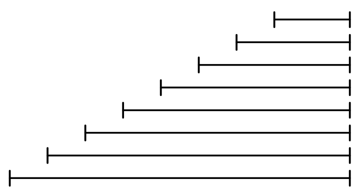
2. Blok nepodmíněné optimalizace pro

$$ k = 1, \dots , N, 1 $$

$$ u_k^{\otimes} = $$

$$ S_k = S\left(u_k^{\otimes}, S_{k-1}\right) $$





Vnoření úloh

Z principu optimality vyplývá: při syntéze ze stavu S_k se hledá

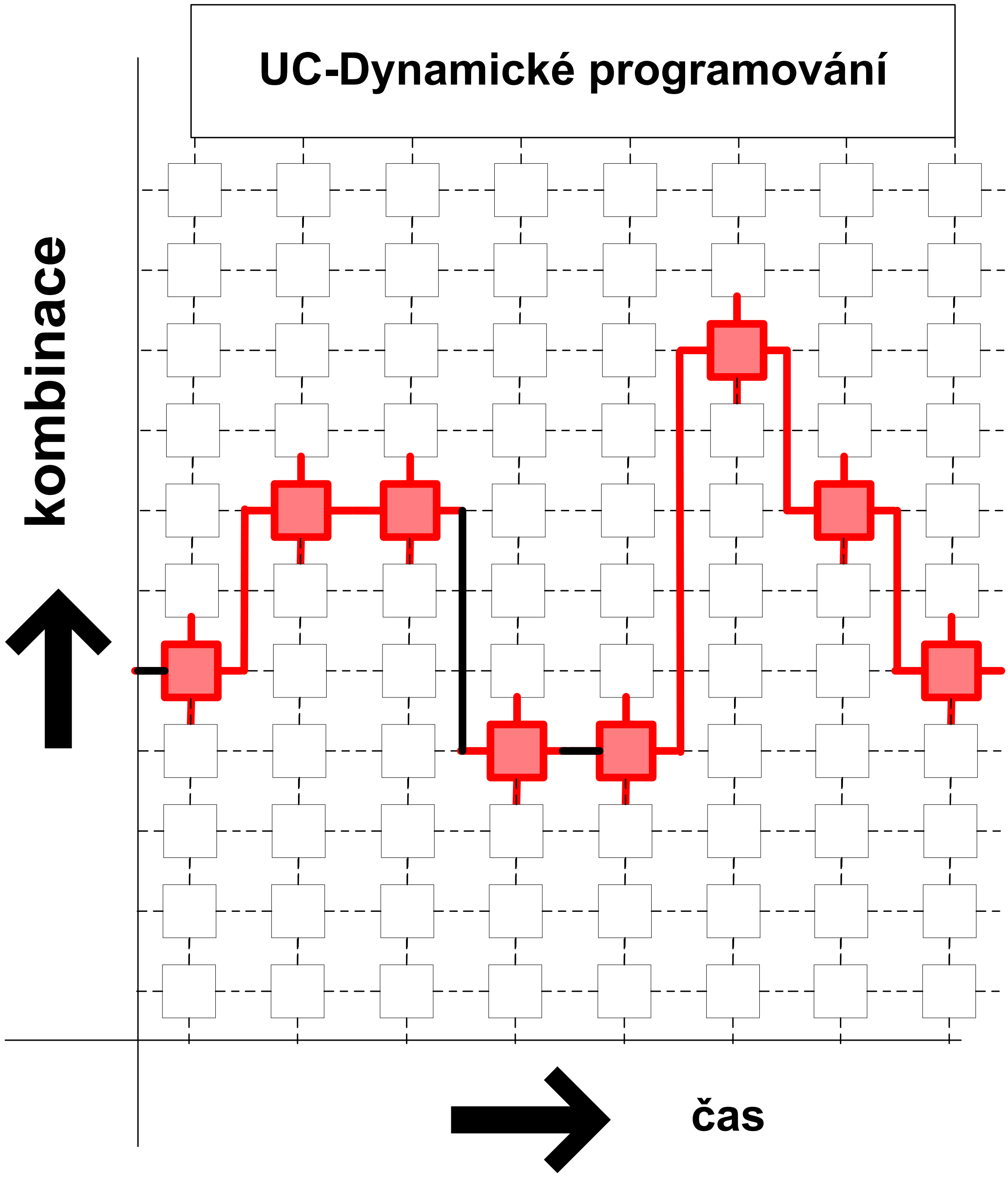
$$U_{k+1}^{N\otimes} = \arg\operatorname{opt} J_{k+1}^{N}\left(S_k, U_{k+1}^{N}\right) = \arg\operatorname{opt} \sum_{i=k}^{N} f_i\left(S_{i-1}, U_i\right)$$

$$\rightarrow \qquad U_{k+1}^{N} \in U_{\mathrm{dov}},\ U_i \in U_{\mathrm{dov}}$$

Při aplikaci od začátku dostáváme posloupnost do sebe vnořených úloh, neboť hledání ${}^{*}U_k^{N}$ obsahuje v sobě úlohu pro $k = 1$ až N.

$$J_k^{N\otimes}\left(S_{k-1}, U_k^{N\otimes}\right) = \operatorname{opt}\left\{ f_k\left(S_{k-1}, U_k\right) + J_{k+1}^{N\otimes}\left(S_{k+1}\right)\right\}$$

Bellmanova funkcionální rovnice



Směr pohybu
Cena práce do konce
Cena práce v daném intervalu

$\overline{\kappa}_i(k) = \text{kombinace}\,\overline{\kappa}_\mathrm{i}$ v intervalu k

$\varepsilon_i^*(k) = \text{optimální cena}\,\overline{\kappa}_\mathrm{i}$ v intervalu k

$\mathrm{T_{ij}}(k) = \text{cena přechodu}\ \overline{\kappa}_\mathrm{i} \Rightarrow \overline{\kappa}_\mathrm{j}$

$f_{ij}(k) = \varepsilon_i^*(k) + \mathrm{T_{ij}}(k)$

$N = \text{počet intervalů}$

$$J_i^*(k) = \min\left\{ \overbrace{\varepsilon_i^*(k) + \mathrm{T_{ij}}(k)}^{f_{ij}(k)} + J^*(k+1) \right\}$$

Vývojový diagram

$\mathrm{J_{N+1}} = 0$

cykl pro $k = N:1$

  cykl pro $\forall \overline{\kappa}_i(k)$

   určit $\varepsilon_i^*(k)$

    cykl pro $\forall \overline{\kappa}_j(k+1)$

     určit $\mathrm{T_{ij}}(k)$, *vyzvednout* $J^*(k+1)$

     $J_i(k) = \{ f_{ij}(k) + J^*(k+1) \}$

     pamatuj $J_i(k), \overline{\kappa}_j(k+1)$

    cykl pro $\forall \overline{\kappa}_j(k+1)$

     nalézt minimum $J_i(k)$

  konec cyklu $\overline{\kappa}_i(k)$

konec cyklu k

zpětný chod

```
% Program UC-DP
% Optimální sestava jednotek -Unit Commitment - metoda
Dynamického Programování
% Příklad
A0=[500;400;600;400];A1=[8.0;6.4;7.9;7.5];A2=[0.004;0.0048;0.0
050;0.0055];
B0=A1; B1=2*A2;    % parametry charakteristiky poměrných
přírůstků
Pmin=[100;100;75;75];Pmax=[625;625;600;500];% meze výkonu
Cup=[3000;3000;3000;3000];Cdwn=[1500;1500;1500;1500];% cena
najetí a odstavení
PL=[1100;1400;1600;1800;1400;1100]; %diagram zátěže
TD=[4;4;4;4;4;4];%délka trvání intervalu
Sgr=[1 1 1 1;
     1 1 1 1;
     1 1 0 0;
     1 0 1 0];      % nastavení spinačů grupy
Nt=size(PL,1);Ngr=size(Sgr,2);Ngen=size(A0,1);  %Dimenze polí
% grupa označuje sestavu agregátů, je uložena ve sloupci Sgr
jako kombinace 0,1
% číslo řadku je číslo stroje, číslo sloupce je číslo grupy
Jopt=zeros(Nt,Ngr);Uopt=zeros(Nt,Ngr); %pole optimálních
hodnot kriteriía optimálních rozhodnutí
Cig=zeros(Nt,Ngr,Ngen);Pig=zeros(Nt,Ngr,Ngen);%pole výkonů a
cen
Grzac=4;Grkon=4; %definice začátečních a koncových grup.Lze je
získat metodou vypínání

% Ekonomické rozdělení
for gr = 1:Ngr,               % cyklus přes čísla grup
(=sloupce Sgr)
B1gr(gr)=1/sum(Sgr(:,gr) ./B1);% ekvivalentní parametry grupy
B0gr(gr)=B1gr(gr)*sum((Sgr(:,gr) .*B0) ./B1);
     for t=1:Nt,    % cyklus přes t-intervaly P-diagramu
        b(t,gr)=B1gr(gr)*PL(t)+B0gr(gr); %pom. přírůstky
         suma=0;
               for g=1:Ngen
Pig(t,gr,g)=Sgr(g,gr)*(b(t,gr)-B0(g))/B1(g);% výkon
jednotlivých strojů
Cig(t,gr,g)=Sgr(g,gr)*A0(g)+(A1(g) +
A2(g)*Pig(t,gr,g))*Pig(t,gr,g);    % cena práce strojů
               suma=suma + Cig(t,gr,g);
        end %g
        Ctgr(t,gr)=suma*TD(t);
          end %t
   end %gr

   %ceny přechodu
   Tij=zeros(Ngr,Ngr);
   for i=1:Ngr
      for j=1:Ngr
```

```
         suma=0;
             for g=1:Ngen,
suma=suma+Cup(g)*(Sgr(g,j)-
Sgr(g,i))*Sgr(g,j)+Cdwn(g)*(Sgr(g,i)-Sgr(g,j)*Sgr(g,i));
               end %g
          Tij(i,j)=suma;
          end% j
     end %i

% fáze podmíněné optimalizace
t=Nt
Uopt(t,:)=Grkon; j=Grkon;
for  i=1:Ngr,
    Jopt(t,i)=Ctgr(t,i)+Tij(i,j);
end %i

for t=Nt-1:-1:2
     for i = 1:Ngr,
          Minimum=realmax;
   for j = 1:Ngr,
     cena= Ctgr(t,i)+Tij(i,j)+Jopt(t+1,j);
               if cena < Minimum
                  Jopt(t,i)=cena;
               Uopt(t,i)=j;
               Minimum=cena;
               end%if
   end % j
 end %i
end % t

%první interval
Minimum=realmax;
for j = 1:Ngr,
   cena=Ctgr(1,Grzac)+Tij(Grzac,j)+Jopt(2,j);
          if cena < Minimum
                  Jopt(1,Grzac)=cena;
               Uopt(1,Grzac)=j;
               Minimum=cena;
               end%if
   end % j

   % nepodmíněná optimalizace
   Str(1)=Grzac;Str(Nt)=Grkon;%vynucené strategie
     for t=2:Nt-1,
     Str(t)=Uopt(t-1,Str(t-1));
       end %t
```

Dopředné dynamické programování.

x...počet zkoumaných stavů v každé periodě

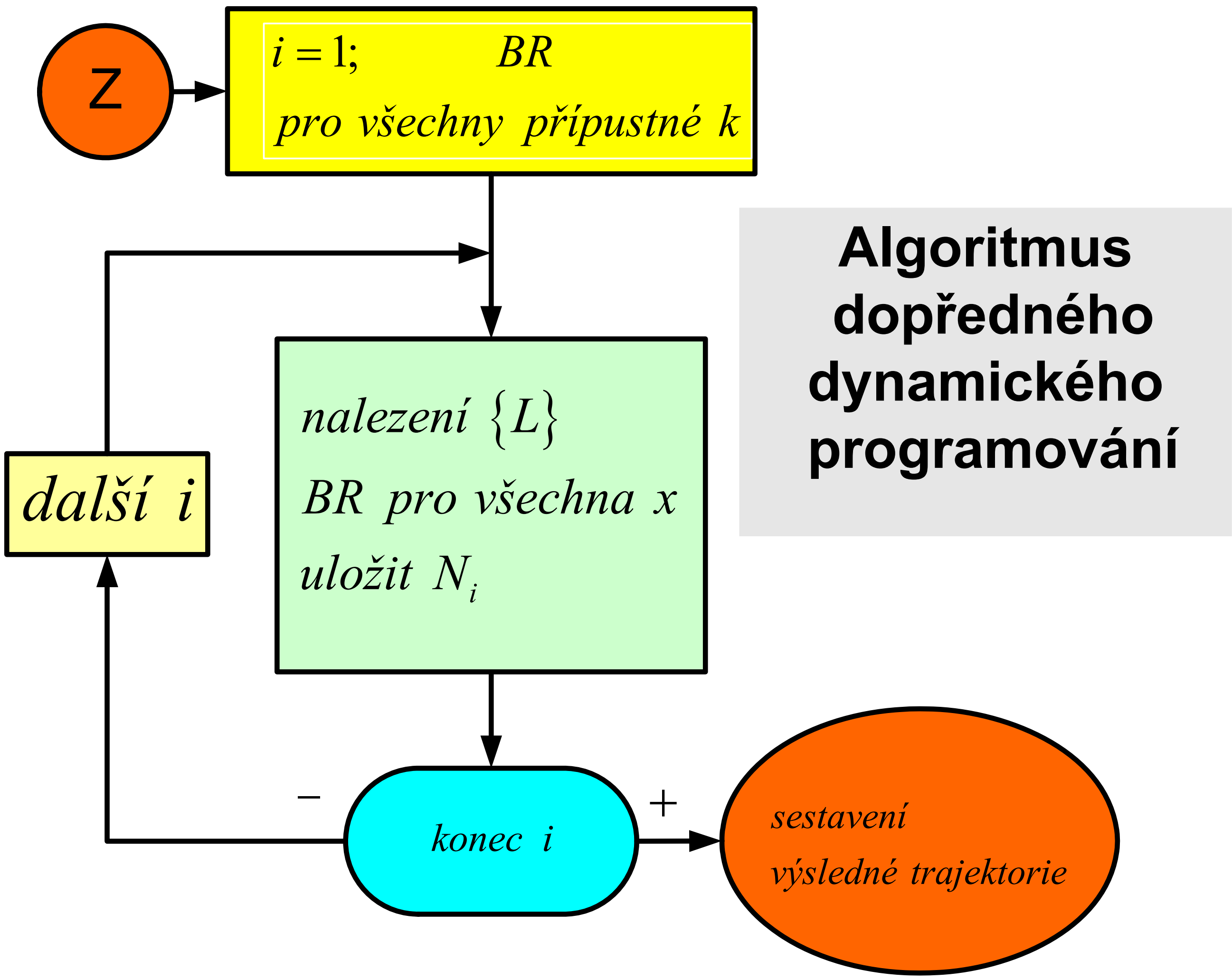
N..počet trajektorií na každém kroku

k...číslo kombinace zdrojů i....číslo časového intervalu

$\{L_{i-1}\}$....N nejlepších stavů z intervalu i - 1

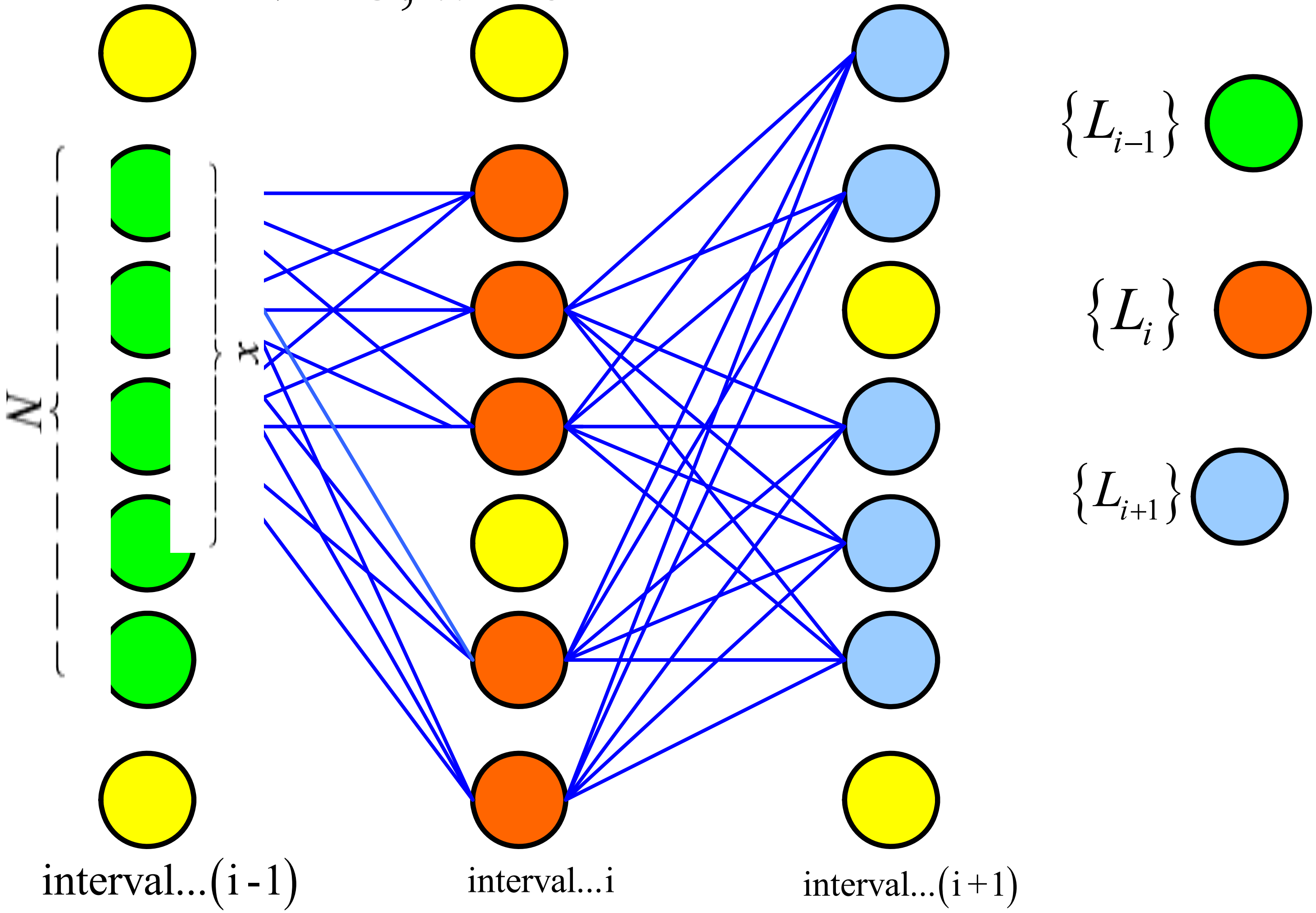
Bellmanova rovnice (BR):

$$\underbrace{F(k,i)}_{\substack{\text{nejnižší cena} \\ \text{k dosažení stavu} \\ \text{(k,i)}}} = \min_{\{L_{i-1}\}} \left\{ \underbrace{C(k,i)}_{cena\ produkce} + \underbrace{T(\{L_{i-1}\}, i-1 : k, i)}_{cena\ přechodu} + F(\{L_{i-1}\}, i-1) \right\}$$

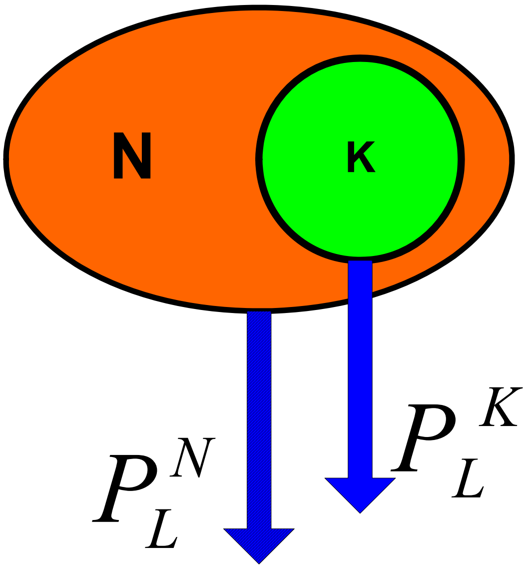


Dopředné dynamické programování

$$N = 3,\ x = 5$$



Ekonomický dispečink s DP



$$C_i\left(P_i\right)=\sum_{\mathrm{k}} a_{\mathrm{k}i} P_i^k,\ b_i=\frac{\partial C_i}{\partial P_i}$$

Je-li v soustavě N generátorů rozdělena zátěž $P_{\mathrm{L}}^{\{\mathrm{N}\}}$, pak v libovolné soustavě k generátorů je optimálně rozdělena $P_{\mathrm{L}}^{\{\mathrm{k}\}}$.

Kriteriální funkce: $\min \sum_i C_i\left(P_i\right),\ \sum_i P_i = P_L$

Definuje se posloupnost funkcí:

$$f_k\left(P_{\mathrm{L}}^{\{k\}}\right), \qquad k \quad \rightarrow \quad k=1,\ 2,\ldots.$$

ekvivalentní generátor: $P_L^{\{k\}}=\left\{P_1,\ P_2,\ldots,\ P_k\right\}$

$$\underbrace{f_k\left(P_{\mathrm{L}}^{\{k\}}\right)}_{\substack{\text{ekvivalentní}\\ \text{generátor}\, k}}=\min_{\forall P_k}\left\{C_k\left(P_k\right)+f_{k-1}\left(P_{\mathrm{L}}^{\{k\}}-P_k\right)\right\}$$

$$\rightarrow \quad P_{\mathrm{L}}^{\{k\}}=P_k+P_{\mathrm{L}}^{\{k-1\}},$$

hledá se takové P_k, které minimalizuje $f_k\left(P_{\mathrm{L}}^{\{k\}}\right)$

$$f_{k-1}\left(\underbrace{P_{\mathrm{L}}^{\{k\}}-P_k}_{P_L^{\{k-1\}}}\right) \text{ ekvivalentní generátor } k-1$$

$$\min\left\{P_1^2+2P_2^2+3P_3^2\right\}, \qquad P_1+P_2+P_3=P_L$$

$$\textit{základní vztahy}: \qquad f_0=0$$

$$f_k\left(P_{\mathrm{L}}^{\{k\}}\right)=\min_{\forall P_k}\left\{C_k\left(P_k\right)+f_{k-1}\left(P_{\mathrm{L}}^{\{k\}}-P_k\right)\right\}$$

$$k=1$$

$$f_1\left(P_{\mathrm{L}}^{\{1\}}\right)=\min_{\forall P_1}\left\{C_1\left(P_1\right)+f_0\right\}=\min\left\{P_1^2\right\}=P_1^2=P_{\mathrm{L}}^{\{1\}2}$$

$$k=2 \qquad f_2\left(P_{\mathrm{L}}^{\{2\}}\right)=\min_{\forall P_2}\left\{C_2\left(P_2\right)+f_1\left(P_{\mathrm{L}}^{\{2\}}-P_2\right)\right\}$$

$$4P_2-2\left(P_{\mathrm{L}}^{\{2\}}-P_2\right)=0\Rightarrow P_2=\frac{1}{3}P_{\mathrm{L}}^{\{2\}}$$

$$f_2\left(P_{\mathrm{L}}^{\{2\}}\right)=2\frac{1}{9}P_{\mathrm{L}}^{\{2\}2}+\left(P_{\mathrm{L}}^{\{2\}}\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)^2=\frac{2}{3}P_{\mathrm{L}}^{\{2\}2}$$

$$k=3 \qquad f_3\left(P_{\mathrm{L}}^{\{3\}}\right)=\min_{\forall P_3}\left\{C_3\left(P_3\right)+f_2\left(P_{\mathrm{L}}^{\{3\}}-P_3\right)\right\}$$

$$6P_3-\frac{4}{3}\left(P_{\mathrm{L}}^{\{3\}}-P_3\right)=0\Rightarrow P_3=\frac{4}{22}P_{\mathrm{L}}^{\{3\}}=\frac{4}{22}P_{\mathrm{L}}$$

===================================

$$\textit{nepodmíněná optimalizace}:$$

$$P_{\mathrm{L}}=22;\Rightarrow P_3=4;P_2=\frac{22-4\rightarrow}{3}=6;\; P_1=22-10=12$$

===================================

$$\textit{kontrola}: \qquad 2P_1=4P_2=6P_3$$

$$2.12=4.6=6.4$$

===================================

Nákladové charakteristiky					
PG	0	10	20	30	40
$C_1(P_{G1})$	**0**	**100**	**200**	**400**	**600**
$C_2(P_{G2})$	**0**	**200**	**400**	**600**	**800**
$C_3(P_{G3})$	**0**	**300**	**500**	**600**	**700**

P_L=60;

Podmíněná optimalizace:

K=1

P_L^1	0	10	20	30	40	50	60
C1(P)	**0**	**100**	**200**	**400**	**600**	**x**	**x**
$f_1\left(P_L^1\right)$	**0**	**100**	**200**	**400**	**600**	**x**	**x**

K=2 $T\left\{C_2\left(P_2\right)+f_1\left(P_L^2-P_2\right)\right\}$

$\downarrow P_2, P_L^2 \rightarrow$	0	10	20	30	40	50	60
0	**0**	**100**	**200**	**400**	**600**	**x**	**x**
10	**x**	**200**	**300**	**400**	**600**	**800**	**x**
20	**x**	**x**	**400**	**500**	**600**	**800**	**1000**
30	**x**	**x**	**x**	**600**	**700**	**800**	**1000**
40	**x**	**x**	**x**	**x**	**800**	**900**	**1000**
$f_2\left(P_L^2\right)$	**0**	**100**	**200**	**400**	**600**	**800**	**1000**
P_L^2	**0**	**0**	**0**	**0** **10**	**0** **10** **20**	**10** **20** **30**	**20** **30** **40**

K=3

$$T\left\{C_3\left(P_3\right)+f_2\left(P_L^3-P_3\right)\right\}$$

$\downarrow P_3, P_L^3 \rightarrow$	0	10	20	30	40	50	60
0	**0**	**100**	**200**	**400**	**600**	**800**	**1000**
10	**x**	**300**	**400**	**500**	**700**	**900**	**1100**
20	**x**	**x**	**500**	**600**	**700**	**900**	**1100**
30	**x**	**x**	**x**	**600**	**700**	**800**	**1000**
40	**x**	**x**	**x**	**x**	**700**	**800**	**900**
$f_3\left(P_L^3\right)$	**0**	**100**	**200**	**400**	**600**	**800**	**900**
P_L^3	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0** **30** **40**	**40**

Nepodmíněná optimalizace:

$$P_3^{\otimes} = f_3\left(60\right) = 900 \quad \Rightarrow P_L^3 = 40$$

$$P_2^{\otimes} = f_2\left(60-40\right) = 200 \quad \Rightarrow P_L^2 = 0$$

$$P_1^{\otimes} = f_1\left(20\right) = 200 \quad \Rightarrow P_L^1 = 20$$

Rozklad úlohy na dva separátní problémy:

$$\min\left\{f\left(\overline{x}\right)\right\};\ omezení: R\left(\overline{x}\right)=0$$

primární problém: $L\left(\overline{x},\lambda\right)=f\left(\overline{x}\right)+\lambda.R\left(\overline{x}\right)$

vytvoření duální funkce:

$$q\left(\lambda\right)=\min_{\overline{x}}\ L\left(\overline{x},\lambda\right)\Rightarrow q^{*}\left(\lambda\right)=\max_{\lambda\geq 0}\ q\left(\lambda\right)$$

Příklad: $\min\left\{f\left(\overline{x}\right)\right\}=C_{21}x_1^2+C_{22}x_2^2\ ,R\left(\overline{x}\right)=P_L-x_1-x_2$

$$L\left(\overline{x},\lambda\right)=C_{21}x_1^2+C_{22}x_2^2+\lambda\left(P_L-x_1-x_2\right)$$

$$q\left(\lambda\right)=\min_{\overline{x}}\ L\left(\overline{x},\lambda\right)=\min_{\overline{x}}\left\{C_{21}x_1^2+C_{22}x_2^2+\lambda\left(P_L-x_1-x_2\right)\right\}$$

$$\frac{\partial q\left(\lambda\right)}{\partial x_1}=2C_{21}x_1-\lambda=0\Rightarrow x_1=\frac{\lambda}{2C_{21}}$$

$$\frac{\partial q\left(\lambda\right)}{\partial x_2}=2C_{22}x_2-\lambda=0\Rightarrow x_2=\frac{\lambda}{2C_{22}}$$

$$q\left(\lambda\right)=C_{21}\left(\frac{\lambda}{2C_{21}}\right)^2+C_{22}\left(\frac{\lambda}{2C_{22}}\right)^2+\lambda\left(P_L-\frac{\lambda}{2C_{21}}-\frac{\lambda}{2C_{22}}\right)$$

$$q\left(\lambda\right)=-\frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{1}{C_{21}}+\frac{1}{C_{22}}\right)+\lambda P$$

$$q^{*}\left(\lambda\right)=\max_{\lambda\geq 0}\ q\left(\lambda\right),\ \frac{\partial q\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}=-\frac{2\lambda}{4}\left(\frac{1}{C_{21}}+\frac{1}{C_{22}}\right)+P=0$$

$$\lambda=2.P\Big/\left(\frac{1}{C_{21}}+\frac{1}{C_{22}}\right)$$

Pokrývání zbytkového parního diagramu

DDZ=diagram denního zatížení ZPD=zbytkový parní diagram

DA(DP)=diagram akumulačních(průtočných) elektráren

VP= diagram vynuceného provozu

$$ZPD = DDZ - DA - DP - VP$$

j.... index jednotky ∂_i.... počet jednotek

i..... index intervalu ∂_j.... počet intervalů

Cj (Pj)... nákladová funkce j-tého stroje

Cj+(Cj-) ... náklady na najíždění, (odstavení)

ξ_j^i...... *indikátor stavu* $j-$*té jednotky v čase* i $(0 = odstaven, \quad 1 = provoz)$

$\eta_{j\pm}^i$......*indikátor změny stavu* $(1$ *změna ano*, $0 = beze$ *změny*$)$

$$\eta_{j+} = (\xi_j^i - \xi_j^{i-1})\ \xi_j^i,\quad \eta_{j-} = (\xi_j^{i-1} - \xi_j^i)\xi_j^{i-1}$$

ξ_j^{i-1}	ξ_j^i	η_{j+}	η_{j-}
0	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**0**

P_Σ^i..... celková hodnota zátěže v intervalu i

P_Δ^i..... celkový ztrátový výkon v intervalu i

P_R^i...... rezervní výkon v intervalu i.

cílová funkce: $F = \sum_{i=1}^{\partial_i} \sum_{j=1}^{\partial_j} (C_j^i \xi_j^i + \eta_j + C_j^i + \eta_j^- + C_{j-}^i)$

omezení: $\sum_{j=1}^{\partial_j} P_j^i \xi_j^i = P_\Sigma^i + P_\Delta^i,\qquad \sum_{j=1}^{\partial_j} P_j^U \xi_j^i \geq P_\Sigma^i + P_\Delta^i + P_R^i$

Označení:

$t, \overline{t}$	horní index = hodnota v intervalu t. vektor = množina intervalů času.
$P_j^t, P_L^t, \lambda_P^t$	Výkon jednotky j, celkové zátěže, duální proměnné v intervalu t
$\overline{P}_j, \overline{P}_L, \overline{\lambda}_P$	časový vektor $P_j^t, P_L^t, \lambda_P^t$
$\partial j, \partial t$	horní mez pro index jednotek, intervalů
$\square, \otimes$	prozatímní, optimální hodnota

Ilustrační příklad na L-relaxaci

$$\min F(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = (0.25 x_1^{\,2} + 15)\xi_1 + (0.255 x_2^{\,2} + 15)\xi_2$$

$$\textit{omezení}: \qquad 5 - x_1\xi_1 - x_2\xi_2 = 0$$

$$0 \le x_1 \le 10, \quad 0 \le x_2 \le 10, \quad \xi_1 = 0/1, \quad \xi_2 = 0/1,$$

řešení:

$$\xi_1 = 0, \ \xi_2 = 0$$

řešení neexistuje, není splněna omezovací podmínka

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = 0 \Rightarrow x^{\otimes}_1 = 5, \ F^{\otimes}(\bullet) = 21.25$$

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \Rightarrow x^{\otimes}_2 = 5, \ F^{\otimes}(\bullet) = 21.375$$

$\xi_1=1,\quad \xi_2=1$

$\min\{L(x_1,x_2,\lambda)=(0.25x_1^{\;2}+15)+(0.255x_2^{\;2}+15)+\lambda(5-x_1-x_2)\}$

$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0.5x_1-\lambda=0\,,\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=0.51x_1-\lambda=0,\ \ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=5-x_1-x_2=0$

$x_1=2.5248,\ x_2=2.4752\quad \lambda=1.2642\Rightarrow F^{\otimes}(\bullet)=33.1559$

Úprava pro dualizaci úlohy.

$$\min\{L(x_1,x_2,\lambda)=(0.25x_1{}^2+15-\lambda x_1)\xi_1+$$
$$(0.255x_2{}^2+15-\lambda x_2)\xi_2+5\lambda\}$$

$$\min\{(a_{2j}x_j^2+a_{0j}-\lambda x_j)\xi_j\}$$

$$2a_{2j}x_j-\lambda=0\quad\Rightarrow\quad x_j^{\otimes}=\frac{\lambda}{2a_{2j}}$$

$$(a_{2j}x_j^{\otimes 2}+a_{0j}-\lambda x_i^{\otimes})>0\ \Rightarrow\xi_j^{\otimes}=0$$

$$(a_{2j}x_j^{\otimes 2}+a_{0j}-\lambda x_i^{\otimes})<0\ \Rightarrow\xi_j^{\otimes}=1$$

Algoritmus řešení

1.volba startovacího λ

2. nalezení $x_j^{\otimes}, \xi_j^{\otimes}, pro\ \forall j$

3. je-li optimum pak konec,

jinak nové λ, goto 2

Zjednodušený Lagrangián pro UC:

$$L = \underbrace{\sum_{t=1}^{\partial t}\sum_{j=1}^{\partial j}\left(C_j\left(P_j^t\right).\xi_j^t + \eta_{j+}^t C_{j+} + \eta_{j-}^t C_{j-}\right)}_{cílová\ \ funkce} + \underbrace{\sum_{t=1}^{\partial t}\lambda_P^t\left(P_L^t - \sum_{j=1}^{\partial j} P_j^t \xi_j^t\right)}_{\substack{omezovací \\ podmínka}}$$

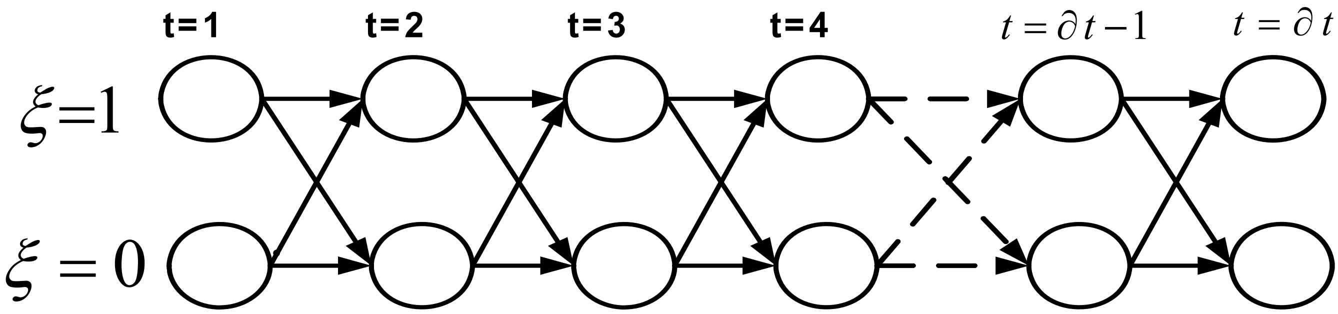
$$L = \sum_{t=1}^{\partial t}\sum_{j=1}^{\partial j}\left(C_j\left(P_j^t\right).\xi_j^t - \lambda_P^t P_j^t\right).\xi_j^t + \underbrace{\sum_{t=1}^{\partial t}\lambda_P^t P_L^t + \eta_{j+}^t C_{j+} + \eta_{j-}^t C_{j-}}_{nezávislé\ na\ P}$$

$$\left(\partial L / \partial P_j^t\right) = b_j^t - \lambda_P^t = 0 \Rightarrow \tilde{P}_j^{t\otimes} \text{...odhad optimálního výkonu}$$

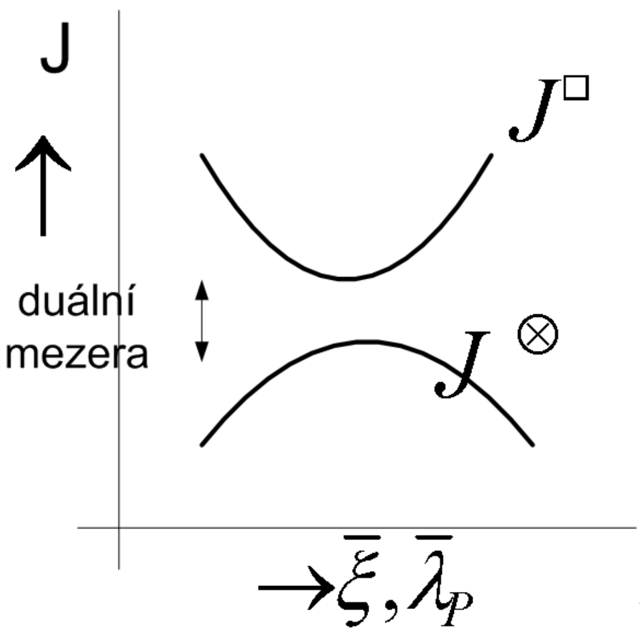
omez. podmínky	*přiřazení hodnoty* $P_j^{t\otimes}$
$\tilde{P}_j^{t\otimes} < P_j^-$	$P_j^{t\otimes} = P_j^-$
$\tilde{P}_j^{t\otimes} > P_j^+$	$P_j^{t\otimes} = P_j^+$

$P_j^- < \tilde{P}_j^{t\otimes} < P_j^+$	$P_j^{t\otimes} = \tilde{P}_j^{t\otimes}$
podmínka produkce	**přiřazení spinače**
$C_j\left(P_j^{t\otimes}\right) - \lambda^t . P_j^{t\otimes} > 0$	$\xi_j^t = 0,\ \ vypnuto$
$C_j\left(P_j^{t\otimes}\right) - \lambda^t . P_j^{t\otimes} < 0$	$\xi_j^t = 1,\ \ \ zapnuto$

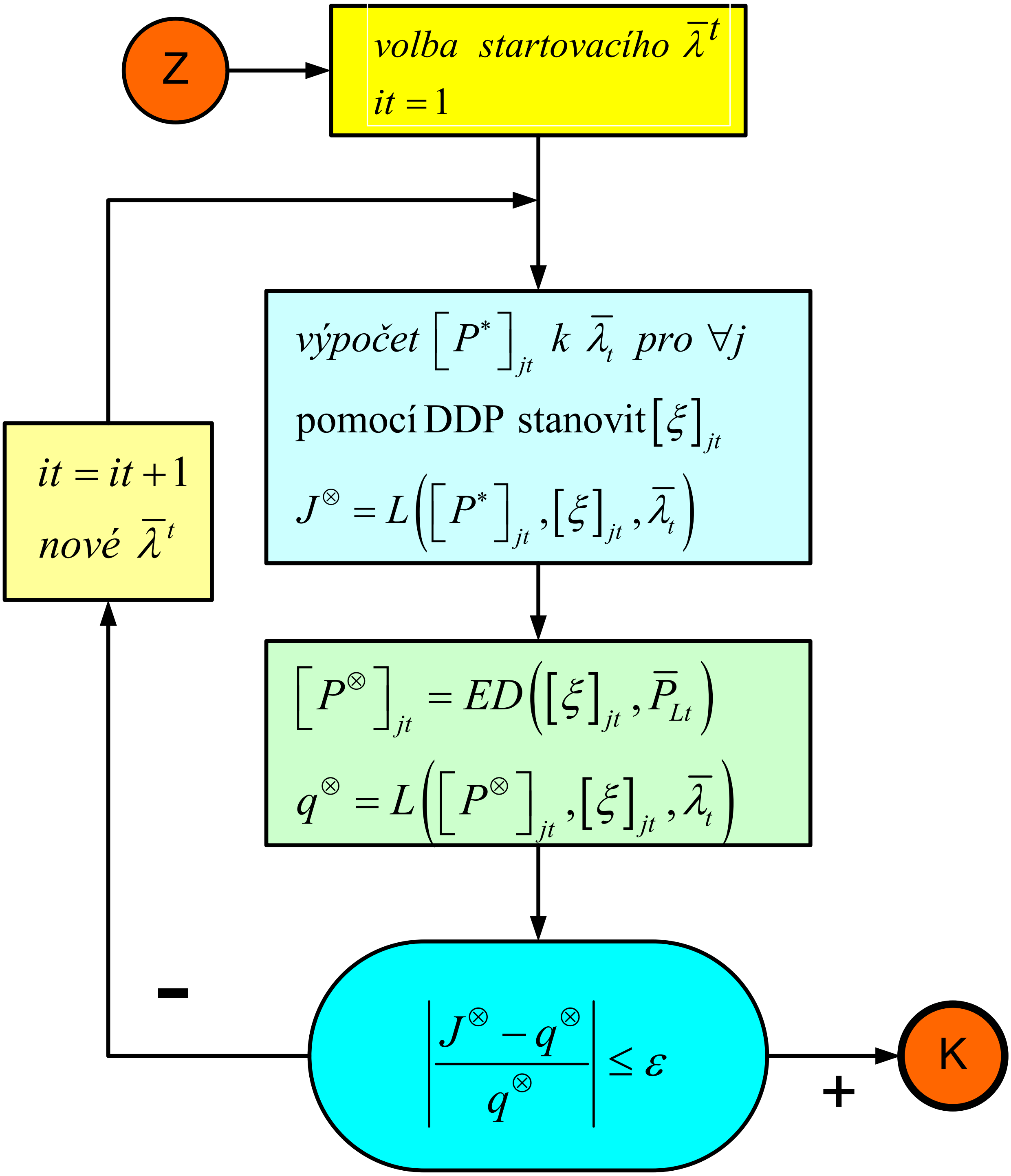
Dynamické programování pro dva stavy a jeden stroj.



Dualitní mezera



Výběr optimální sestavy zdrojů Lagrangeovou relaxací



Optimalizace s integrálním omezením.

Omezující podmínka:

$$\int_0^T M(t,P)dt - M^U \le 0 \text{.....integrální omezující podmínka}$$

M....aktuálně spotřebovávané množství media (voda, palivo)

M^U....limitní hodnota spotřeby

P........výkon zařízení

T........perioda provozu

příklad pokrytí diagramu sestavou zdrojů :

j.....obecný index zdroje, ∂..označení velikosti (řádu)

$\partial s + 1$ parních elektráren (index $s \in \langle 0, \partial s \rangle, 0 = \text{slack}$)

∂h vodních elektráren s akumulací $\left(\text{index } h \in \langle 1, \partial h \rangle\right)$

$\partial t = 24$ hod. optimalizační perioda denního diagramu

$\left(\text{index času } t \in \langle 1, 24 \rangle\right)$

$P_L(t)$......denní diagram $P_\Delta(t)$......ztráty

$V^\bullet(t,h)$....spotřeba vody h-té elektrárny v t-tém intervalu

$\left(V_h^\bullet\right)^U$ ....zadaná objemová spotřeba vody h-té elektrárny za optimalizační periodu ∂t

cíl:minimální cena výroby při respektování integrálních omezení

Lagrangián :

$$\mathsf{L} = \sum_{t=1}^{\partial t}\sum_{s=0}^{\partial s} C_s\left(P_{st}\right) + \text{..cílová funkce minimalizace ceny práce parních elen}$$

$$\sum_{t=1}^{\partial t}\lambda_{pt}\left(\sum_{s=0}^{\partial s} P_{st} + \sum_{h=1}^{\partial h} P_{ht} - P_{Lt} - P_{\Delta t}\right) + \text{.....omezovací podmínka bilancí P}$$

$$+\sum_{h=1}^{\partial h}\lambda_{V_h^\bullet}\sum_{t=1}^{\partial t}\left(V_{ht}^\bullet - \left(V_h^\bullet\right)^U\right)\text{......omezovací podmínka integrální spotřeby}$$

$b_s + \lambda_p\left(1 - \partial P_\Delta / \partial P_s\right) = 0$	PARNÍ ELEKTRÁRNY
$\lambda_p\left(1 - \partial P_\Delta / \partial P_h\right) + \lambda_{V^\bullet,t}\left(\partial V_t^\bullet / \partial P_h\right) = 0$	VODNÍ ELEKTRÁRNY

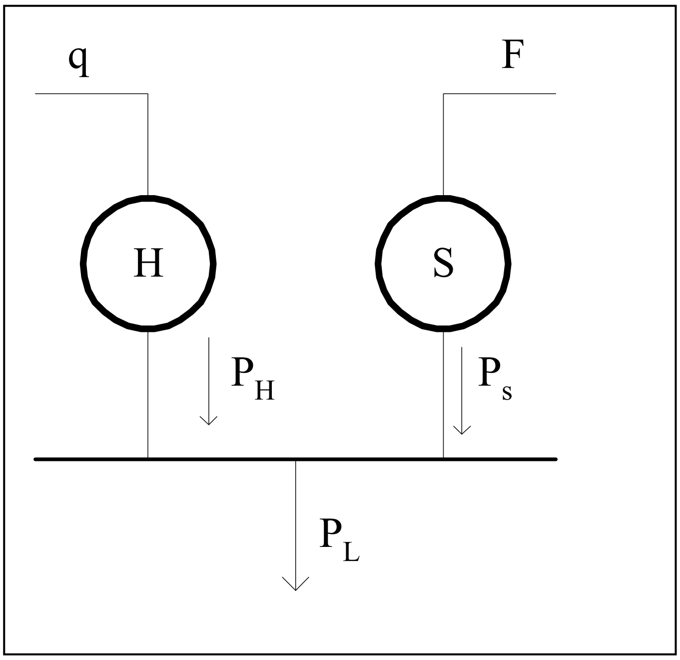
Výpočet poměrných přírůstků

$$-\lambda_p = \overbrace{\frac{b_s}{1 - \left(\partial P_\Delta / \partial P_s\right)}}^{pára} = \overbrace{\frac{\lambda_{V^\bullet,h}\cdot\left(\partial V_h^\bullet / \partial P_h\right)}{1 - \left(\partial P_\Delta / \partial P_h\right)}}^{voda} = b_0$$

Algoritmus výpočtu:

1. *volba* $\overline{\lambda}_{V_h^\bullet}$
2. *ekonomické rozdělení pro* $\forall t, \forall h$
3. *není – li porušeno omezení pak konec jinak* 4
4. *korekce* $\overline{\lambda}_{V_h^\bullet}$ *návrat do* 2

Příklad:



$t, \partial t$ index a počet period

n_t diskrétní délka periody t

$T_T = \sum_{\forall t} n_t$. doba diagramu,

N_s počet intervalů páry.

N_t …….. počet period

podmínky:

$$P_{H,t}^{\max} \geq P_{L,t}$$

$$\sum_{\forall t} P_{H,t} \cdot n_t \leq \sum_{\forall t} P_{L,t} \cdot n_t$$

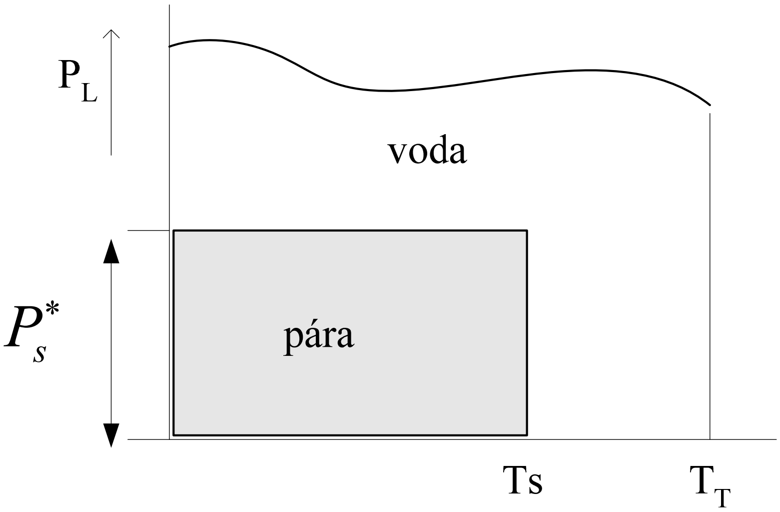
Nedostatek energie vody musí pokrýt pára tak, aby cena provozu byla minimální.

$$\sum_{\forall t} \underbrace{P_{L,t} \cdot n_t}_{E_L} - \sum_{\forall t} \underbrace{P_{H,t} \cdot n_t}_{E_H} = E_s = \sum_{t=1}^{N_s} P_{s,t} \cdot n_t$$

$$L = \underbrace{\sum_{t=1}^{N_s} C\left(P_{s,t}\right) \cdot n_t}_{cílová\ \ funkce\ F} + \lambda \underbrace{\left(E_s - \sum_{t=1}^{N_s} P_{s,t} \cdot n_t \right)}_{omezovací\ podmínka},$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_{s,t}} = \left(\frac{\partial C\left(P_{s,t}\right)}{\partial P_{s,t}} - \lambda \right) \cdot n_t = 0 \quad \overset{\forall t}{\Rightarrow}$$ konstantní výkon páry po dobu Ts

$$C\left(P_s\right) = a_0 + a_1 P_s + a_2 P_s^2$$



$$F = \sum_{t=1}^{N_s} C\left(P_s^*\right)\cdot n_t = C\left(P_s^*\right)\sum_{t=1}^{N_s} n_t = C\left(P_s^*\right)\cdot T_s$$

$$P_s^* \cdot T_s = E_s \quad \Rightarrow \quad T_s = E_s / P_s^*$$

$$F = C\left(P_s^*\right)\cdot\left(\frac{E_s}{P_s^*}\right) = \frac{E_s a_0}{P_s^*} + E_s a_1 + E_s P_s^* a_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial P_s^*} = -\frac{E_s a_0}{P_s^*} + E_s a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_s^* = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

Numericky:

$$P_L = 90\ MW, T_T = 168h, \rightarrow E_L = 90*168 = 15120\,MWh$$

$$H : q = 300 + 15*P_H,\ 0 \le P_H \le 100\,MW,\ E_H \le 10000\,MWh$$

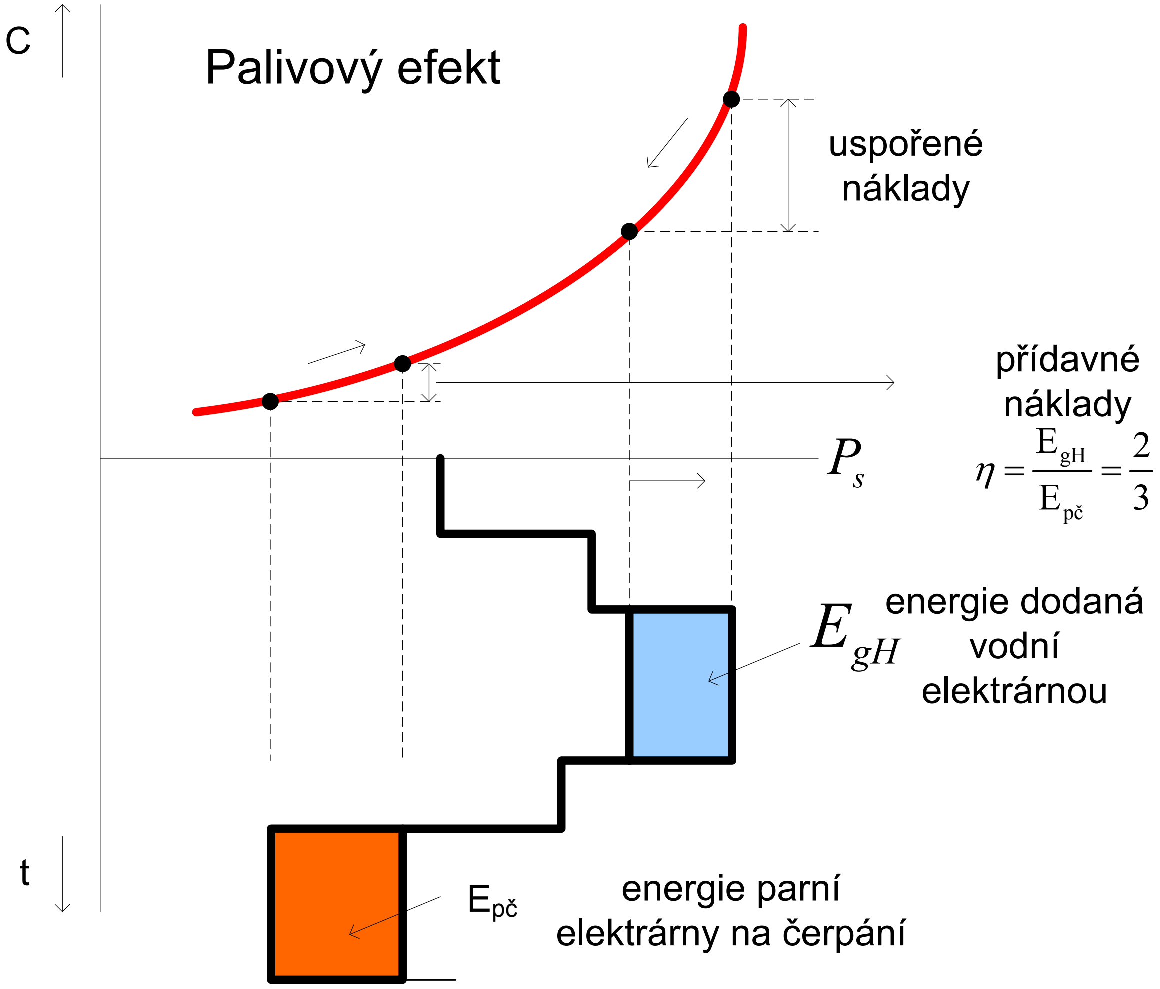
$$S : c = 53.25 + 11.27.P_s + 0.0213P_s^2,\ 12.5 \le P_s \le 50MW$$

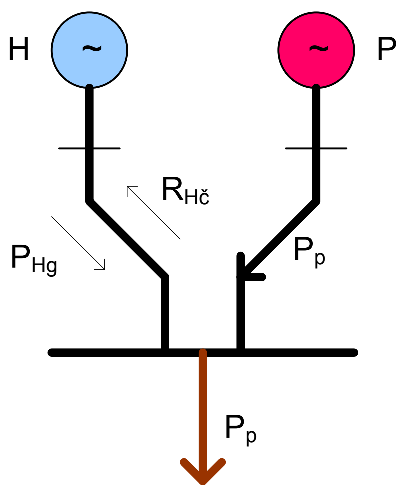
$$E_s = 15120 - 10000 = 5120\,MWh$$

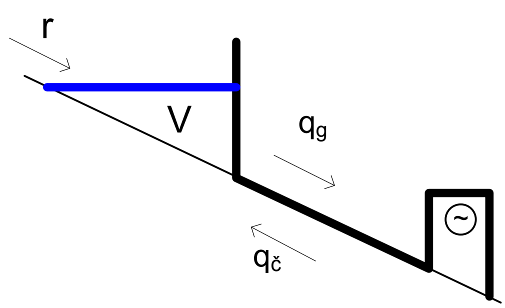
$$P_s^* = \sqrt{\frac{53.25}{0.0213}} = 50\,MW,\ T_s = \frac{5120}{50} = 102.4\,h$$

Přečerpávací elektrárna

t …. index periody





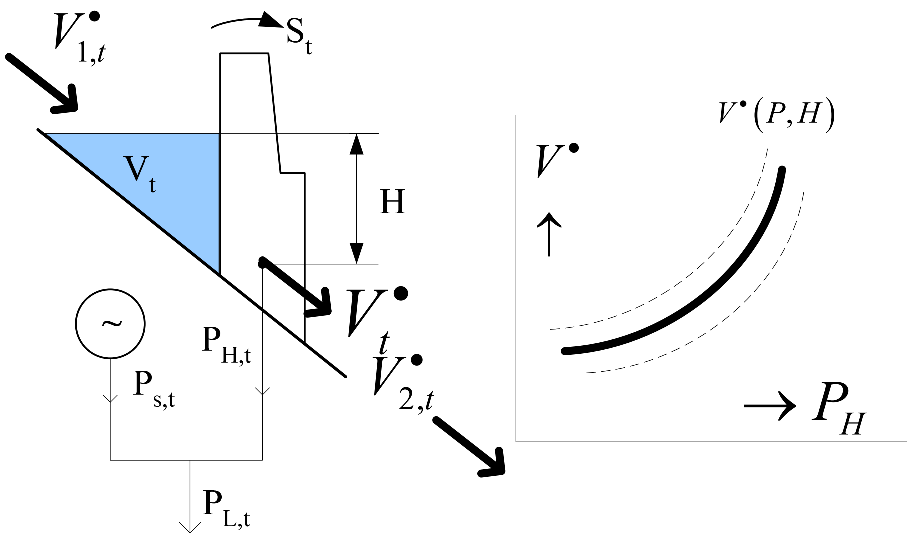


$$V^{\bullet}_{in,t} = p\check{r}\acute{\imath}tok, V^{\bullet}_{ou,t} = odtok, V^{\bullet}_{t} = pr\mathring{u}tok$$

$$V_t = objem\, na\, konci\;\; int.t$$

Hydraulická omezení:

$$V^L \le V_t \le V^U, \quad V = V(H), \quad V^{\bullet} = P_H\left(P_H, H\right),$$



$$L = \sum_{\forall t} \overbrace{\Big\{ \; C(P_{s,t}) \cdot n_t}^{cílová\;\; funkce} + \lambda_{P,t} \cdot \overbrace{\left(P_{L,t} + P_{\Delta,t} - P_{H,t} - P_{s,t} \right)}^{bilanční\;\; rovnice\; výkonů} \Big\} +$$

$$+\lambda_H \cdot \underbrace{\left(\sum_{\forall t} V^{\bullet}\left(P_{H,t}\right) \cdot n_t - \overbrace{V^w_H}^{zadaná\, spotřeba\, vody} \right)}_{bilanční\;\; rovnice\;\; průtoků}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_{H,t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{P,t} \cdot \left(\frac{\partial P_{\Delta,t}}{\partial P_{H,t}} - 1 \right) + \lambda_H \cdot n_t \cdot \frac{\partial V^{\bullet}_t\left(P_{H,t}\right)}{\partial P_{H,t}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_{s,t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C\left(P_{s,t}\right)}{\partial P_{s,t}} \cdot n_t + \lambda_{P,t} \cdot \left(\frac{\partial P_{\Delta t}}{\partial P_{s,t}} - 1 \right)$$

Algoritmus.

1.iniciace $\overline{\lambda}_P, \lambda_H, \overline{P}_s$

2. cyklus pro **t**,

nalézt $\lambda_{P,t}$ aby:

$$0 = \lambda_{P,t} \cdot \left(\frac{\partial P_{\Delta,t}}{\partial P_{H,t}} - 1 \right) + \lambda_H \cdot n_t \cdot \frac{\partial V_t^{\bullet}\left(P_{H,t}\right)}{\partial P_{H,t}}$$

$$0 = \frac{\partial C\left(P_{s,t}\right)}{\partial P_{s,t}} \cdot n_t + \lambda_{P,t} \cdot \left(\frac{\partial P_{\Delta,t}}{\partial P_{s,t}} - 1 \right)$$

$$\left| P_{L,t} + P_{\Delta,t} - P_{H,t} - P_{s,t} \right| \le \varepsilon_P$$

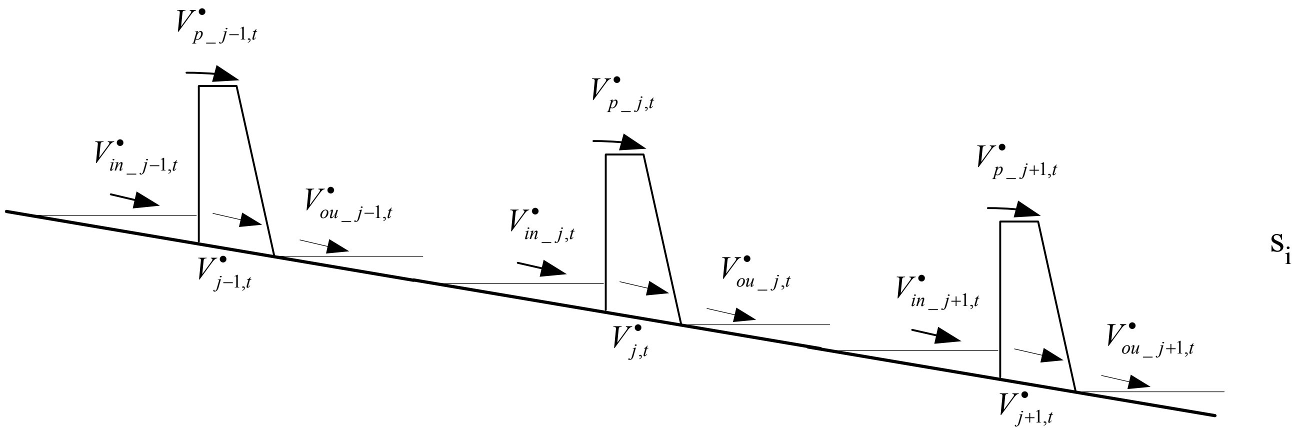
- stanovení $V_t^{\bullet} = V_t^{\bullet}\left(P_{H,t}\right)$,

konec cyklu **t**

3. je-li $\left| \sum_{\forall t} \left\{ n_t \cdot V_t^{\bullet} \right\} - V_H^w \right| < \varepsilon$ pak konec,

jinak nové λ_H návrat do 2.

Kaskáda



Hydraulická kontinuita

$$V_{j,t} = V_{j,t-1} + n_t \cdot \left(V^{\bullet}_{in\_j,t} - V^{\bullet}_{p\_j,t} - V^{\bullet}_{ou\_j,t} \right) \quad \forall i,$$

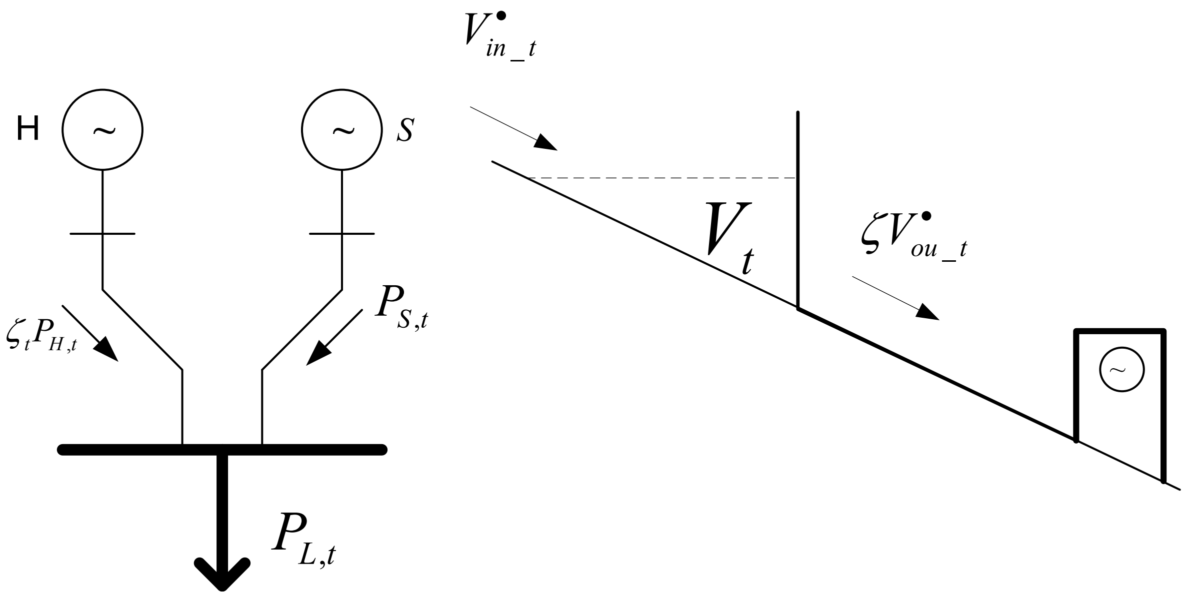
$$\sum_{\forall t} n_t \cdot C_s \left(P_{s,t} \right)$$ **cena páry,**

$$P_{L,t} + P_{\Delta,t} - P_{s,t} - \sum_{\forall j} P_{H,j,t} = 0$$ **bilance výkonů,**

$$L = \sum_{\forall t} \left\{ \begin{array}{l} n_t \cdot C_p \left(P_{s,t} \right) - \lambda_{P,t} \cdot \left(P_{L,t} + P_{\Delta,t} - P_{s,t} - \sum\limits_{\forall j} P_{H,j,t} \right) + \\ + \sum\limits_{j} \lambda_{V,t} \cdot \left(V_{j,t} - V_{j,t-1} - n_t \cdot \left(V^{\bullet}_{in\_j,t} - V^{\bullet}_{p\_j,t} - V^{\bullet}_{ou\_j,t} \right) \right) \end{array} \right\}$$

Metody řešení:

- λ iterace,
- dynamické programování,
- lineární programování
- spádové metody



$$\Phi_{P,t}: \quad P_{L,t} + P_{\Delta,\mathrm{t}} - P_{s,t} - \zeta_t . P_{H,t} = 0, \quad \left(\zeta_t = 1 \ldots g, -1 \ldots \check{c}\right)$$

$$\Phi_{\mathrm{V,t}}: \quad V_t - V_{t-1} - n_t \left(\dot{V}_{in,t} - \zeta_t \dot{V}_{ou,t}\right) = 0$$

$$L_t: \quad C\left(P_{s,t}\right) + \lambda_{P,t} \Phi_{P,t} + \lambda_{V,t} \Phi_{V,t}$$

$$L = \sum_{\forall t} L_t + \varepsilon_s \cdot \left(V_0 - V_s\right) + \varepsilon_e \cdot \left(V_T - V_e\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_{s,t}} = 0 = -\lambda_{P,t} \cdot \left(1 - \frac{\partial P_{\Delta,\mathrm{t}}}{\partial P_{s,t}}\right) + \frac{\partial C\left(P_{s,t}\right)}{\partial P_{s,t}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_{H,t}} = 0 = -\lambda_{P,t} \cdot \left(\zeta_t - \frac{\partial P_{\Delta,\mathrm{t}}}{\partial P_{H,t}}\right) + \zeta_t \lambda_{V,t} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial P_{H,t}}$$