ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta informačních technologií

Číslicové a analogové obvody

doc. Dr. Ing. Jan Kyncl

Dr.-Ing. Martin Novotný

2012

Česká technika — nakladatelství ČVUT, Praha 6, Thákurova 1

.

Obsah

Kapitola 1

Poznámka úvodem

Tento spisek nemá za cíl nahrazovat obvyklé učební texty týkající se teorie a řešení elektrických obvodů, jde spíše o ukázání jedné z cest, jak lze k obvodům přistupovat.

Cílem je dokázat pro korektně zadané schéma napsat program, který vypočte hodnoty hledaných veličin. Omezíme se tedy na analýzu obvodů (zadané schéma, hledáme „co to dělá“, úloha „najdi schéma a hodnoty součástek aby to dělalo co chci“ je podstatně složitější problém a koho to zajímá, může si zapsat příslušnou látku u odborníků například z FEL).

Veškeré výpočty, které můžeme svěřit strojům, strojům svěříme. Půjde zejména o řešení rovnic různých typů, derivování, integrování a grafické znázornění výsledků. Cílem je získat elementární představu o fungování některých obvyklých zapojení, nikoli vychovat odborníky na elektrické obvody.

1.1 Co nás zajímá, je elektrický proud a elektrické napětí

Jelikož omyl není možný, v dalším textu budeme slovo „elektrický“ často vynechávat, tedy dále jen proud a napětí.

S proudem a napětím se v běžném životě setkáváme: „Pozor, vysoké napětí!“ Nebezpečné ovšem není napětí, ale proud, který námi teče… ale aby tekl, potřebuje napětí. Napětí přivádíme do reproduktoru, aby proud tekoucí cívkou vyvolal sílu, která pohne membránou a my můžeme poslouchat hudbu. Napětí a proudy budou vstupy i výstupy našich úloh: budeme vědět, že někde nějaké napětí *je*, nebo někde nějaký proud *teče* a bude nás zajímat, jaké *je* napětí jinde a jaký proud *teče* tam a tam.

Napětí v naší nejbližší zásuvce závisí na mnoha faktorech (jestli je na ní něco připojeno, ostatně obecně na všem, co je připojeno v celé soustavě UCPTE, na tom, jak dobře hoří uhlí v Elektrárně Poříčí, na tření v ložiscích turbín, …), na některých ovšem více a na některých méně (poblíž sepne elektrokotel, v Portugalsku si dá ředitel železnic nabíjet mobil).

Někde ovšem řešení problému musí začít a to, kde začneme, záleží na požadované přesnosti: pečeme-li kuře, doba, za kterou se upeče hodně závisí na nastavené teplotě trouby a málo na teplotě v kuchyni, pro účely pečení kuřete obvykle nastavení teploty trouby v závislosti na teplotě v kuchyni nekorigujeme. „Pečeme“-li ovšem například křemíkové destičky a máme pro správný průběh rozličných difuzí udržovat teplotu s přesností $\frac{1}{20}$°C, už nastavení teploty pece na teplotě okolí záležet bude, okolní teplota by nám mohla proces pokazit.

Jelikož našimi *vstupy* budou proudy a napětí, omezíme naše úlohy zavedením zdrojů proudu a napětí; do těchto zdrojů schováme velmi široký zajímavý svět, napětí a proudy mohou být vyvolány elektrochemicky, přeměnou mechanické energie rotačního pohybu, „šoustáním ebonitové tyče liščím ohonem“ (jak se psalo před dvěma sty lety); nebo jsou napětí a proudy výsledkem činnosti nějakého obvodu, jehož činnost neřešíme – například výstup zvukové karty počítače, kde je opravdu mnoho analogově realizovaných číslicových obvodů. Celou problematiku elektroenergetiky rovněž schováme do zavedení zdrojů proudů a napětí. Pro proudy bude platit totéž, co pro ideální zdroje proudů a pro napětí totéž, co pro ideální zdroje napětí: je-li někde napětí, v naší teorii vždy existuje někdo, či něco, co dotyčné napětí může zajistit a s proudy je to zcela stejné. Ideální zdroje ovšem existují jen v naší teorii, neideální ovšem do teorie začleňujeme jako ideální obklopené větším či menším počtem rezistorů, kondenzátorů, cívek a dalších obvodových prvků: modely reálných (pochopitelně je lepší říci „reálnějších“, „reálnost zdroje“ záleží na zvolené přesnosti rozlišování, co ještě je a co není ideální) zdrojů vždy obsahují ideální zdroje.

Kapitola 2

Proud a napětí

Obě tyto veličiny jsou abstrakce, zájemcům o větší porozumění těmto veličinám doporučujeme například skvělé Feynmanovy přednášky z fyziky.

Proud budeme značit i, I, $i(t)$, $\hat{I}$, tedy budeme pro něj mít vyhrazeno písmeno i s tím, že připsáním argumentu t budeme například upozorňovat, že jde o časově proměnnou veličinu a podobně.

Jednotkou proudu je ampér, označovaný velkým A, jednotky veličin budeme také někdy psát do kulatých závorek, tedy (A). Tato jednotka je základní a z ostatních základních jednotek ji nevytvoříte.

Proud měříme ampérmetry rozličných konstrukcí.

Napětí budeme značit u, U, $u(t)$, $\hat{U}$, tedy budeme pro něj mít vyhrazeno písmeno u s tím, že připsáním argumentu t budeme například upozorňovat, že jde o časově proměnnou veličinu a podobně.

Jednotkou napětí je volt, značkou V. Volt není základní jednotkou systému SI a je jej možno vyjádřit pomocí ampéru a ostatních základních jednotek.

Napětí měříme voltmetry rozličných konstrukcí.

Obvyklé definice proudu se odkazují na veličinu elektrický náboj (např. česká Wikipedie uvádí: „**Elektrický proud** je uspořádaný pohyb nositelů elektrického náboje. Stejnojmenná fyzikální veličina, obvykle značená I, vyjadřuje množství náboje prošlého za jednotku času.“) a v některých speciálních případech si můžeme představit mechanickou analogii: Teče-li nestlačitelná tekutina potrubím, odpovídá to stejnosměrnému proudu.

Mají-li ovšem podobné definice mít univerzální platnost, budeme pro proudy tekoucí vakuem potřebovat virtuální částice, kontinuální teorii a také by bylo slušné říci, co je to ten elektrický náboj o kterém na Wikipedii zjistíme „Základní elektrickou vlastností těles je elektrický náboj. Těleso s elektrickým nábojem se nazývá *elektricky nabité* a je schopno působit elektrickou silou na jiné elektricky nabité těleso.“, že je vázán na pojem tělesa a síly... ale v kvantové mechanice sílu smysluplně definovat nelze atd. atd.

Zájemcům doporučujeme navštěvovat přednášky prof. Petra Kulhánka a číst knihy Terry Pratchetta.

Co je elektrické napětí? Definice se odkazují buď na práci, nebo na potenciál, což kdybychom chtěli podrobněji zkoumat, potřebovali bychom rozsáhlý matematický aparát a nakonec bychom došli k tomu, že napětí někdy ani smysluplně a jednoznačně zavést nelze.

Podobně ovšem máme docela dobrou představu, co znamená, že je venku teplota vzduchu 27°C, ačkoliv je definice teploty svou značnou abstrakcí nepřístupná většině lidí; bez přesné definice proudu (a jak uvidíme dále, s napětím to bude stejné) se dobře obejdeme. V našich řečových hrách se naučíme, jak při použití slova „proud“ v našem úzce vymezeném kontextu teorie obvodů nechybovat a k tomu definici nepotřebujeme.

Podstatné je, že proud TEČE. Pokud říkáme, že proud neteče, myslíme tím, že teče proud velikosti nula ampér.

U proudů vždy budeme volit jejich orientaci a budeme ji označovat šipkou; abychom co nejlépe odlišili šipku označující zvolenou orientaci proudu od zvolených orientací napětí, budeme používat „proudovou šipku“ a „napěťovou šipku“.

Obdobně jako v případě proudu a teploty, ani v případě napětí nám absence pochopitelné a jednoznačné definice nebude činit žádné obtíže; v úzce vymezené oblasti našeho zájmu k nejednoznačnostem nedojde.

Podobně jako v případě proudů, budeme zvolené orientace, tedy kladné smysly napětí, značit šipkami a budeme pro lepší rozlišení používat „napěťové šipky“.

Pro proudy a napětí platí určitá pravidla; shrneme je formou vět a rovnic.

Věta 0. *Proud v obvodech nevzniká ani nezaniká, ve výsledku vždy „teče dokola“.*

Věta 1. *Platí, že pokud* teče *z bodu A do bodu B proud I_{AB}, je to to samé, jako když* teče *z bodu B do bodu A proud $-I_{AB}$.*

Odtud i názvy odkazující k této skutečnosti „obvody“ „circuits“ , kde v anglickém „circ“ máme odkaz na kruhové arény starých Římanů a kruhové půdorysy cirkusových stanů.

Možná více než polovina zákonů a pravidel, které budeme při řešení obvodů používat, je přesnější formulací faktu, že „proud je něco, co nevzniká a nezaniká a tudíž to teče dokola“.

Věta 2. Je-*li mezi bodem A a bodem B napětí U_{AB},* je *mezi bodem B a bodem A napětí $-U_{AB}$.*

Zvykněme si na vyjádření odlišující napětí a proud: proud ***teče***, napětí ***je***.

Kapitola 3

Vodiče, svorky, zdroje proudu a zdroje napětí, společný vodič

Zdroji proudu a napětí budeme v dalším textu rozumět tzv. *ideální* zdroje proudu a napětí a vodiči budeme rozumět *ideální* vodiče. Slovo *ideální* budeme v dalším textu někdy vynechávat, zdroji a vodiči budeme vždy rozumět *ideální* zdroje a vodiče, budeme-li naopak hovořit o reálných zdrojích a vodičích, explicitae to uvedeme.

3.1 Ideální vodiče a svorky, společný vodič

Vodič („ideální“ budeme vynechávat) je takovým prvkem obvodu, který „nic nemění“. Mezi začátkem vodiče a nějakým jakýmkoli jiným bodem je stejné napětí, jako mezi koncem vodiče a oním bodem. Vstupuje-li do vodiče proud, vystupuje z něj stejný (samozřejmě se může větvit do více vodičů, uvidíme, že pak se zachovává součet proudů). Pro dva vodiče to ukazuje Obr. 3.1, spolu s pravidlem, že mezi začátkem a koncem vodiče je napětí nulové.

Na Obr. 3.1 vidíme dva vodiče se *svorkami* A, B a C, D. Mezi *svorkami* A a C je napětí stejné, jako mezi *svorkami* B a D a jako mezi kterýmkoli bodem horního vodiče a kterýmkoli bodem spodního vodiče. Napětí mezi svorkami A a B je nulové nezávisle na tom, jaká je velikost proudu I_1 a napětí mezi svorkami C a D je nulové nezávisle na velikosti proudu I_2. Proudy se zachovávají, do svorky A vtéká proud stejné velikosti, jako vytéká ze svorky B a zcela shodně je tomu se svorkami C a D.

Svorkami nerozumíme skutečné svorky, ale místa, kde „je nebo může být něco připojeno“.

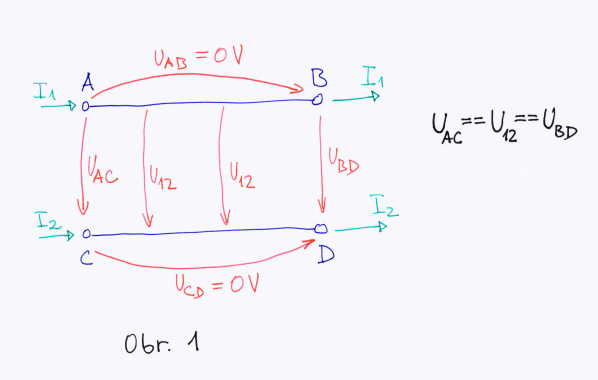
Je-li $I_1 \neq 0A$, tak na svorky A a B „něco“ být připojeno musí, proud nemůže vznikat ani zanikat.

Pokud je více svorek spojeno vodiči, můžeme ve schématu s výhodou použít symbol $\perp$, kterému se také říká „zem“. „Zem“ označuje referenční, vztažný, společný uzel.

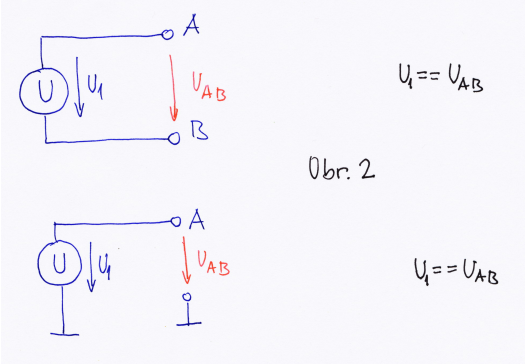
Napětí každé svorky je stejné vůči kterémukoli symbolu $\perp$.

3.2 Zdroje proudu a napětí

Jak jsme uvedli výše, příčiny proudů a napětí „schováme“ do ideálních zdrojů proudu a napětí.



Obrázek 3.1:



Obrázek 3.2:

3.2.1 Zdroj napětí

Zdroje napětí budeme značit podle Obr. 3.2, kde nahoře je zdroj napětí U_1 zapojen mezi svorky A a B a ve spodní části je zdroj napětí U_1 zapojen mezi společný vodič a svorku A a svorka B je spojena se společným vodičem.

V matematickém popisu odpovídá těmto schématkům rovnice

$$U_{AB} == U_1 \tag{3.1}$$

Proud tekoucí zdrojem napětí se v rovnici 3.1 nevyskytuje, napětí ideálního zdroje napětí na protékaném proudu nezávisí.

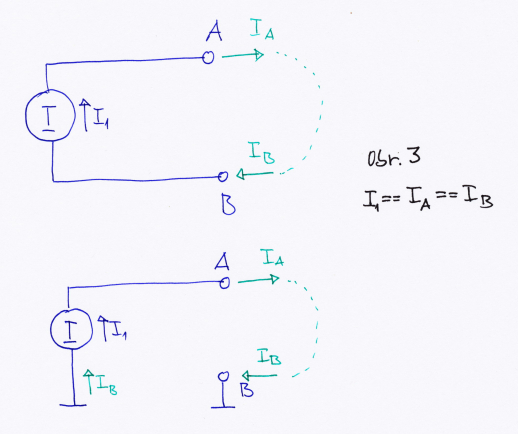
Ideální zdroj napětí $0V$ má rovnici stejnou, jako ideální vodič mezi dvěma svorkami, jsou tedy z hlediska řešení obvodů ekvivalentní.

Podobně jako v SW Mathematica budeme pro zvýraznění, že jde o rovnici, používat zdvojených znaků rovnosti.

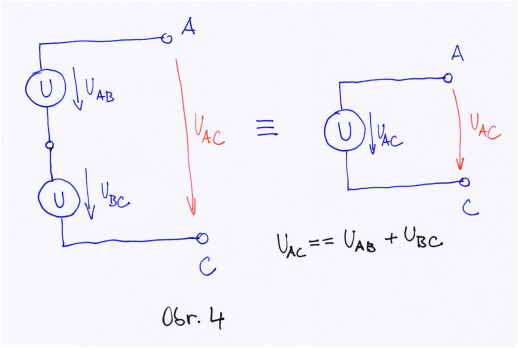
3.2.2 Zdroj proudu

Zdroje proudu budeme ve schématech značit podle Obr. 3.3. Vyjádření rovnicemi situace v horní části obrázku je

$$I_A == I_1, \qquad I_B == I_1 \tag{3.2}$$



Obrázek 3.3:



Obrázek 3.4:

Napětí na svorkách zdroje proudu se v rovnici 3.2 nevyskytuje, proud protékaný ideálním zdrojem proudu nezávisí na napětí na jeho svorkách.

V dolní části Obr. 3.3 je naznačena situace se společným vodičem, rovnice jsou shodné, čárkovaná čára naznačuje, že se proud vytékající ze svorky A musí „nějakým způsobem“ uzavřít do svorky B, tedy do společného vodiče.

3.3 Pravidla řazení zdrojů napětí

3.3.1 Sériové řazení dvou zdrojů napětí

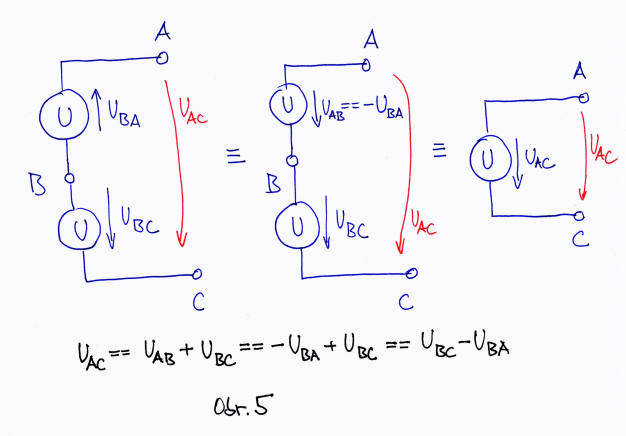
Obr. 3.4 ukazuje tzv. *sériové* řazení dvou zdrojů napětí, někdy také nazývané řazení *za sebou*.

Pro napětí mezi svorkami A a C platí rovnice

$$U_{AC} == U_{AB} + U_{BC} \tag{3.3}$$

Sériová kombinace zdrojů napětí může být nahrazena jedním zdrojem napětí, jehož napětí je rovno součtu napětí obou zdrojů.

Součet podle rovnice 3.3 platí pro orientaci šipek podle Obr. 3.4. V případě, že šipky označující orientace napětí nesměřují stejným směrem, jak ukazuje Obr. 3.5, použijeme větu 2 a nahradíme (ekvivalentně) zdroj napětí U_{BA} zdrojem $U_{AB} = -U_{BA}$ s opačnou orientací a použijeme pravidlo podle rovnice 3.3:



Obrázek 3.5:

$$U_{AC} == U_{AB} + U_{BC} == -U_{BA} + U_{BC} \tag{3.4}$$

Sériové spojení dvou zdrojů napětí s libovolnými orientacemi napětí zdrojů a napětí výsledného můžeme vždy pomocí věty 2 (tedy $U_{XY} = -U_{YX}$, tedy přehozením orientace zdroje a změnou znaménka jeho napětí) převést na situaci podle Obr. 3.4 a nahradit toto spojení jedním zdrojem napětí výsledné velikosti.

Poznamenejme, že v našem nástinu teorie elektrických obvodů je toto pravidlo řazení zdrojů postulované a nelze jej z jiné části teorie odvodit. Ty, kteří jsou již s teorií obvodů obeznámeni, si možná všimnou, že zde postulujeme pravidla řazení zdrojů a z nich později obdržíme Kirchhoffovy zákony, přičemž se jinde volí i postup opačný: postulují se Kirchhoffovy zákony (nebo vyvodí z teorie elektromagnetického pole) a pravidla řazení zdrojů jsou pak jejich důsledkem. Případně je pravidlo o řazení zdrojů napětí spolu s větou 2 speciálním případem pravidla platícího pro veličinu napětí obecně. Rozdíly těchto přístupů se při konkrétním vyšetřování chování obvodů podle zadaného schématu neprojeví.

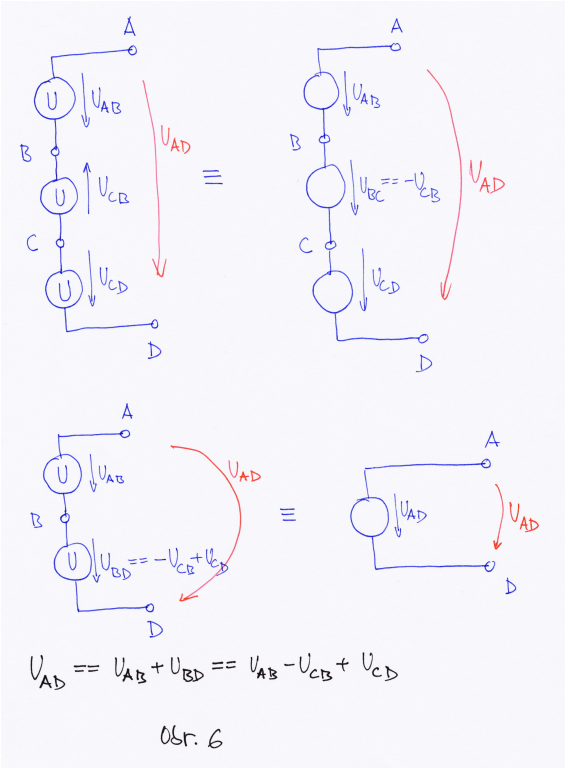
3.3.2 Sériové řazení více zdrojů napětí

Řešení sériového řazení více zdrojů napětí je jednoduché: např. v případě tří zdrojů napětí nejprve nahradíme dva z nich, které mají společnou svorku, jedním zdroje výsledného napětí, obdržíme schéma se dvěma zdroji sériově řazenými a ty opět nahradíme zdrojem jedním, např. podle Obr. 3.6, případ 4 zdrojů lze převést náhradou dvou zdrojů zdrojem jedním na případ tří zdrojů atd.

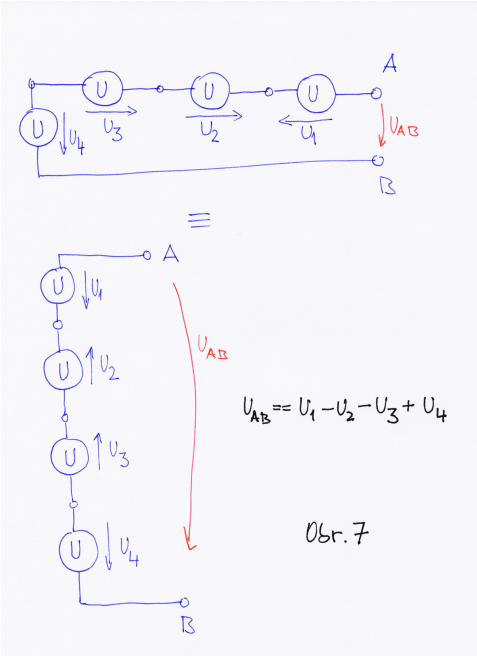
Při praktickém řešení úloh ovšem takto krkolomně nepostupujeme, uvedený postup je jen důkazem, že pravidlo o sériovém řazení zdrojů napětí pro dva zdroje stačí k vyřešení sériového řazení libovolného počtu zdrojů a nějaké další pravidla nepotřebujeme. Při rutinním řešení postupujeme tak, že napětí, jejichž šipky mají při rozkreslení obvodu podle Obr.6 shodný směr se šipkou označující napětí výsledné bereme kladně a napětí s šipkou opačnou záporně.

Pro čtyři zdroje je způsob ukázán na Obr. 3.7.

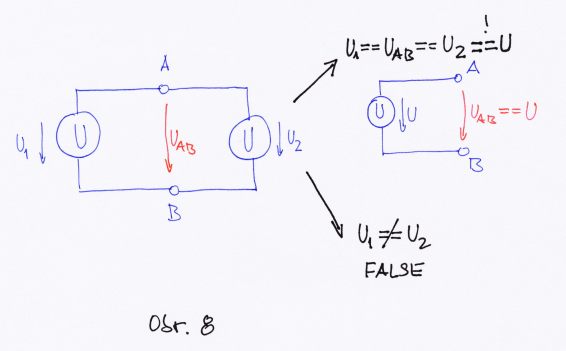
Poznamenejme, že pravidlo o sériovém řazení zdrojů napětí je ekvivalentním Kirchhoffovu zákonu, který říká, že součet všech napětí v uzavřené smyčce je nulový.



Obrázek 3.6:



Obrázek 3.7:



Obrázek 3.8:

3.3.3 Paralelní řazení dvou zdrojů napětí

Uvažme situaci podle Obr. 3.8, kde je zakresleno tzv. *paralelní řazení* zdrojů napětí, také zvané *řazení vedle sebe*. Je-li zdroj napětí U_1 připojen mezi svorky A a B, odpovídá to rovnici

$$U_{AB} == U_1 \tag{3.5}$$

Je-li zdroj napětí U_2 připojen mezi svorky A a B, odpovídá to rovnici

$$U_{AB} == U_2 \tag{3.6}$$

Platí-li $U_1 = U_2 = U$, obdržíme dvě identické rovnice, z nichž je zřejmě jedna zbytečná; dva zdroje stejného napětí (pochopitelně s uvážením orientace, zde podle Obr. 3.8) můžeme nahradit jedním zdrojem napětí.

Platí-li $U_1 \neq U_2$, soustava rovnic 3.5 a 3.6 nemá řešení, rovnice jsou kontradiktorické. Přidáním dvou kontradiktorických rovnic k jakémukoli systému rovnic ovšem způsobí, že celý systém nemá řešení.

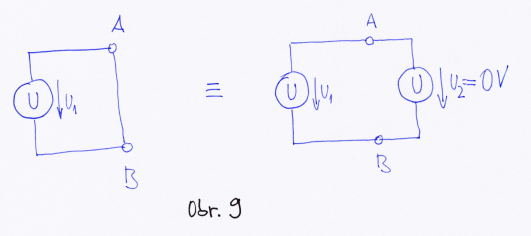
Paralelní řazení ideálních zdrojů napětí je tedy ryze neužitečné: v případě stejných napětí je zbytečné a v případě nestejných napětí jakýkoli obvod, který takové zapojení zdrojů napětí obsahuje, nemá řešení, nelze matematicky určit hodnoty hledaných veličin a kdybychom se jej pokusili realizovat, „nefungovalo by to“, v lepším případě by zafungoval nějaký ochranný prvek (třeba pojistka), v horším případě by například shořela nějaká součástka případně objekt.

Poznámka:
Proti paralelnímu řazení reálných zdrojů nemáme námitky. Modely neideálních zdrojů napětí obsahují další prvky tak, že nikdy nemůže dojít k paralelnímu spojení ideálních zdrojů přímo.

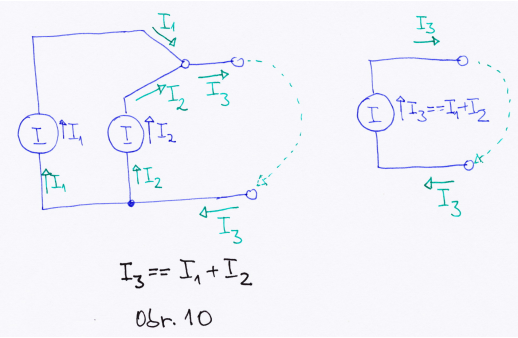
3.3.4 Zkrat na zdroji napětí

Uvažme situaci podle Obr. 3.9, kde je zakreslen tzv. zkrat či tzv. krátké spojení na zdroji napětí.

Podle výše uvedeného je ovšem rovnice popisující úsek vodiče mezi svorkami A a B shodná s rovnicí ideálního zdroje napětí o velikosti $0V$. Platí tedy o tomto spojení vše, co o paralelním spojování dvou



Obrázek 3.9:



Obrázek 3.10:

zdrojů napětí: je-li $U_1 = 0V$, je toto spojení zbytečné a postačí svorky propojit buď jen vodičem, nebo jen zdrojem napětí $U_1 = 0V$, platí-li $U_1 \neq 0V$, obvod nemá řešení, zadání je nesmyslné.

Poznámka:
Zkraty na reálných zdrojích napětí se někdy dějí a v případě reálných zdrojů, které nejsou proti nim chráněny svojí konstrukcí nebo nějakým dalším chránícím prvkem, mohou způsobit značné škody („kdo si tam místo nich (pojistek) nastrká hřebíky, vyhoří a začne od píky“).

3.4 Pravidla řazení zdrojů proudu

3.4.1 Pravidla řazení dvou zdrojů proudu

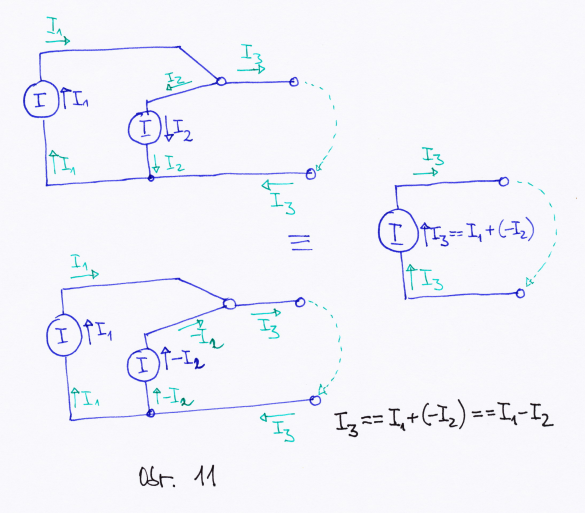
Uvažme situaci podle Obr. 3.10, pak platí

$$I_1 + I_2 == I_3 \tag{3.7}$$

Je tedy možno nahradit takovouto paralelní kombinaci (někde se tomu říká paralelní řazení, nebo řazení vedle sebe) jedním zdrojem proudu I_3 v orientaci podle Obr. 3.10.

Pro jiné orientace proudů použijeme větu 1, například podle Obr. 3.11, kde zřejmě $I_1 + (-I_2) == I_3$, čili $I_1 - I_2 == I_3$.

Obdobným způsobem zcela analogicky jako v případě zdrojů napětí převedeme schéma s libovolnými orientacemi proudů pomocí věty 1 na případ podle Obr. 3.10.



Obrázek 3.11:

3.4.2 Pravidla řazení více zdrojů proudu

Bylo by podceňováním inteligence čtenáře, kdybychom podrobně popisovali postup důkazu řešitelnosti úlohy, který je zcela analogický a praktický způsob rovněž.

Pravidlo řazení více zdrojů proudu je ekvivalentní větě 1 a tudíž lze formulovat jako Kirchhoffův zákon:

Věta 3. *Celkový proud I_Σ vtékající do uzlu je nulový; celkovým proudem rozumíme $I_\Sigma = \sum I_{vtékající} - \sum I_{vytékající}$, tedy*

$$I_\Sigma = \sum I_{vtékající} - \sum I_{vytékající} == 0 \tag{3.8}$$

nebo také

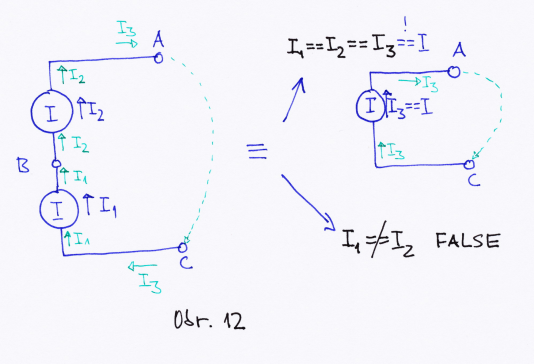
$$\sum I_{vtékající} = \sum I_{vytékající}$$

Věta 3 je tak důležitá, že jsme si ji označili zároveň jako rovnici 3.8. Jde ovšem jen o jinou formulaci věty 0.

3.4.3 Sériové řazení zdrojů proudu

Čtenáři je již jasné, že má-li být příběh o řešení elektrických obvodů správným příběhem, bude se na tomto místě skrývat opět nějaký čert.

Obr. 3.12 ukazuje situaci analogickou k Obr. 3.8: Pokud jsou proudy I_1 a I_2 stejné a tedy můžeme psát $I_1 == I_2 == I_3$, je použití dvou zdrojů zbytečné, dostáváme dvě shodné rovnice; pokud jsou proudy I_1 a I_2 různé, dostaneme dvě kontradiktorické rovnice a tudíž obvod obsahující takové zdroje nemá řešení. Každopádně je sériové řazení zdrojů proudu neužitečné.



Obrázek 3.12:

Poznámka:
Proti sériovému řazení reálných zdrojů proudu nemáme námitky; modely neideálních zdrojů proudu obsahují další prvky tak, že nikdy nemůže dojít k bezprostřednímu sériovému spojení jen ideálních zdrojů proudu.

3.4.4 Rozpojený zdroj proudu

Odporuje větě 0, pokud nejde o zdroj proudu $0A$. Zdroj proudu $0A$ je ovšem veskrze neužitečné zavádět: mimo vodiče v našich schématech proud neteče a nemá žádný dobrý smysl na ta místa přikreslovat zdroje nulového proudu.

Při rozpojování neideálních zdrojů proudu hoří oblouky a velikosti napětí stoupají na nebezpečné hodnoty. Ve schématu se rozpojený zdroj proudu vyskytovat nesmí, reálné zdroje proudu raději rozpojujeme po souhlasu cvičícího.

Kapitola 4

Základní prvky elektrických obvodů

V elektrických obvodech se vyskytují zejména tři základní prvky:

- **Rezistor**, jehož vlastností je *elektrický odpor*,
- **Cívka** (někdy nazývaná *induktor*, postaru *samoindukce*, také *indukční cívka*), jejíž vlastností je *indukčnost* a
- **Kondenzátor**, jehož vlastností je *elektrická kapacita*.

V běžném elektrotechnickém žargonu se často zaměňuje pojem rezistor (součástka) a jeho vlastnost (elektrický odpor) a zákazník u pultu požaduje po prodavačce odpory, nikoli rezistory. Pokud víme, co máme na mysli, není třeba si s přesným vyjadřováním dělat velké starosti.

Jelikož v rámci předmětu ČAO nehrozí omyl, budeme v dalším slovo „elektrický“ vynechávat, možnost záměny např. s hydraulickým odporem a tepelnou kapacitou nehrozí.

Rezistory budeme značit písmenem velké R s indexem rozlišujícím je navzájem, kondenzátory písmenem velké C s indexy a cívky velkým L opět s indexy, pokud jich v jednom schématu bude více. Hodnoty odporu, indukčnosti a kapacity odpovídajících obvodových prvků budeme značit shodně s těmito prvky.

Obr. 4.1 ukazuje schématické značky prvků a rovnice popisující prvky pro zvolené orientace proudů a napětí.

Pro označení veličin a orientací napětí a proudů podle Obr. 4.1 (povšimněme se, že proudová a napěťová šipka mají stejný směr!) platí rovnice, které je pro úspěšné absolvování ČAO dobré si pamatovat:

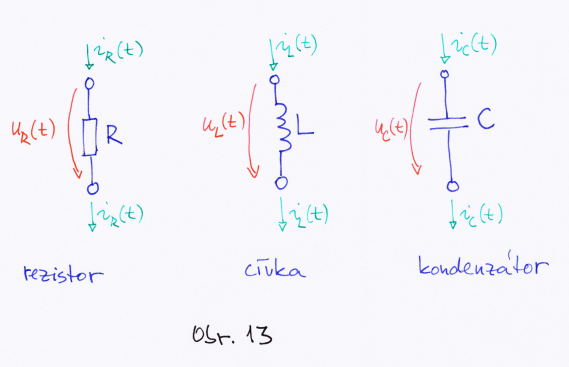
4.1 Rezistor

$$u_R(t) == R \cdot i_R(t) \tag{4.1}$$

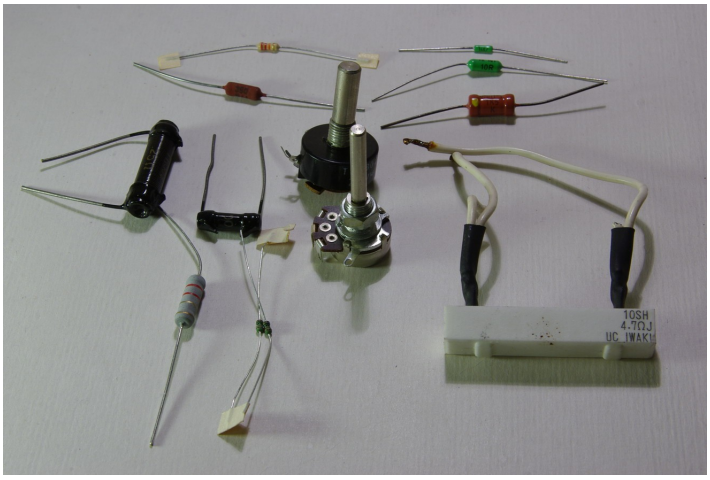
Rovnice 4.1 vyjadřuje dobře známý Ohmův zákon, vyjadřuje, že napětí na rezistoru je (v každém okamžiku) přímo úměrné protékajícímu proudu a konstanta úměrnosti je elektrický odpor rezistoru R.

Označíme-li jednotku odporu (R), musí platit

$$V = (R) \cdot A \implies (R) = \frac{V}{A} = \Omega.$$



Obrázek 4.1:



Obrázek 4.2:

Jednotkou odporu je ohm, značený velkým řeckým písmenem omega.

Ukázky fyzického provedení rezistoru (angl. resistor) a potenciometru jsou na Obr. 4.2.

4.2 Cívka

$$u_L(t) == L \cdot i'_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.2}$$

Rovnice 4.2 vyjadřuje, že napětí na cívce je v každém okamžiku přímo úměrné derivaci cívkou protékajícího proudu podle času a konstantou úměrnosti je indukčnost cívky L.

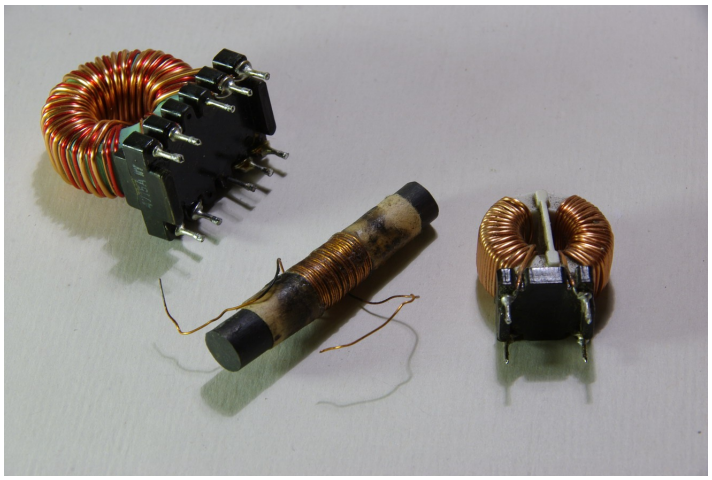
Připomeňme si definici derivace:

$$i'_L(t) = \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{i_L(t + \Delta t) - i_L(t)}{\Delta t} \tag{4.3}$$

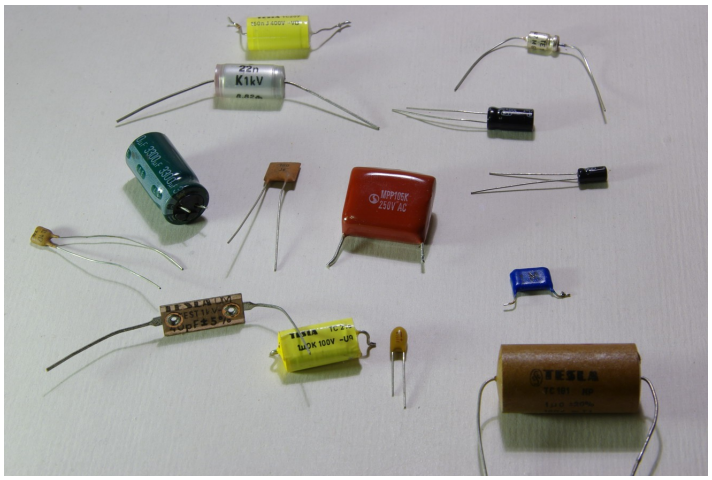
V čitateli je rozdíl dvou proudů, tedy veličina s jednotkou ampér, ve jmenovateli je délka časového intervalu, tedy veličina s jednotkou sekunda; že jde o veličiny malé nemůže změnit fakt, že jednotkou derivace proudu podle času je $\frac{A}{s} = A \cdot s^{-1}$.

Označme jednotku indukčnosti (L), pak musí platit

$$V = (L) \cdot A \cdot s^{-1} \implies (L) = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega \cdot s = H.$$



Obrázek 4.3:



Obrázek 4.4:

Jednotkou indukčnosti je henry a značíme ji velkým H.

Na Obr. 4.3 je cívka (angl. inductor) a dva transformátorky.

4.3 Kondenzátor

$$i_C(t) == C \cdot u'_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.4}$$

Analogicky předchozímu, označíme-li jednotku kapacity (C), platí:

$$A = (C) \cdot V \cdot s^{-1} \implies (C) = \frac{A \cdot s}{V} = s \cdot \Omega^{-1} = F.$$

Jednotkou kapacity je farad, značený velkým F.

Na Obr. 4.4 je ukázka několika typů kondenzátorů (angl. capacitor).

Poznámka:
Hodnoty kapacit, indukčností a odporů mohou být velice různé, s výhodou používáme obvyklé předpony kilo, mili, mega, piko, mikro a podobně. Znalost vyjádření pomocí v technice obvyklých předpon piko až giga v předmětu ČAO předpokládáme.

4.4 Časová konstanta

Povšimněme si, že veličinu s rozměrem sekunda můžeme vytvořit jednoduše třemi způsoby. Rozměr sekunda mají zřejmě výrazy

$$R \cdot C,$$
$$\frac{L}{R},$$
$$\sqrt{L \cdot C}.$$

Tyto výrazy skutečně budou rozhodovat o časových konstantách a frekvencích v elektrických obvodech: o věcech času mohou v konečném důsledku rozhodovat jen veličiny rozměru času.

Kapitola 5

Příklady jednoduchých obvodů

5.1 Kondenzátor nabíjený přes rezistor—RC článek

Ukažme si, že to, co už víme (z teorie obvodů, matematiku teď s důvěrou svěříme strojům), stačí k vyřešení jednoduchého obvodu. Uvažme obvod podle Obr. 5.1:

Napišme rovnice, které platí pro rezistor a kondenzátor:

$$\begin{aligned} u_R(t) &== R \cdot i_R(t), \\ i_C(t) &== C \cdot u'_C(t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dále použijeme fakt, že co platí pro napětí, platí i pro (ideální) zdroje napětí a uvažme prostřední schémátko na Obr. 5.1.

Zřejmě, pokud nemá být řešení „False“, musí platit rovnice odpovídající tomu, jak jsou rezistor, zdroj napětí a kondenzátor zapojeny:

$$u(t) == u_R(t) + u_C(t) \tag{5.2}$$

Co platí pro proudy, platí ovšem i pro zdroje proudů, uvažme dolní schémátko na Obr. 5.1.

Aby řešení nebylo „False“, musí platit:

$$i(t) == i_R(t) == i_C(t) \tag{5.3}$$

Obdržíme dosazením z 5.1 do 5.2 a 5.3

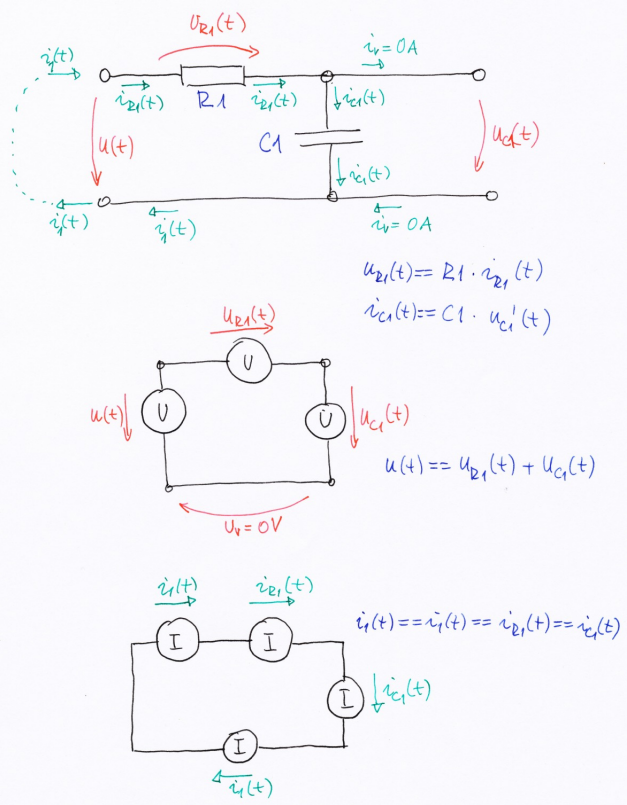
$$u(t) == u_C(t) + R \cdot C \cdot u'_C(t) \tag{5.4}$$

Získali jsme tzv. diferenciální rovnici pro napětí $u_C(t)$, které je zároveň rovno výstupnímu napětí.

Rovnice 5.4 určuje časový vývoj napětí $u_C(t)$ v závislosti na vstupu $u(t)$ a pro dané spojení na hodnotě součinu $R \cdot C$.

Mimochodem, je zajímavé, že jde o hodnotu součinu $R \cdot C$, nikoli o obě hodnoty, R a C; $1\mu F$ a 1000Ω dá, co se týče $u_C(t)$, stejný výsledek jako $10\mu F$ a 100Ω, proudy ovšem budou jiné. Součin $R \cdot C$ značíme někdy τ (tau) a $\tau = R \cdot C$ říkáme časová konstanta obvodu (vizte sekci 4.4).

Jak tuto rovnici řešit? Na to je ještě brzy, musíme si nejprve uvědomit, co ještě musíme znát pro nalezení konkrétního řešení rovnice 5.4.



Obrázek 5.1:

Představme si představitelnější časový vývoj: jaká bude teplota piva za deset minut záleží nejen na tom, jak na něj působí okolí (je v lednici a chladí se, stojí na stole a teplá), ale také na tom, jakou má teplotu teď.

Napětí v čase t na kondenzátoru tedy také záleží na tom, jaké je napětí na kondenzátoru teď.

Pokud:

- známe hodnotu napětí na kondenzátoru v čase t_0, tedy $u_C(t = t_0) == u_{C0}$, kde u_{C0} je známá hodnota a
- je–li známa rovnice 5.4 – tedy známe-li hodnotu $\tau = R \cdot C$ a
- známe, jak na obvod působí okolí, tedy známe-li časový průběh $u(t)$,

potom můžeme rovnici vyřešit.

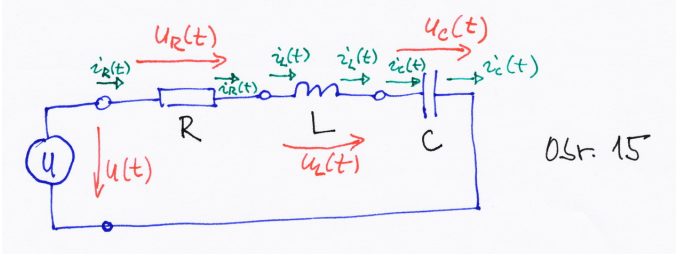
Řešitelný je tedy systém

$$\begin{aligned} u(t) &== u_C(t) + R \cdot C \cdot u'_C(t), \\ u_C(t = t_0) &== u_{C0}, \end{aligned}$$

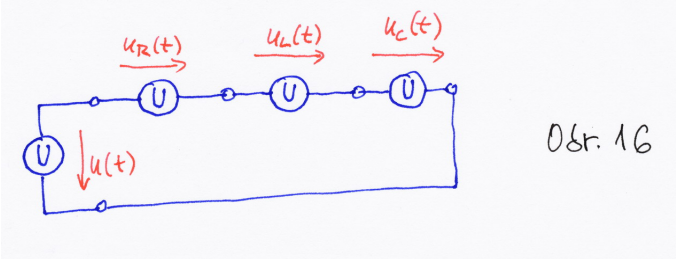
kde rovnici obsahující derivaci říkáme *diferenciální rovnice* s neznámou funkcí $u_C(t)$ a rovnici obsahující zadání hodnoty neznámé funkce $u_C(t)$ v nějaké konkrétní hodnotě parametru říkáme *počáteční podmínka*.

Počáteční podmínka nám „ořezává“ naše řešení v čase, pochopitelně napětí $u_C(t = t_0) == u_{C0}$ je opět výsledkem nějakého chování či řešení obvodu, ale my musíme někde začít. Takový reset je vlastně nastavení počátečních podmínek, vstup „reálného světa“ do našich systémů.

Ukázka řešení je v notebooku `CAOpr2RCzacatek.nb`.



Obrázek 5.2:



Obrázek 5.3:

5.2 Další ukázka: sériový RLC obvod

Ukažme si postup sestavení rovnic na dalším příkladu: na Obr. 5.2 je schéma zapojení rezistoru R, cívky L a kondenzátoru C v sérii.

Vyznačili jsme si zvolené orientace napětí na R, L, C a směry proudů jsme zvolili tak, aby byla zvolená orientace proudu na R, L, C ve stejném směru jako orientace napětí. Pak můžeme mechanicky napsat rovnice jednotlivých prvků:

$$\begin{aligned} u_R(t) &== R \cdot i_R(t), \\ u_L(t) &== L \cdot i'_L(t), \\ i_C(t) &== C \cdot u'_C(t) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Překreslíme si Obr. 5.2 tak, že uvažovaná napětí nahradíme (ideálními) zdroji napětí a získáme Obr. 5.3.

Z pravidel pro řazení zdrojů napětí plyne rovnice:

$$0 == u(t) - u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) \tag{5.6}$$

Překresleme si schéma na Obr. 5.2, kde místo tekoucích proudů zakreslíme (ideální) zdroje proudů, získáme Obr. 5.4:

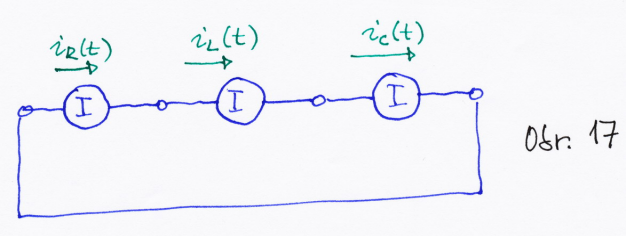
Spojení zdrojů proudu odpovídají rovnice:

$$\begin{aligned} i_R(t) &== i_L(t), \\ i_L(t) &== i_C(t) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Rovnic 5.5, 5.6, 5.7 je celkem šest a máme šest neznámých: tři neznámé proudy a tři neznámá napětí.

Veličiny, které se v rovnicích vyskytují v derivacích (tedy napětí, která jsou na kondenzátorech, a proudy tekoucí cívkami), vyžadují ještě počáteční podmínky, tedy

$$\begin{aligned} u_C(t = t_0) &== u_{C0},\ u_{C0} \text{ je zadané}, \\ i_L(t = t_0) &== i_{L0},\ i_{L0} \text{ je zadané} \end{aligned} \tag{5.8}$$



Obrázek 5.4:

Systém rovnic 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 je pro zadané hodnoty R, L, C snadno řešitelný, vizte Notebook `CAORLCNDSolve.nb` Verze s vynechanými komentáři je v notebooku `CAORLCNDSolveNoComment.nb`

Získali jsme úplné řešení: máme k dispozici časové průběhy všech obvodových veličin. Ovšem je zřejmé, že některé rovnice jsou velmi jednoduché, kdybychom si již na začátku označili, že obvodem teče jeden proud (to je nám ostatně zřejmé téměř od počátku), ušetřili bychom si dvě neznámé a dvě rovnice.

Navíc v našem velice jednoduchém obvodu bylo jasné, jak rovnice týkající se řazení napětí napsat, to nemusí být vždy jednoznačné. Ukážeme si nyní spolehlivý postup, jak každý korektně zapojený obvod (tj. například neporušíme pravidla řazení zdrojů proudu a napětí) popsat rovnicemi, a to pomocí tzv. metody uzlových napětí, kterou podrobně popisujeme v kapitole 6.

Kapitola 6

Metoda uzlových napětí

Metoda uzlových napětí využívá zachování proudů, proudy však vyjadřujeme pomocí napětí ☺.

Na Obr. 6.1 jsou zakresleny tzv. uzly 1, 2, 3 a uzel 0 označený značkou pro společný vodič $\perp$. Známe-li napětí uzlů 1, 2 a 3 proti uzlu 0, tedy napětí U_1, U_2, U_3, pak můžeme určit napětí mezi kterýmikoli dvěma uzly, například platí:

$$U_1 == U_{12} + U_2 \implies U_{12} == U_1 - U_2.$$

Ke znalosti napětí mezi kterýmikoli dvěma body stačí, abychom znali napětí bodů vůči společnému vodiči. Budeme-li napětí na prvku mezi dvěma uzly počítat z rozdílu napětí těchto uzlů proti (libovolně zvolenému) společnému uzlu, splníme vlastně automaticky rovnice plynoucí z řazení napětí (a tedy i zdrojů napětí).

S prvky, se kterými jsme se zatím z teorie obvodů seznámili, přichází v úvahu pro každý uzel situace podle Obr. 6.2: uvažovaný uzel může být spojen s dalšími uzly rezistorem, kondenzátorem, cívkou, zdrojem napětí a zdrojem proudu. Na obrázku jsou vyznačeny také (libovolně zvolené) orientace napětí mezi uzly a shodně s orientací napětí orientace proudů (aby platily rovnice 4.1, 4.2 a 4.4 popisující vztahy mezi proudem a napětím na rezistoru, cívce a kondenzátoru).

Vyjádříme všechny proudy tekoucí do a nebo z uzlu 6 a uvedeme, jestli dotyčný proud vtéká nebo vytéká: abychom správně dosadili do rovnice 3.8.

Uzly 3 a 6 (rezistor):

$$\left.\begin{aligned} u_R(t) &== R \cdot i_R(t) \\ u_R(t) &== u_3(t) - u_6(t) \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\implies i_R(t) = \frac{u_3(t) - u_6(t)}{R}, \text{ vtéká} \tag{6.1}$$

Uzly 1 a 6 (kondenzátor):

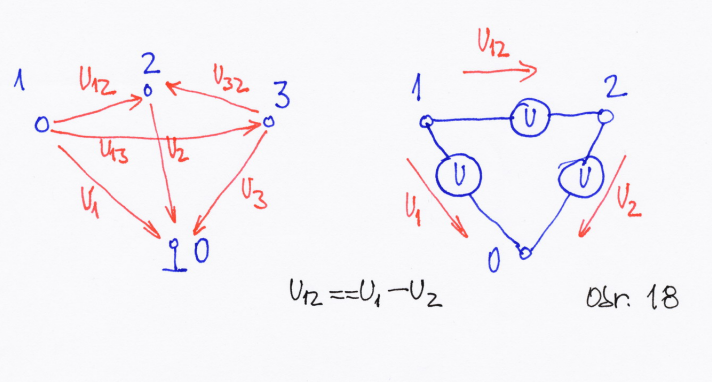
$$\left.\begin{aligned} i_C(t) &== C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \\ u_C(t) &== u_6(t) - u_1(t) \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\implies i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(u_6(t) - u_1(t)\big), \text{ vytéká} \tag{6.2}$$

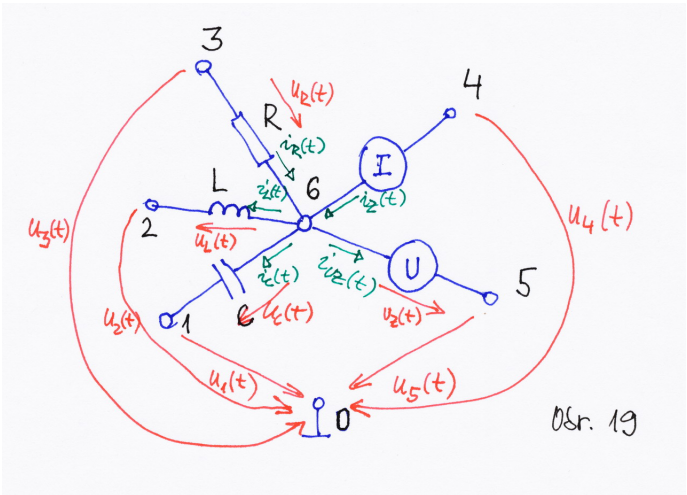
Ke kondenzátoru ještě vždy patří počáteční podmínka s napětím:

$$u_C(t = t_0) = u_6(t = t_0) - u_1(t = t_0) == u_{C0},$$

$$u_{C0} \text{ zadané.}$$



Obrázek 6.1:



Obrázek 6.2:

Uzly 4 a 6 (zdroj proudu): Zde je situace nejjednodušší, daný definicí zdroje proudu:

$$i_Z(t), \text{ vtéká.}$$

Zatím jsme tedy získali proudy, které budeme dosazovat do rovnice 3.8, bylo to jednoduché, protože z rovnic pro rezistor a kondenzátor jde při známém napětí vyjádřit snadno proud pomocí dělení nebo pomocí derivace napětí a proud ze zdroje proudu je zadaný z definice zdroje proudu. V rovnici pro ideální zdroj napětí se proud nevyskytuje, nelze z ní tedy vyjádřit. Pomůžeme si tak, že tento proud pojmenujeme, čímž získáme novou neznámou. Pro další neznámou ale potřebujeme další rovnici: bude to rovnice zdroje napětí.

Uzly 5 a 6 (zdroj napětí):

$$i_{UZ}(t), \text{ vytéká.}$$

Nová rovnice:

$$u_Z(t) == u_6(t) - u_5(t) \tag{6.3}$$

Obdobně naložíme s cívkou, proud jí tekoucí označíme jako novou proměnnou a rovnici pro cívku přidáme k systému rovnic.

Uzly 2 a 6 (cívka):

$$i_L(t), \text{ vytéká.}$$

$$u_L(t) == L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}, u_L(t) == u_6(t) - u_2(t)$$

Nová rovnice

$$L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} == u_6(t) - u_2(t) \tag{6.4}$$

K cívce ještě vždy patří počáteční podmínka s proudem:

$$i_L(t = t_0) == i_{L0},$$

$$i_{L0} \text{ zadané.}$$

Sestavíme soustavu rovnic pro řešení. Dosaďme za proudy do bilance 3.8

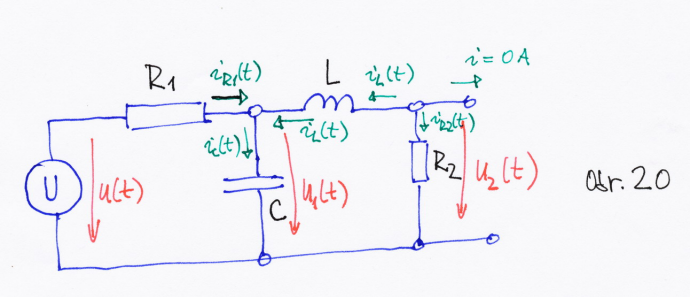
$$\sum I_{vtékající} = \frac{u_3(t) - u_6(t)}{R} + i_Z(t)$$
$$\sum I_{vytékající} = i_L(t) + i_{UZ}(t) + C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(u_6(t) - u_1(t)\big)$$

Rovnice popisující zachování proudu v uzlu:

$$\sum I_{vtékající} == \sum I_{vytékající}$$
$$\frac{u_3(t) - u_6(t)}{R} + i_Z(t) == i_L(t) + i_{UZ}(t) + C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(u_6(t) - u_1(t)\big) \tag{6.5}$$

Další rovnice vzniklé z důvodu nově zavedených neznámých:

$$u_Z(t) == u_6(t) - u_5(t) \tag{6.6}$$
$$L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} == u_6(t) - u_2(t) \tag{6.7}$$



Obrázek 6.3:

Počáteční podmínky pro kondenzátory a indukčnosti:

$$u_C(t = t_0) = u_6(t = t_0) - u_1(t = t_0) == u_{C0}, u_{C0} \text{ zadané},$$

$$i_L(t = t_0) == i_{L0}, i_{L0} \text{ zadané},$$

Pro každý uzel můžeme napsat 1 rovnici popisující zachování proudu, jako jsme napsali rovnici 6.5. Zavádíme-li nové proměnné, ke každé okamžitě máme rovnici. Máme tedy tolik rovnic, kolik je neznámých.

Je tedy naděje, že má-li schéma dobrý smysl, můžeme nalézt neznámá napětí uzlů a hodnoty nově zavedených proměnných. Veličiny, které jsme vyloučili dosazením vlastností obvodových prvků, můžeme snadno dopočíst, například

$$i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(u_6(t) - u_1(t)\big)$$

a podobně.

Poznámka 1:
Pokud zavádíme novou proměnnou a rovnici, učiníme tak když ji poprvé u některého z uzlů potřebujeme; podruhé bychom dělali totéž zbytečně znovu: to není chyba, ale je to hloupé.

Poznámka 2:
Ne vždy má n rovnic o n neznámých právě jedno řešení, a to ani v případě rovnic diferenciálních. Pokud má být ale obvod použitelný v praxi, chtěli bychom právě jedno řešení a to dokonce omezené, nekonečná napětí a proudy by v praxi nefungovaly.
Pokud nedokážeme získat jedno řešení s rozumnými výsledky, buď jsme obvod popsali špatně, nebo je schéma nesmyslné, nebo se ptáme na veličinu, kterou nelze určit (například napětí mezi tzv. galvanicky zcela oddělenými obvody...)

6.1 Příklad

Ukažme si to na obvodu podle Obr. 6.3:

Uzel 1: Rovnice popisující zachování proudu:

$$i_{R1}(t) + i_L(t) == i_C(t) \implies$$
$$\implies \frac{u(t) - u_1(t)}{R_1} + i_L(t) == C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(u_C(t) - 0\big)$$

Rovnice z důvodu nově zavedené proměnné:

$$u_2(t) - u_1(t) == L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

Počáteční podmínka pro cívku:

$$i_L(t = t_0) == i_{L0}, i_{L0} \text{ zadané.}$$

Počáteční podmínka pro kondenzátor:

$$u_C(t = t_0) == u_{C0}, u_{C0} \text{ zadané.}$$

Uzel 2: Rovnice popisující zachování proudu:

$$0 == i_L(t) + i_{R2}(t) + 0 \implies$$
$$\implies 0 == i_L(t) + \frac{u_2(t) - 0}{R_2} + 0$$

Rovnice z důvodu nově zavedené proměnné:

- nejsou, opakovali bychom se

Počáteční podmínky:

- Nepřibyla žádná nová cívka ani kondenzátor, nejsou.

Řešení je provedeno v notebooku `CAOUzlyUkazka.nb`.

Kapitola 7

Algoritmus pro metodu uzlových napětí

Metoda uzlových napětí se na první pohled může zdát být obtížná, ale ve skutečnosti to tak není. Tato metoda nám dává poměrně velkou volnost, jak obvod popsat, a právě proto se může zdát být matoucí. Abychom Vám to trochu usnadnili, nabízíme vám jednoduchou kuchařku, jak sestavit rovnice popisující jakýkoliv obvod (zatím se omezíme na známé součástky, časem k nim přidáme další). Berte to jako návod na složení Rubikovy kostky—nemusí to být nejefektivnější postup, ale (snad snadno) vede k cíli. Zde uvedený algoritmus je tedy jenom jedním z možných postupů.

S pomocí tohoto algoritmu popíšeme obvod poněkud větším množstvím rovnic, ale každá z těchto rovnic bude poměrně jednoduchá. Kdysi, když se obvody ještě řešily ručně, by nám to vadilo a snažili bychom se vytýkáním a dosazováním redukovat celkový počet rovnic (a tedy i neznámých). Dnes ale máme k dispozici silný nástroj, a tak těžkou práci můžeme svěřit Mathematice.

Algoritmus. Pro zadané schéma provedeme tyto kroky:

1. **Označíme uzly a očíslujeme je.** Jeden uzel zvolíme jako referenční; tomuto uzlu přiřadíme číslo 0.

2. **Označíme uzlová napětí,** tedy napětí jednotlivých uzlů vůči uzlu referenčnímu.

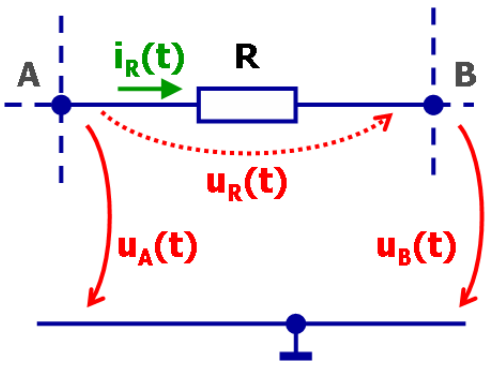
3. **Označíme proudy jednotlivými součástkami.**

4. **Pro každý uzel** kromě referenčního uzlu **napíšeme rovnici pro proudy v uzlu**, tedy vztah podle rovnice 3.8: $\sum I_{vtékající} = \sum I_{vytékající}$

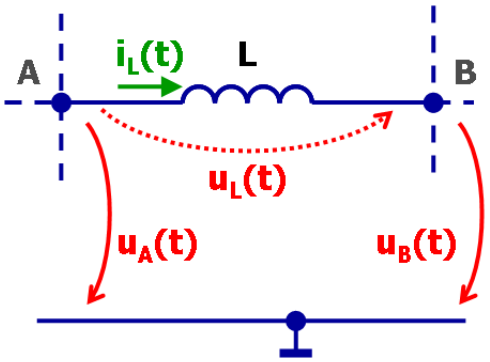
5. **Napíšeme rovnice součástek,** tedy vztahy pro napětí *mezi* svorkami součástky. Pro rezistor, kondenzátor a cívku použijeme rovnice 4.1, 4.2 a 4.4 (Pozor na vzájemnou orientaci proudů a napětí!).

6. **Napíšeme počáteční podmínky** pro ty neznámé, které se vyskytují v derivaci.

7. **Provedeme kontrolu.** Spočítáme rovnice a počáteční podmínky. Spočítáme neznámé a jejich derivace. Počet rovnic (bez počátečních podmínek) musí být stejný jako počet neznámých. Počet počátečních podmínek musí být stejný jako počet proměnných v derivaci.



Obrázek 7.1:



Obrázek 7.2:

7.1 Zobecněné rovnice součástek

Bod 5 algoritmu doplňme o zobecněné rovnice součástek. Předpokládejme, že součástka je obecně zapojena mezi uzly A a B, které mají uzlová napětí $u_A(t)$ a $u_B(t)$. Potom pro jednotlivé součástky platí následující vztahy

Rezistor (Obr. 7.1).

Napětí $u_R(t)$ mezi svorkami rezistoru měříme ve směru proudu $i_R(t)$ tekoucího tímto rezistorem, tedy z uzlu A do uzlu B. Pro napětí $u_R(t)$ platí podle Obr. 6.1: $u_R(t) = u_A(t) - u_B(t)$. Dosazením do rovnice 4.1 dostáváme:

$$u_A(t) - u_B(t) == R \cdot i_R(t)$$

Velikost odporu R je zadaná, $u_A(t)$, $u_B(t)$ a $i_R(t)$ jsou neznámé.

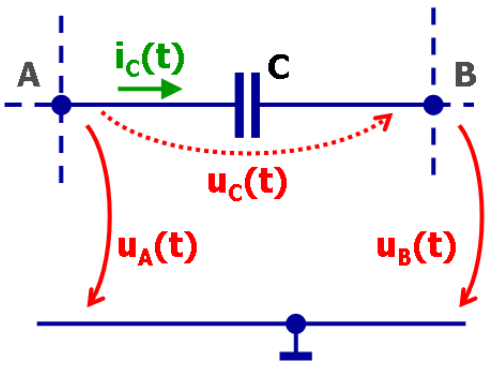
Cívka (Obr. 7.2).

$$u_A(t) - u_B(t) == L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

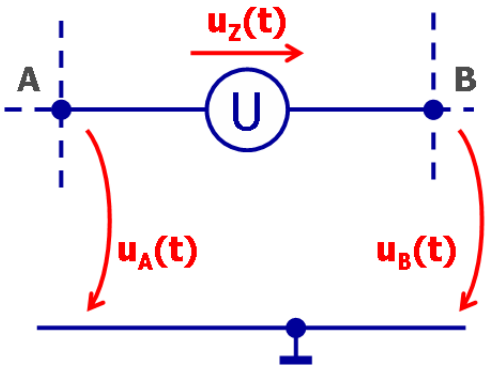
Velikost indukčnosti L je zadaná, $u_A(t)$, $u_B(t)$ a $i_L(t)$ jsou neznámé.

Kondenzátor (Obr. 7.3).

$$i_C(t) == C \cdot \frac{\mathrm{d}\left(u_A(t) - u_B(t)\right)}{\mathrm{d}t}$$



Obrázek 7.3:



Obrázek 7.4:

Velikost kapacity C je zadaná, $u_A(t)$, $u_B(t)$ a $i_C(t)$ jsou neznámé.

Zdroj napětí (Obr. 7.4).

Napětí $u_Z(t)$ je značeno z uzlu A do uzlu B. Pro napětí $u_Z(t)$ platí podle Obr. 6.1:

$$u_A(t) - u_B(t) == u_Z(t)$$

Napětí zdroje $u_Z(t)$ je zadané, $u_A(t)$ a $u_B(t)$ jsou neznámé.

Zdroj proudu (Obr. 7.5).

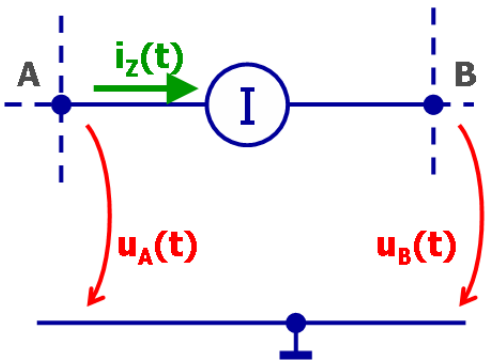
Pro zdroj proudu nepíšeme žádnou rovnici.

7.2 Příklad 1

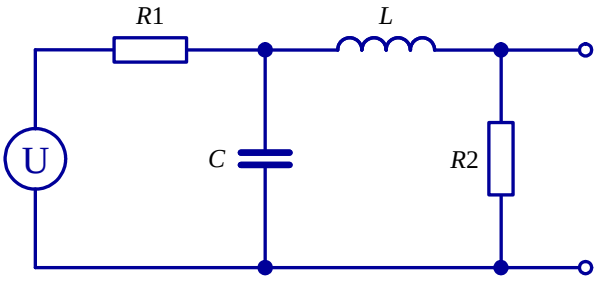
Výše popsaný postup si ukažme na příkladu z Obr. 6.3 (pro jistotu zde uvádíme obrázek ještě jednou, jako Obr. 7.6). Ve výsledku sice dostaneme trochu jiné rovnice nežli jsme dostali výše, ale jak zvídavý čtenář jistě snadno nahlédne, lze postupnými úpravami jednu soustavu rovnic převést na druhou.

1. Označíme uzly a očíslujeme je (Obr. 7.7)

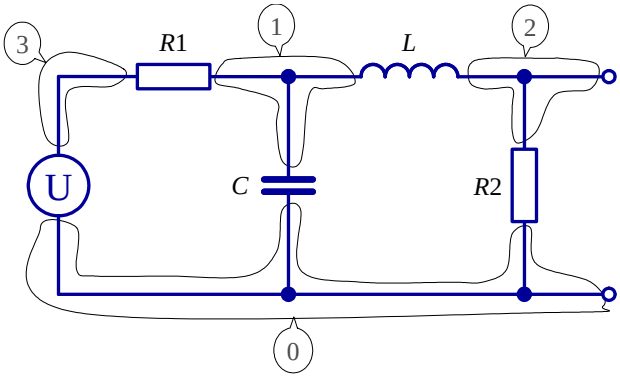
Jeden uzel zvolíme jako referenční; tomuto uzlu přiřadíme číslo 0. Uzel je "spojitý kus drátu", tedy je to vodič se všemi svými větvemi (odbočkami). Uzel končí až tam, kde začíná součástka.



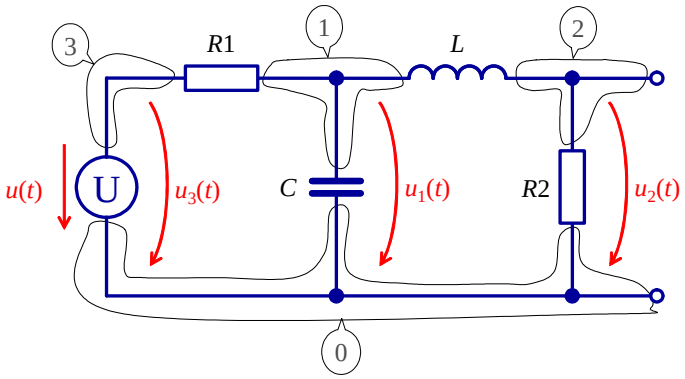
Obrázek 7.5:



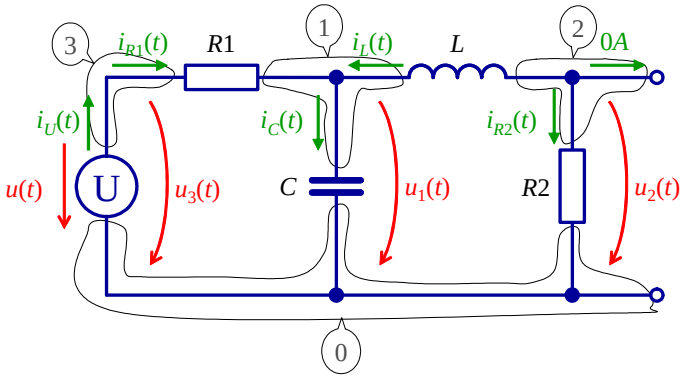
Obrázek 7.6:



Obrázek 7.7:



Obrázek 7.8:



Obrázek 7.9:

2. Označíme uzlová napětí (Obr. 7.8)

Jak jsme si vysvětlili už na Obr. 3.1, jakékoliv místo uzlu má vůči referenčnímu uzlu stejné napětí. Je to jako když "od pantáty vedou dráty"- když od transformátoru vedou po vesnici dráty, mají odbočku do baráku Novákovi, pak Potůčkovi, pak Růžičkovi, pak my a po nás další sousedi ... a všichni máme v baráku 230 V (v ideálním případě, samozřejmě ☺).

Na Obr. 3.1 jsme si také vysvětlili, že mezi jakýmikoliv dvěma místy téhož uzlu je nulové napětí. Kdybychom jeden konec voltmetru strčili do levé zdířky naší zásuvky (v levé zdířce je fáze) a druhý konec voltmetru strčili do levé zdířky Novákovic zásuvky, naměřili bychom mezi nimi nulové napětí - tedy zjistili bychom, že mezi těmito dvěma zdířkami vlastně není žádný rozdíl ☺. [1]

3. Označíme proudy jednotlivými součástkami (Obr. 7.9)

Šipku proudu volíme pokud možno se stejnou orientací jako má šipka napětí na svorkách této součástky. To platí zejména pro součástky, v jejichž rovnicích se vyskytují jak napětí, tak proud (rezistor, kondenzátor, cívka). Pokud je v rovnici součástky pouze jedna z těchto veličin (napětí pro zdroj napětí, proud pro zdroj proudu), pak nemusejí mít šipka napětí a šipka proudu stejnou orientaci.

Pokud by šipka proudu měla opačnou orientaci nežli šipka napětí, potom v rovnicích 4.1, resp. 4.2, resp. 4.4 musíme na jednu ze stran přidat znaménko mínus.

[1] Pro hnidopichy upřesňujeme, že obě zásuvky musejí být samozřejmě připojeny ke stejné fázi. Po vesnici se totiž rozvádějí tři fáze a v každém stavení se zpravidla zhruba třetina zásuvek a světel připojuje k první fázi, třetina k druhé a třetina k třetí - dělá se to kvůli vyvážení elektrické sítě, aby zatížení každé fáze bylo zhruba stejné.

4. Napíšeme rovnice pro proudy v uzlech

Na každý uzel aplikujeme rovnici 3.8. Pro jistotu ji zde ještě jednou zopakujme:

$$\sum I_{vtékající} = \sum I_{vytékající}$$

Připomínáme, že proudy se nikde neztrácejí. Pokud tedy například proud $i_{R1}(t)$ zleva (z uzlu 3) vleze do rezistoru $R1$, potom musí napravo (v uzlu 1) z něj vylézt.

Uzel 1:

Do uzlu 1 vtékají proudy $i_{R1}(t)$ a $i_L(t)$. Z uzlu 1 vytéká proud $i_C(t)$. Platí tedy:

$$i_{R1}(t) + i_L(t) == i_C(t) \tag{7.1}$$

Uzel 2:

$$0 == i_L(t) + 0 + i_{R2}(t) \tag{7.2}$$

Uzel 3:

$$i_U(t) == i_{R1}(t) \tag{7.3}$$

Poznamenejme, že rovnice pro uzel 3 je zbytečná. Zcela zbytečně zavádíme neznámou $i_U(t)$, která se v žádných dalších rovnicích nevyskytuje. Rovnice pro uzel 3 vlastně jenom říká, že $i_U(t)$ je synonymem pro $i_{R1}(t)$.

Poznámka:
Rovnici pro referenční uzel 0 nikdy nepíšeme, protože není lineárně nezávislá, a tedy nepřináší žádnou novou informaci. Tato rovnice totiž vždy vyplývá z rovnic pro ostatní uzly. Přesvědčme se o tom—sečteme-li rovnice pro uzly 1, 2 a 3, pak po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$i_U(t) == i_C(t) + i_{R2}(t),$$

což je rovnice pro uzel 0.

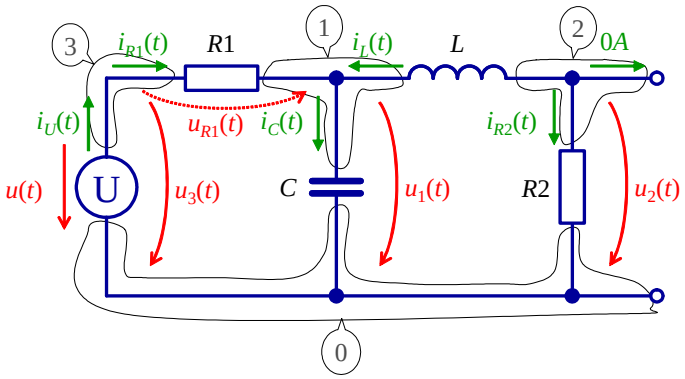
5. Napíšeme rovnice součástek

Což jsou zpravidla vztahy mezi napětím na svorkách součástky a proudem součástkou. Pro rezistor, kondenzátor a cívku použijeme rovnice 4.1, 4.2 a 4.4.

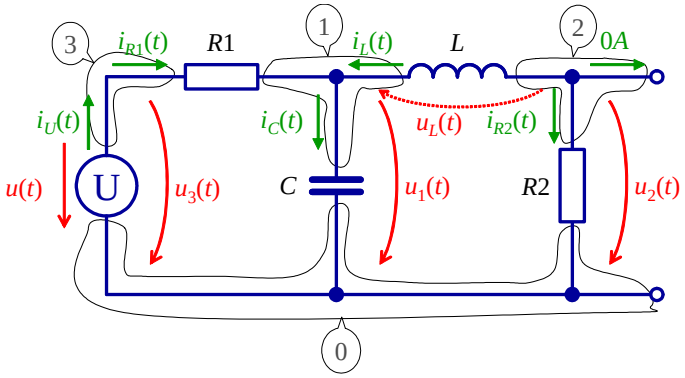
Rezistor $R1$:

Napětí $u_{R1}(t)$ na rezistoru $R1$ označíme se stejnou orientací jako proud $i_{R1}(t)$, který teče tímto rezistorem (Obr. 7.10). Abychom nemuseli zavádět další neznámou (a tudíž další rovnici), vyjádříme si napětí $u_{R1}(t)$ pomocí uzlových napětí. Podle Obr. 6.1 platí:

$$u_{R1}(t) == u_3(t) - u_1(t)$$



Obrázek 7.10:



Obrázek 7.11:

Připomeňme pravidlo *"jdeme z uzlu 3 do uzlu 1, tedy napětí na rezistoru je rovno napětí uzlu 3 minus napětí uzlu 1"*. Dosazením do rovnice 4.1 obdržíme:

$$u_3(t) - u_1(t) == R1 \cdot i_{R1}(t) \tag{7.4}$$

Kondenzátor C:

Napětí na kondenzátoru je rovno $u_1(t)$. Proud kondenzátorem má stejnou orientaci jako napětí na kondenzátoru. Píšeme rovnou podle rovnice 4.4:

$$i_C(t) == C \cdot \frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.5}$$

Cívka L:

Napětí na cívce označíme se stejnou orientací jako proud cívkou (Obr. 7.11). Napětí na cívce jde z uzlu 2 do uzlu 1, tedy platí:

$$u_L(t) == u_2(t) - u_1(t)$$

Dosadíme do rovnice 4.2:

$$u_2(t) - u_1(t) == L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.6}$$

Rezistor $R2$:

$$u_2(t) == R2 \cdot i_{R2}(t) \tag{7.7}$$

Zdroj napětí U:

$$u(t) == u_3(t) \tag{7.8}$$

Poznamenejme, že rovnice pro zdroj napětí U je opět zbytečná. V podstatě říká, že napětí $u_3(t)$ je synonymem pro napětí $u(t)$. Kdybychom do ostatních rovnic (konkrétně do rovnice pro rezistor $R1$) dosadili $u(t)$ místo $u_3(t)$, mohli bychom rovnici pro zdroj napětí také vynechat. Takto se to skutečně většinou dělá.

6. Napíšeme počáteční podmínky pro neznámé, které se vyskytují v derivaci

V derivaci se vyskytují $u_1(t)$ a $i_L(t)$. Napíšeme počáteční podmínky (například pro čas 0) pro tyto dvě proměnné:

$$u_1(0) == 0 \tag{7.9}$$
$$i_L(0) == 0 \tag{7.10}$$

V tomto případě předpokládáme, že v čase 0 tekl cívkou L nulový proud a kondezátor C byl v tomto čase vybitý (bylo na něm nulové napětí). Obecně ale mohou být počáteční podmínky různé, mohli bychom například psát:

$$u_1(0) == 1.248$$
$$i_L(0) == -4.5 \cdot 10^{-4}$$

A také nemusejí být stanoveny jako hodnoty v čase 0, ale třeba v nějakém jiném čase:

$$u_1(3.1) == -3.478$$
$$i_L(3.1) == 0.0023$$

Zkrátka, počáteční podmínky fungují jako jakýsi záchytný bod. Něco, od čeho se lze odpíchnout. Jak pravil Archimédes, "dejte mi pevný bod a pohnu Zemí".

7. Provedeme kontrolu

Spočítáme počet rovnic (včetně počátečních podmínek) a počet neznámých a jejich derivací. Celkový počet rovnic musí být stejný jako počet neznámých a jejich derivací.

Máme celkem 10 rovnic, konkrétně 3 rovnice pro uzly (7.1, 7.2 a 7.3), 5 rovnic pro součástky (7.4, 7.5, 7.6, 7.7 a 7.8) a 2 rovnice pro počáteční podmínky (7.9 a 7.10).

Máme celkem 8 neznámých ($u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, $i_U(t)$, $i_{R1}(t)$, $i_{R2}(t)$, $i_C(t)$, $i_L(t)$) a 2 neznámé v derivaci ($u_2'(t)$, $i_L'(t)$).

Počet rovnic odpovídá počtu neznámých a neznámých v derivaci.

Notebook s řešením

V notebooku `CAOUzlyPriklad1.nb` naleznete řešení tohoto příkladu. Verzi s vynechanými komentáři naleznete v noteboku `CAOUzlyPriklad1NoComment.nb`.

```
[DOPLNIT VYPIS NOTEBOOKU (JAKO VYPIS PROGRAMU S KOMENTARI)]

[DOPLNIT DALSI PRIKLADY (NIZE ZAKOMENTOVANE)]
```

Kapitola 8

Diferenciální rovnice a předpovídání budoucnosti, co vlastně dělá NDSolve

Podíváme-li se na notebook `CAOUzlyUkazka.nb`, vidíme, že jsme se k cíli, tedy k vyřešení úkolu „když je zadané napětí nebo proud někde, jaké bude napětí nebo proud jinde“, dostali přímočaře a snadno, tak snadno, že byla nálada vyhrát si trochu i s barvičkami a vlastně stačilo mechanicky použít návod pro metodu uzlových napětí a znát syntaxi `NDSolve`.

To, že cesta k výsledku byla tak jednoduchá, bylo způsobeno právě tím, že máme `NDSolve`: nevadilo nám zavádění dalších neznámých a zvyšování počtu rovnic, nevadilo nám, že rovnice jsou diferenciální i algebraické (obsahující derivace neznámých funkcí i neobsahující derivace neznámých funkcí).

Velká část obtížnosti studia teorie elektrických obvodů spočívá jinde v obtížnosti řešení získaných rovnic. Získali jsme velikou moc velmi snadno, ale nenechme se mýlit, zjistit, „co obvod dělá“ ještě vůbec neznamená rozumět tomu, jak to dělá a proč. Fakt, že umíme po pár obrázcích mnoho ještě neznamená, že jsme nějak lepší: jen my máme sbíječku a oni majzlík; jak rychle dílo dokončíme je důležité ekonomicky, ale kvalita díla nemusí být větší.

O `NDSolve` by šlo říci tak asi „. . . a všichni se podivovali, jakou moc dal Stephen Wolfram lidem.“

Funkce `NDSolve[rovnice, neznámé, interval řešení]` hledá numerickou aproximaci řešení diferenciálních rovnic. A co to je a proč to můžeme dělat, bychom si měli trochu více vysvětlit: nikoli podrobně teorii numerických řešení diferenciálních rovnic, k tomu jsou povolanější jiní (zejména www.wolframalpha.com a help SW Mathematica u `NDSolve`). Jde nám o to získat představu, o co tak asi jde. Ostatně jak funguje karburátor víme také jen tak mlhavě a detaily mísení ve více komorách běžný řidič nezná. Ale i běžný řidič ví, že se tam něco s benzínem a vzduchem děje.

Proč vlastně numerické metody? Matematická analýza pracuje s představou souvislé číselné osy plné reálných čísel, z nichž naprostá většina jsou čísla iracionální. Kdybychom chtěli iracionální číslo vyjádřit desetinným číslem přesně, potřebovali bychom nekonečný počet desetinných míst, což není v konečném čase možné, navíc to není ani praktické: *kdyby* byla Mléčná dráha kruhová a *kdybychom* znali její poloměr a *kdyby* nebyl vesmír zakřivený a platil by vzoreček pro obvod kruhu, pak vynecháme-li všechna desetinná místa za čtyřicátým v čísle π (pí), chyba vzniklá tímto zaokrouhlením by byla menší než průměr protonu. Z uživatelského hlediska jsou tedy všechny další cifry pro řešení podobných úloh zbytečné.

Dnešní matematika nese v sobě velkou část dědictví geometrie starých Řeků, kde byl kladen důraz na konstrukce ve světě geometrických objektů zcela přesné, úplná správnost pak měla být dokazatelná v konečném počtu myšlenkových kroků. Navíc obrovský úspěch Newtonovy a Lagrangeovy mechaniky utvrzoval vědce v představě světa spojitého, nekonečně dělitelného v prostoru a čase a tak byla

vypracována spousta chytrých metod řešení matematických a inženýrských problémů vycházejících z představy spojitého světa.

Ani objev kvantové povahy jevů a částicové struktury hmoty příliš spojité teorie neoslabil: částic je v běžných situacích jednoduše příliš mnoho na to, abychom s nimi mohli počítat jednotlivě a s chytrou obezličkou kontinuální teorie (neuvažujeme veličiny lokální, ale jejich střední hodnoty přes objemy, které jsou „mikroskopicky velké a makroskopicky malé“) naše rovnice platí, pokud neuvažujeme jevy mikrosvěta.

Problém je, že s iracionálními čísly pracujeme jinak, než s čísly racionálními: jelikož je nemůžeme zapsat v konečné formě desetinným (nebo dvojkovým, to je jedno) rozvojem, nebývá nám, než je pojmenovat.

Taková čísla jsou například $\pi, e, \sqrt{5}, \sin(5), \ldots$. Pokud chceme s těmito čísly pracovat přesně, používáme pravidla pro úpravy, například

$$\left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5}.$$

Pokud nás zajímá „kolik to je, alespoň přibližně“, máme přibližné vyčíslení v tabulkách; jde často o výsledek programu, který by nám dal všechna desetinná čísla, kdyby běžel věčně, ale my jsme jej zastavili a spokojili se s nepřesným výsledkem, zato získaným v konečném čase.

Z tohoto pohledu jsou v číslech $\pi, e, \sqrt{5}, \sin(5), \ldots$ „do pojmenování schované výsledky nekonečných procesů“ a úlohy se opět řeší v klasickém stylu: řešení úlohy vtipným použitím konečného počtu kroků s použitím připravených hodnot čísel typu $\pi, e, \sqrt{5}, \sin(5)\ldots$ se považuje za cosi pěkného a ukazuje to jak je matematik chytrý, chcete-li ovšem použitím triků řešit složitější úlohy, brzy narazíte.

Toto pojetí má výhodu (pro technika naprosto zbytečné) absolutní přesnosti, nevýhodou je, že kromě za staletí vynalezených a vyzkoušených postupů nemáme žádný návod, jak příslušné triky vynalézat, naopak často umíme dokázat, že řešit úlohu s použitím již známých „do pojmenování schovaných výsledků nekonečných procesů“ nelze. Pokud chceme pracovat nadále přesně, nezbývá, než si hledané přesné řešení pojmenovat.

Například řešení rovnic

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x + a_0 &== 0 \\ a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 &== 0 \\ a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 &== 0 \\ a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 &== 0 \end{aligned}$$

lze vyjádřit pomocí sčítání, násobení, dělení a odmocňování, tedy existují vzorce, které nám dají hodnotu neznámých kořenů x a tyto vzorce jsou konečné délky zápisu.

Pro rovnici:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0$$

lze dokázat, že vzorec konečné délky obecně neexistuje (jasně, pro zvláštní hodnoty koeficientů existovat může, těchto zvláštních případů je však mnohem méně než obecných a pravděpodobnost, že půjde najít vzorec pro náhodně zvolených 6 koeficientů, je nula).

Chceme-li mít vzorec pro řešení v konečném tvaru, musíme si jej pojmenovat. Často pak těmto pojmenováním říkáme „speciální funkce“, pro polynomiální rovnice například v Mathematice máme funkci `Root`. Není o nic horší, než funkce druhá odmocnina nebo sinus, jenom je mladší a nejsme na ni zvyklí.

Postup, kdy můžeme o každém výsledku v konečném počtu kroků dojít ekvivalentními úpravami až k axiomům a tak rozhodnout o správnosti nebo nesprávnosti nemusí existovat (Gödel, Tarski, Banach...).

Požadavek absolutní přesnosti a ostrosti pojmů, kterou jsme předpokládali po staletí (muž nebo žena, živý nebo mrtvý, vlna nebo částice, je a nebo to není babička...) je neaplikovatelný a ostatně na proudu a napětí a teplotě jsme viděli, že používáme v životě pojmy bez znalosti přesných definic a v konečném důsledku bez naprosto přesných výpovědí a nikterak nám to nevadí. Koho to zajímá více, pěkně o tom pojednává Ludwig Wittgenstein ve svých Filosofických zkoumáních.

My v tuto chvíli přesná řešení opustíme: ostatně i naše vstupy jsou poměrně nepřesné.

8.1 Eulerova metoda

Podívejme se na definici derivace funkce f, parametrem této funkce bude čas t.

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{8.1}$$

Limitní proces dokonalého „blížení se“ je ve světě konečného počtu dostupných čísel nemožný: i v intervalu $\langle 0, 10^{-17} \rangle$ je ve smyslu reálných (ten název „reálná čísla“ je trochu výsměch) nekonečněkrát více čísel, která kdy použijí všechny počítače a to i kdyby vesmír s počítači trval věčně. Mezi „bez pojmenování“ dostupnými čísly jsou mezery a nikdy nebude dost jmen pro ta pojmenovaná.

Učiníme tedy troufalý krok: vypustíme znak limity, Δt budeme uvažovat v „nějakém dobrém smyslu malé“ a znak přesné rovnosti nahradíme znakem „rovná se přibližně“ $\approx$.

Obdržíme:

$$f'(t) \approx \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{8.2}$$

Z rovnice 8.2 ovšem již můžeme vyjádřit $f(t + \Delta t)$:

$$f(t + \Delta t) \approx f(t) + f'(t) \cdot \Delta t \tag{8.3}$$

Pokud příslušná limita a tedy i derivace existuje, bude pro „dostatečně malé Δt“ chyba „dostatečně malá“.

Vztah vyjádřený rovnicí 8.3 využívá Eulerova metoda (lepší informaci najdete na anglické wikipedii: Euler method), která se používá pro numerické řešení diferenciálních rovnic. Později si ukážeme, že existují i jiné metody, například Runge-Kutta, které ale jsou jenom vylepšením této základní, Eulerovy metody. Funkce `NDSolve` má v sobě zabudovaných více takových metod a pro konkrétní řešení vždycky vybere tu z nich, kterou pro zadaný problém považuje za nejlepší.

Pokud je naše nezávisle proměnná čas, můžeme rovnici 8.3 chápat jako „předpovídání budoucnosti“, znalost $f(t)$ a $f'(t)$ nám pro zvolené Δt poskytne *přibližnou informaci* o hodnotě funkce f o Δt později, tedy přibližnou hodnotu $f(t + \Delta t)$.

Problém je, že samotná existence konečné derivace $f'(t)$ nám zajistí jen to, že zvolíme-li si nějakou hodnotu nepřesnosti ve vztahu 8.3, *existuje* takové Δt, že pro každé menší Δt bude nepřesnost menší, než zvolená hodnota. Samotná existence konečné derivace nám ale neřekne, jak malé Δt máme volit pro zvolenou míru nepřesnosti.

Ukázka, jak například řešit Eulerovou metodou případ dvou neznámých funkcí je v `CAOPr2RLCdif2.nb`. V podstatě jakmile dokážeme z rovnic získat funkci, která vrací vektor derivací neznámých proudů a napětí a jejímiž parametry jsou ona neznámá napětí a čas, je vyhráno. V

první buňce je syntaxe, jak takovou funkci získat z rovnic poměrně obecně, dále je naprogramován postup již jen pro dvě neznámé funkce: přepis druhé části na obecný tvar ponecháváme zvídavému čtenáři coby cvičení.

Metoda vycházející z uvedeného postupu se jmenuje Eulerova metoda řešení obyčejných diferenciálních rovnic. `NDSolve` používá mnoho různých metod, které navíc mají nastavitelné parametry (nepovinné parametry funkce `NDSolve`), například proměnlivý krok Δt, což zrychluje výpočet: tam, kde se hodnoty mění rychle, volí `NDSolve` menší Δt, aby dosáhlo zvolené přesnosti, byť za cenu delšího výpočetního času, v oblastech málo se měnících hodnot vstupů a hledaných veličin se krok prodlužuje, čímž výpočet zrychlujeme: v podstatě je to jako chování řidiče v serpentinách a na dálnici.

Metody obsažené v `NDSolve` jsou však v podstatě stejného principu jako metoda Eulerova, alespoň v tom smyslu, že využívají derivací k odhadu změn veličin podobně jako ve vztahu 8.3, ovšem podstatně sofistikovanějším způsobem.

Nyní umíme vyřešit všechny řešitelné obvody obsahující rezistory, kondenzátory, cívky a zdroje proudu a napětí. Naprostá většina takových obvodů je zhola neužitečná, některé jednoduché případy se ale vyskytují často a je dobré znát řešení těchto jednoduchých a často se vyskytujících případů zpaměti: ostatně při počítání bez pomoci strojů si pro výsledek násobení malých čísel saháme do paměti, teprve pro násobení větších použijeme algoritmus převádějící problém na sčítání a vícenásobné sahání do paměti.

Kapitola 9

Základní jednoduché případy: děliče a spojování součástek stejného typu

Rovnice jsou řešeny v notebooku `CAOJednoduchePripady.nb`.

9.1 Sériové řazení

9.1.1 Sériové řazení rezistorů

Uvažme situaci podle 9.1. Napišme rovnice pro uzel 2:

$$\frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_1} == \frac{u_2(t)}{R_2} \implies u_2(t) \to u_1(t) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{9.1}$$

Získali jsme vztah pro napětí tzv. odporového děliče. Vyjádřeme proud:

$$\begin{aligned} i_1(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = \frac{u_1(t)}{R_1 + R_2} \implies \\ \implies u_1(t) \to (R_1 + R_2) \cdot i_1(t) \end{aligned} \tag{9.2}$$

Je tedy zřejmé, že jde o stejnou rovnici, jako kdyby protékal proud $i_1(t)$ rezistorem o odporu $R_1 + R_2$. Získali jsme pravidlo sériového řazení rezistorů:

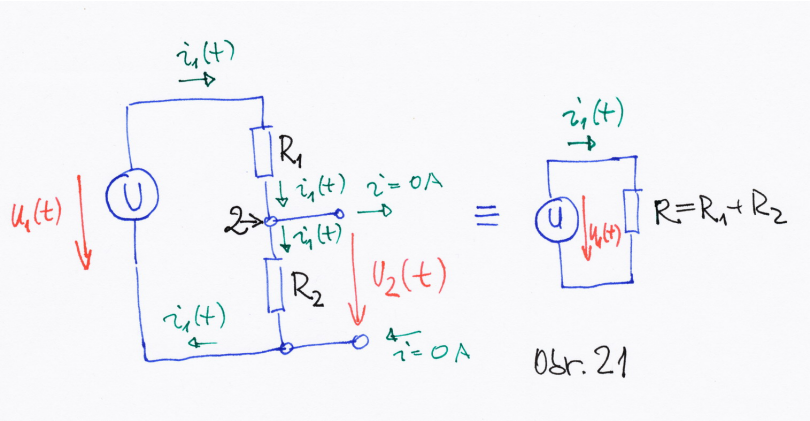
> Sériově řazené dva rezistory můžeme (pokud se z uzlu, ve kterém se stýkají, neodebírá žádný proud!) nahradit jedním, jehož odpor je roven součtu odporů těchto dvou rezistorů, tedy
>
> $$R = R_1 + R_2.$$

Zobecnění pro více rezistorů je elementární, podobné jako v případě řazení zdrojů napětí.

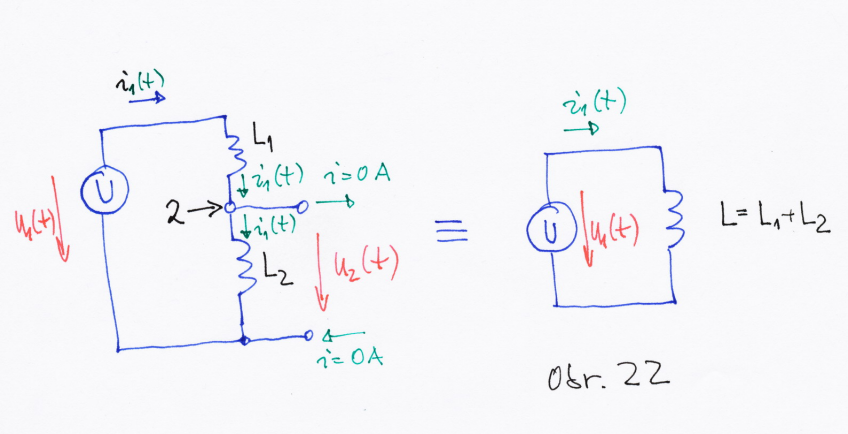
9.1.2 Sériové řazení cívek

Uvažme situaci podle 9.2. Napišme rovnice pro uzel 2:

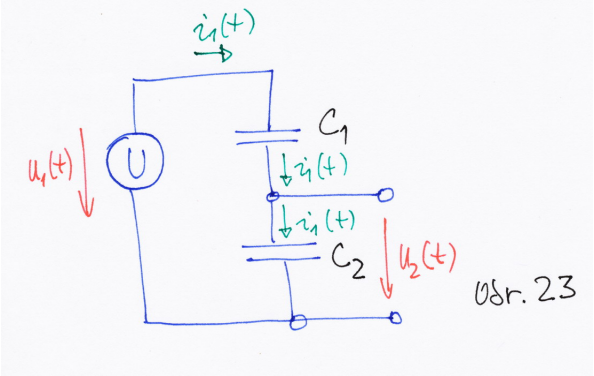
$$\begin{aligned} u_1(t) - u_2(t) == L_1 \cdot i_1'(t), \\ u_2(t) == L_2 \cdot i_1'(t) \end{aligned}$$



Obrázek 9.1:



Obrázek 9.2:



Obrázek 9.3:

Proud jsme si pojmenovali, rovnici uzlu psát nemusíme, v tomto případě je vyřešená tím, že jsme pojmenovali shodně proud oběma cívkami. Řešení je

$$\begin{aligned} u_2(t) &\to u_1(t) \cdot \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \\ u_1(t) &\to (L_1 + L_2) \cdot i_1'(t) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Získali jsme pravidlo sériového řazení cívek:

Sériově řazené dvě cívky můžeme (pokud se z uzlu, ve kterém se stýkají, neodebírá žádný proud!) nahradit jednou, jejíž indukčnost je rovna součtu indukčností těchto dvou cívek, tedy

$$L = L_1 + L_2.$$

Zobecnění pro více cívek je elementární.

9.1.3 Sériové řazení kondenzátorů

Sériové řazení kondenzátorů je řešeno v notebooku `CAOJednoduchePripady.nb`. Napíšeme rovnici uzlu 2:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(u_1(t) - u_2(t)\big) == C_2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2(t) \implies \\ \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2(t) \to \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_1(t), \\ i_1(t) == C_2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2(t), \\ i_1(t) == \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_1(t) \end{aligned}$$

Je tedy možno nahradit sériovou kombinaci dvou kondenzátorů jedním o kapacitě

$$\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\dfrac{1}{C_1 \cdot C_2}}{\dfrac{1}{C_1 \cdot C_2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} \tag{9.4}$$

Sériově řazené dva kondenzátory můžeme (pokud se z uzlu, ve kterém se stýkají, neodebírá žádný proud!) nahradit jedním, jehož kapacita je rovna

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}.$$

9.2 Paralelní řazení

V notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` je také odvozeno paralelní řazení rezistorů a kondenzátorů; podceňovali bychom inteligenci čtenáře, kdybychom komentovali řešení obrázkem a rovnicemi. Ostatně zkusit si podle rovnic z notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` nakreslit schémátko, navíc když víme, že má jít o paralelní řazení, je s tím, co už o elektrických obvodech víme, hezké jednoduché cvičení.

Paralelně řazené dva rezistory lze nahradit jedním, jehož odpor je roven převrácené hodnotě součtu převrácených hodnot odporů paralelně spojených rezistorů, tedy

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

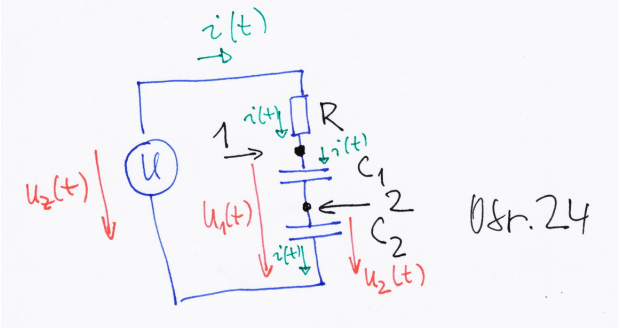
Paralelně řazené dvě cívky lze nahradit jednou, jejíž indukčnost je rovna převrácené hodnotě součtu převrácených hodnot indukčností paralelně spojených cívek, tedy

$$L = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}.$$

Paralelně řazené dva kondenzátory lze nahradit jedním, jehož kapacita je rovna součtu kapacit těchto kondenzátorů, tedy

$$C = C_1 + C_2.$$

Povšimněme si, že co do způsobu výpočtu výsledné hodnoty, jsou rezistor a cívka „na jedné lodi“ a problém je pěkně symetrický: co platí o sériovém řazení cívek a odporů, platí o paralelním řazení kondenzátorů a naopak. Důvod toho je ukryt již v řazení zdrojů proudu a napětí a v definičních rovnicích součástek a vysledovat jej precizněji opět ponecháváme zvídavému čtenáři coby cvičení; pamatovat si odvozená pravidla bychom si alespoň do úspěšného zakončení předmětu ČAO měli všichni ☺.



Obrázek 9.4:

9.3 Příklad

Na pár místech jsme zmínili cosi ve smyslu, že každé schéma nemusí mít řešení a vidět to bylo v případě paralelního řazení zdrojů nestejných napětí a sériového řazení nestejných zdrojů proudu, kde jsme okamžitě obdrželi *False*, čili pokud se takové kombinace v obvodu vyskytne, obvod je nesmyslný, neužitečný a nerealizovatelný. Ukažme si ještě jeden nesmysl a poukažme na jeden omyl v případě napětí a sériového řazení kondenzátorů. Jasně, úplně duální problém by nastal v případě proudů a paralelního řazení cívek. Ideální rezistor je součástka, která žije vždy jen současností, popis jejího chování neobsahuje derivace, nemá požadavek na spojité změny ani proudu, ani napětí: kolize současnosti s minulostí nemůže nastat a tak problém, na který poukážeme, se ideálních rezistorů i netýká. Reálných ano, ty vykazují kapacitu i indukčnost, ostatně reálné cívky a kondenzátory vykazují vždy i odpor a „tu druhou“ vlastnost: ukázaný problém bude tedy ve skutečnosti teoretický, v přírodě nastat nemůže.

Uvažme zapojení podle 9.4. V notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` je v poslední buňce tento obvod vyřešen. Vyzkoušíte-li si stav s nulovými počátečními podmínkami, uvidíte, že lze kapacitní nezatížený dělič používat stejně jako dělič odporový, obecně ovšem nikoli. Pro počáteční napětí kondenzátorů splňující podmínku, že jejich součet je roven napětí zdroje v počátečním čase (tedy pokud $u_{C1}(t_0) + u_{C2}(t_0) == u_Z(t_0)$, můžeme snižovat hodnotu odporu; ovšem pro podmínky toto nesplňující je velikost počátečního proudu se snižováním odporu stále větší a pro nulový odpor řešení bez zavedení (v přírodě se nevyskytujících) pulsů (v Mathematice pro analytická řešení například funkce `DiracDelta`) neexistuje.

Vyzkoušejte si změny hodnot počátečních podmínek (označených jako `uc10` a `uc20`) a zmenšování odporu rezistoru k nule.

Kapitola 10

Stejnosměrné obvody

Pokud se v obvodu vyskytují zdroje proudu a napětí, které mají konstantní velikost (a samozřejmě nemění v čase orientaci) a v počátečním čase jsou hodnoty napětí na kapacitách a proudů tekoucích indukčnostmi obecné, budou se nejprve (vlivem neshody velikosti proudů a napětí v obvodu) měnit, s časem ovšem méně a méně. Odezní tzv. přechodný děj (transient phenomenon) a hodnoty se ustálí, čímž myslíme, že se mění tak málo, že je v rámci zvolené přesnosti již můžeme za konstantní považovat: přesně stanovená hranice, kdy končí přechodný děj, tedy neexistuje, záleží na naší volbě.

Abychom se podívali na ukázkový případ, nemusíme nic dalšího programovat, v notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` je v poslední buňce. Když si zkusíte kromě odporů a počátečních podmínek také měnit `tmax`, ustálení obvodu uvidíte.

Podívejme se na rovnice jednotlivých součástek za předpokladu konstantních hodnot všech proudů a napětí

$$\begin{aligned} u_R(t) &== R \cdot i_R(t) \qquad \rightarrow \qquad u_R == R \cdot i_R \\ i_C(t) &== C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \rightarrow \qquad i_C == 0A \\ u_L(t) &== L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \rightarrow \qquad u_L == 0V \end{aligned} \tag{10.1}$$

Poznámka: Odebráním argumentu t v pravé části ukazujeme, že místo konstantní funkce můžeme myslet konstantu.

Je-li na nějakém prvku (stále) nulové napětí, má stejnou rovnici jako kus vodiče nebo zdroj nulového napětí.

Teče-li nějakým prvkem (stále) nulový proud (jasně, žádný proud neteče), můžeme tento prvek z obvodu vypustit.

Stejnosměrné obvody samozřejmě můžeme řešit obecně se všemi součástkami, vyřešit diferenciální rovnice, přičemž si dáme pozor, abychom čas řešení zvolili dostatečně dlouhý, aby se průběhy ustálily a odečíst výsledné hodnoty na konci řešení.

Často se jeví jednoduší na základě vztahů 10.1 „kondenzátory rozpojit a cívky a zkratovat“, tedy kondenzátory zcela vyřadit ze schématu a cívky nahradit vodiči.

Rovnice popisující obvody však byly diferenciálními rovnicemi z důvodu, že vztahy mezi napětím a proudem obsahují v případě cívek a kondenzátorů derivace. Nejsou-li v obvodu cívky a kondenzátory, nejsou v jeho popisu derivace a vzniklé rovnice jsou algebraické.

Máme-li již rovnice napsané v Mathematice, odstranění derivací provedeme z rovnic snadno například takto:

V případech obvodů složených z námi dosud uvažovaných obvodových prvků jde o zjednodušení značné, navíc věty o řešitelnosti soustav lineárních rovnic jsou všeobecně známé a pokud řešení nalezneme, můžeme se i dosazením přesvědčit, jestli naše řešení původní rovnice splňuje.

V případech obvodů obsahujících tzv. nelineární prvky (jako jsou například diody, tranzistory, cívky a transformátorky s feromagnetickými magnetickými obvody a podobně) je často výhodnější řešit diferenciální rovnice s vyjádřitelnými derivacemi, než hledat ustálené stavy řešením soustav nelineárních algebraických rovnic.

Kapitola 11

Harmonický ustálený stav

11.1 Experiment na úvod

Ukázky pro tuto část textu jsou v notebooku `CAORLCNDSolveaHUS.nb`.

Pro vysvětlení použijeme stejné schéma, jako je na 11.1.

Pro lepší názornost jsme si vyjádřili derivace a eliminovali zbytečné algebraické rovnice.

Nejprve se podívejme na výsledné grafy, vidíme, že zpočátku není průběh napětí na kondenzátoru sinusový, po odeznění tzv. přechodného děje se ovšem stane sinusovým, se stejnou frekvencí, jako má zdroj napětí a obecnou amplitudou a fázovým posunem.

Počáteční přechodný děj je vyvolán počátečními hodnotami, v některých případech lze volit takové, že přechodný děj nenastává, případně alespoň není výrazný, což se někdy využívá k omezení zapínacích proudů v případě spínání velkých spotřebičů.

11.2 Malé shrnutí

Harmonickým nazýváme stav proto, že všechny průběhy lze vyjádřit jako lineární kombinace funkcí sinus a kosinus, což jsou takzvané harmonické funkce; lineární kombinaci funkcí sinus a kosinus můžeme ovšem vyjádřit pomocí vhodně fázově posunuté harmonické funkce s vhodnou amplitudou.

Je-li frekvence uvažovaného průběhu $f(Hz)$, perioda je $T = \frac{1}{f}(s)$.

Jednotkou frekvence je hertz (čti „herc“). Veličině $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T}$ říkáme kruhová frekvence.

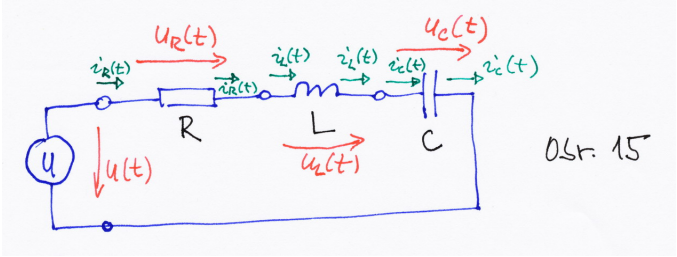
Perioda funkcí sinus a kosinus je $2 \cdot \pi$, takže funkce

$$\sin(\omega \cdot t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T})$$

má skutečně periodu T: pro $t = T$ má argument hodnotu $2 \cdot \pi \cdot \frac{t=T}{T} = 2 \cdot \pi$.

Je-li například časový průběh napětí popsán vztahem

$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad U_M \geq 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi\rangle,$$



Obrázek 11.1:

říkáme, že má amplitudu U_M a fázi (fázový posun) φ. Perioda, frekvence, kruhová frekvence, amplituda a fáze jsou reálná čísla, přičemž z podstaty vztahu mezi periodou a frekvencí a obvyklým chápáním harmonických funkcí přijmeme navíc pro účely ČAO omezení:

$$f > 0Hz, f \neq \infty Hz$$
$$\implies T > 0s, T \neq \infty s, \quad \omega > 0s^{-1}, \omega \neq \infty s^{-1}.$$

I když je nám to jasné, není špatné si pohrát s `Manipulate` v `CAORLCNDSolveaHUS.nb` a osvěžit si vliv amplitudy a fáze.

Souvislost fázově posunuté funkce sinus s vyjádřením pomocí sinu a kosinu s nulovým fázovým posunem plyne ze známého vzorečku:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \implies$$
$$\implies U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = U_M \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\omega \cdot t) + U_M \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Více o harmonických funkcích naleznete například zde.

11.3 Význam harmonických funkcí

Proč nás harmonické funkce tolik zajímají? Zatím řešíme lineární obvody a harmonické funkce mají výsadní postavení právě jen v případě lineárních obvodů.

Hlavní důvod je v tom, že derivace harmonické funkce o frekvenci ω je harmonická funkce o frekvenci ω, obecně může mít jinou amplitudu a fázový posuv, ale to jsou vlastně detaily: tvar jejího průběhu se nijak (zásadně) nezměnil.

Harmonické funkce nás také zajímají proto, že jsou „informačně úsporné“: podíváte-li se v `CAORLCNDSolveaHUS.nb` na `FullForm[res]`, dostanete odpověď „výstup je příliš rozsáhlý“.

Numerickou metodou bylo získáno poměrně hodně bodů, tolik, aby nám dobře popsaly řešené průběhy.

Pokud víme, nebo věříme, že výsledkem je harmonická funkce o zadané frekvenci ω, stačí nám k jejímu úplnému určení dvě čísla: amplituda U_M a fáze φ.

Podobně hledání harmonických funkcí, které jsou řešením obvodu, bude jednodušší, než hledání obecných průběhů, například namísto NDSolve budeme používat Solve.

V notebooku `CAORLCNDSolveaHUS.nb` je ukázka nalezení řešení „hrubou silou“ (a bez znalosti dalšího teoretického aparátu), kdy do obvodových rovnic dosadíme za hledaný proud a napětí harmonické funkce s neznámou amplitudou a fází. Každou rovnici nahradíme druhou mocninou rozdílu pravé a levé strany: druhá mocnina má v oboru reálných čísel minimum v nule, když tedy výsledné kvadráty rozdílů příslušných pravých a levých stran sečteme a vyčíslíme pro větší množství hodnot

nezávislých časů a najdeme minimum blízké nule, jsme dostatečně blízko cíle. Berte tento postup jako ukázku, že problémy lze často řešit více způsoby a koneckonců záleží na výsledku. Pokud vám někdo říká, že jen jedna cesta k řešení je správná, velmi pravděpodobně v případě elektrických obvodů nemá pravdu.

11.4 Řešení HUS pomocí komplexních čísel

Řešení „hrubou silou“ ovšem vyžaduje dostatečně mocný nástroj a pro složitější obvody také výrazně delší výpočetní čas. Naučíme se tedy obvyklým metodám řešení HUS, využívajících vlastností komplexních čísel a řešení soustav lineárních rovnic. Znalost základních pravidel počítání s komplexními čísly předpokládáme, imaginární jednotku budeme pro lepší odlišení od označení proudů značit — na rozdíl od matematiků — j a platí $j^2 == -1$.

Je-li $z = a + j \cdot b$, pro $a, b \in \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ je označení množiny reálných čísel, pak *imaginární část* komplexního čísla z je $\mathrm{Im}(z) = b$ a *reálná část* komplexního čísla z je $\mathrm{Re}(z) = a$. Pro *absolutní hodnotu* (též zvanou modul, velikost) platí

$$\mathrm{Abs}(z) = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Množinu komplexních čísel budeme značit $\mathbb{C}$.

Pro komplexní čísla platí slavný *Eulerův vztah*, který si zaslouží očíslovat:

$$\forall \psi \in \mathbb{R}: \quad e^{j \cdot \psi} == \cos(\psi) + j \cdot \sin(\psi) \tag{11.1}$$

Poznamenejme, že tento vztah platí pouze pro ψ „brané v radiánech“. Ostatně na počítání „ve stupních“ je dobré na vysoké škole zapomenout. V dalším textu všechny veličiny, které mohou mít v nějakém smyslu význam úhlu, budou mít jednotku radián.

Ze vztahu 11.1 vidíme, že platí

$$\sin(\psi) == \mathrm{Im}(e^{j \cdot \psi}) \tag{11.2}$$

Pro funkci „imaginární část“, tedy zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{R}$, ovšem platí:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}: \quad \mathrm{Im}(\alpha \cdot z) = \alpha \cdot \mathrm{Im}(z) \tag{11.3}$$

A tedy položíme-li $\psi \to \omega \cdot t + \varphi$, $\alpha \to U_M$, obdržíme vyjádření obecného harmonického průběhu:

$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) == \mathrm{Im}\left(U_M \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}\right) \tag{11.4}$$

Podle vět o počítání s mocninami ale platí $e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} == e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{j \cdot \varphi}$ a můžeme tedy přepsat rovnost 11.4 jako:

$$\begin{aligned} u(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) &== \mathrm{Im}\left(U_M \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right) \\ &== \mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right) \end{aligned} \tag{11.5}$$

Přijali jsme přitom označení

$$\hat{U}_M = U_M \cdot e^{j \cdot \varphi} \tag{11.6}$$

11.5 Fázory

`[Jehnere, rozhodni se, jake chces pouzivat znaceni:` $\hat{U}_M$`,` $\widehat{U}_M$`,` $\widehat{U_M}$`]`

Veličině $\hat{U}_M$ budeme říkat „fázor v měřítku maximálních hodnot“: jelikož jsme se omezili na $U_M \geq 0$, může funkce $u(t)$ podle 11.4 nabývat hodnot jen $u(t) \in \langle -U_M, U_M \rangle$, U_M je tedy maximální hodnotou funkce $u(t)$.

Proč „fázor“? Omezíme-li se na hodnoty $U_M \geq 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$, obsahuje komplexní číslo $U_M = U_M \cdot e^{j\cdot\varphi}$ jednoznačnou informaci nejen o maximální hodnotě U_M, ale i o fázi φ.

Omezení $U_M \geq 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$ volíme z pohodlnosti, neboť získáváme jednoznačný vztah mezi fázorem (tedy komplexním číslem) a analytickým vyjádřením průběhu $u(t)$ podle 11.4. Jelikož ve fyzikálně zjistitelných důsledcích chování elektrického obvodu nejde o formální vyjádření časových průběhů proudů a napětí, ale o tyto průběhy, jsou vlastně požadavky $U_M \geq 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$ nadbytečné: změna $\varphi \to \varphi + 2k\pi$, k celé číslo, průběh nezmění a změnu $U_M \to -U_M$ lze kompenzovat změnou $\varphi \to \varphi + (2k+1)\pi$, k celé číslo. V dalším se uvedeného omezení ovšem budeme držet.

Z časového průběhu tedy získáme fázor snadno podle 11.6, vypočteme prostě $\hat{U}_M = U_M \cdot e^{j\cdot\varphi}$.

Z fázoru získáme časový průběh opět snadno, podle 11.5 vypočteme $u(t) = \mathrm{Im}(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t})$, což je pro zadané ω a $\hat{U}_M$ reálná funkce reálné proměnné a v Mathematice stačí o výpočet prostě požádat s tím, že imaginární část je funkce a tudíž musíme použít hranaté závorky.

Fázi získáme funkcí `Arg` a amplitudu funkcí `Abs`, tedy $\varphi = \mathrm{Arg}[\hat{U}_M]$, $U_M = \mathrm{Abs}[\hat{U}_M]$.

Druhý vztah plyne přímo z faktu, že

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \quad \mathrm{Abs}(z_1 \cdot z_2) == \mathrm{Abs}(z_1) \cdot \mathrm{Abs}(z_2)$$

a

$$\forall \psi \in \mathbb{R}: \quad \mathrm{Abs}(e^{j\cdot\psi}) == \sqrt{\cos(\psi)^2 + \sin(\psi)^2} == 1.$$

Některé vlastnosti funkce `Arg` jsou ukázány v `CAORLCNDSolveaHUS.nb`.

Musíme-li realizovat výpočet v nějakém prostředí, ve kterém nejsou v dostatečné míře implementovány operace s komplexními čísly, použijeme v 11.5 vztah 11.2 a násobení komplexních čísel si naprogramujeme.

Proč to všechno děláme? Všechny proudy a napětí v případě HUS budou vyjádřeny jako $v_i(t) = \mathrm{Im}(\hat{V}_i \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t})$. Uvidíme, že lze převést vztahy dané popisem obvodu diferenciálními rovnicemi na vztahy mezi hodnotami odporů rezistorů, kapacit kondenzátorů, indukčností cívek, fázorů $\hat{V}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ a výrazu $j \cdot \omega$. Tyto veličiny neobsahují čas a příslušné rovnice tedy nemohou být diferenciální, budou lineární a algebraické a tedy snadno řešitelné, při správně popsaném realizovatelném obvodu dokonce řešitelné *vždy* a *jednoznačně*. Zpět do světa časových průběhů se pak dostaneme snadno podle $v_i(t) = \mathrm{Im}(\hat{V}_i \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t})$.

11.6 Trocha důkazů ...

Upozorněme, že dále následující odvozování a dokazování není pro řešení obvodů potřebné a nebudeme jej při praktickém řešení používat, je uvedeno pro porozumění a úplnost a abychom odlišili vzdělání vysokoškolské od školy střední.

Poznamenejme ještě, že v odvozování jsme nikde nepoužili chápání $u(t)$ jako napětí: i nadále budeme při odvozování používat označení $u_1(t)$, $u_2(t)$, jako by šlo o napětí, výsledné vztahy ovšem

platí BUNO (=bez újmy na obecnosti) pro proudy a ostatně pro všechny harmonicky proměnné veličiny.

Dokážeme, že platí následující věta:

Věta 4. *Buďtež $u_1(t)$, $u_2(t)$ harmonické funkce definované vztahy*

$$u_1(t) = U_{M1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1),$$
$$u_2(t) = U_{M2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2).$$

Pak platí:

$$u_1(t) == u_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{U}_{M1} == \hat{U}_{M2}.$$

Důkaz: Přepíšeme vztahy podle příslušných definic a obdržíme:

a) Dokážeme, že

$$\hat{U}_{M1} == \hat{U}_{M2} \quad \Longrightarrow \quad u_1(t) == u_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Důkaz je triviální:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{M1} == \hat{U}_{M2}, \hat{U}_{M1} \stackrel{!}{=} \hat{U}_M, \hat{U}_{M2} \stackrel{!}{=} \hat{U}_M \implies \\ \implies u_1(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == \\ == u_2(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Dokážeme, že

$$u_1(t) == u_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \hat{U}_{M1} == \hat{U}_{M2}.$$

Zde bychom mohli použít omezení možných hodnot φ_1 a φ_1, jelikož ovšem stran měřitelných důsledků záleží na rovnosti průběhů $u_1(t)$ a $u_1(t)$ a nikoli na shodě jejich analytických vyjádření, nebylo by to nesprávné, ale trochu metodicky nefér. Přepišme předpoklad tvrzení b) podle definice:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left(U_{M1} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_1)}\right) == \mathrm{Im}\left(U_{M1} \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t}\right) == \\ == \mathrm{Im}\left((a_1 + j \cdot b_1) \cdot e^{j\omega t}\right) == \\ == \mathrm{Im}\left(U_{M2} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_2)}\right) == \mathrm{Im}\left(U_{M2} \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t}\right) == \\ == \mathrm{Im}\left((a_2 + j \cdot b_2) \cdot e^{j\omega t}\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tedy ovšem platí:

$$\mathrm{Im}\left((a_1 + j \cdot b_1) \cdot e^{j\omega t}\right) == \mathrm{Im}\left((a_2 + j \cdot b_2) \cdot e^{j\omega t}\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

kde ovšem všude $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

Ovšem pro $\omega > 0s^{-1}, \omega \neq \infty s^{-1} \quad \exists t_1 \in \mathbb{R} : e^{j\omega t_1} == 1$, pak ovšem platí

$$\mathrm{Im}\left((a_1 + j \cdot b_1) \cdot 1\right) == \mathrm{Im}\left((a_2 + j \cdot b_2) \cdot 1\right) \implies b_1 == b_2.$$

Ovšem rovněž pro $\omega > 0s^{-1}, \omega \neq \infty s^{-1} \quad \exists t_1 \in \mathbb{R} : e^{j\omega t_1} == j$, pak ovšem platí

$$\mathrm{Im}\left((a_1 + j \cdot b_1) \cdot j\right) == \mathrm{Im}\left((a_2 + j \cdot b_2) \cdot j\right) \implies a_1 == a_2.$$

Označíme-li ovšem $a = a_1 == a_2$ a $b = b_1 == b_2$, obdržíme po dosazení pravdivý výrok

$$\mathrm{Im}\left((a + j \cdot b) \cdot e^{j\omega t}\right) == \mathrm{Im}\left((a + j \cdot b) \cdot e^{j\omega t}\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dvě harmonické funkce se tedy rovnají $\forall t \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když se rovnají jim odpovídající fázory. □

Nyní už bude snadné odvodit *jednoduchá pravidla pro použití fázorů pro řešení elektrických obvodů pomocí fázorů*. Postupy a předpoklady použité v důkazu jsou ovšem limitujícími faktory použití fázorů. Ve skutečnosti můžeme „s rozumnou mírou nepřesnosti“ použít fázory i v jiných případech (například je-li změna parametrů použitých součástek podstatně pomalejší, než perioda harmonických funkcí); pak ovšem jen s patřičnou dávkou opatrnosti: mimo linearitu jistota obvykle mizí.

11.7 Vztahy mezi fázory proudu a napětí pro rezistory, cívky a kondenzátory

11.7.1 Rezistor

Pro napětí a proud na rezistoru (pro dříve zavedené orientace proudu a napětí, tedy napěťová šipka má stejný směr jako šipka proudová) platí Ohmův zákon, tedy je-li odpor rezistoru R, pak platí $u(t) == R \cdot i(t)$. Předpokládejme, že napětí a proud jsou harmonické funkce času a můžeme tedy psát:

$$u(t) == \mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\omega t}\right),$$
$$i(t) == \mathrm{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j\omega t}\right),$$

a Ohmův zákon má tedy tvar:

$$\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\omega t}\right) == R \cdot \mathrm{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j\omega t}\right).$$

Jelikož ovšem platí $\forall a \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C} : a \cdot \mathrm{Im}(z) == \mathrm{Im}(a \cdot z)$, můžeme „vtáhnout“ R do argumentu funkce `Im` a tedy $\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\omega t}\right) == \mathrm{Im}\left(R \cdot \hat{I}_M \cdot e^{j\omega t}\right)$, kde rovnost samozřejmě platí $\forall t \in \mathbb{R}$. Ve smyslu výše uvedeného důkazu tedy platí:

$$\hat{U}_M == R \cdot \hat{I}_M \tag{11.7}$$

Ohmův zákon platí tedy formálně shodně pro fázory i pro okamžité hodnoty proudů a napětí; je to způsobeno tím, že vztah mezi proudem a napětím na rezistoru neobsahuje derivace.

11.7.2 Cívka

Pro napětí a proud na cívce (pro dříve zavedené orientace proudu a napětí, tedy napěťová šipka má stejný směr jako šipka proudová) platí

$$u(t) == L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Předpokládejme harmonické průběhy a postupujme obdobně jako u rezistoru; obdržíme:

$$\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\omega t}\right) == L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j\omega t}\right).$$

Chápejme dále komplexní funkci jedné reálné proměnné, tedy zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jako takovou funkci, kterou lze zapsat pomocí dvou reálných funkcí g a h jedné reálné proměnné, tedy

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = g(t) + j \cdot h(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Existují-li derivace funkcí g a h, je zřejmě nejlogičtějším způsobem, jak chápat derivaci funkce f, vztah

$$f'(t) = g'(t) + j \cdot h'(t).$$

Položíme-li

$$f(t) = \hat{I}_M \cdot e^{j\omega t},$$

potom snadno vidíme, že platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left(f(t)\right) &== h(t), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\left(f(t)\right) &== h'(t) == \mathrm{Im}\left(f'(t)\right). \end{aligned}$$

S použitím také

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}: \quad a \cdot \mathrm{Im}(z) == \mathrm{Im}(a \cdot z),$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\omega t}\right) &== \mathrm{Im}\left(L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{I}_M \cdot e^{j\omega t}\right) \\ &== \mathrm{Im}\left(L \cdot \hat{I}_M \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j\omega t}\right), \end{aligned}$$

neboť fázor (každý, tedy i $\hat{I}_M$) je na čase nezávislý; koneckonců je to jeden z hlavních důvodů jeho zavedení. Provedeme derivaci a konečně získáme:

$$\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\omega t}\right) == \mathrm{Im}\left(L \cdot \hat{I}_M \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t}\right),$$

Zcela analogicky jako v případě rezistoru obdržíme:

$$\hat{U}_M == j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I}_M \tag{11.8}$$

11.7.3 Kondenzátor

Podceňovali bychom inteligenci čtenáře, kdybychom při odvozování uváděli všechny předpoklady; postup je zcela obdobný jako v případě cívky. Platí:

$$i(t) == C \cdot u'(t),$$

tedy

$$\mathrm{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j\omega t}\right) == C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\omega t}\right)$$

a konečně

$$\begin{aligned} \hat{I}_M &== j \cdot \omega \cdot C \cdot \hat{U}_M \\ \hat{U}_M &== \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I}_M \end{aligned} \tag{11.9}$$

11.8 Shrnutí vztahů, jednotky fázorů, pojem impedance, použití a řazení impedancí

V dalším vynecháme dolní index M, ostatně později, až se budeme zabývat výkony, uvidíme, že fázory nemusejí být jen „v měřítku maximálních hodnot“; změnu měřítka ovšem vždy budeme uvažovat

lineární a měřítko všech fázorů (a tedy každého fázoru proudu i napětí) musí být stejné. Změna měřítka tedy znamená násobení rovnic 11.7, 11.8 a 11.9 konstantou, v námi zkoumaných případech zřejmě nutně reálnou a kladnou; násobení takovou konstantou ovšem platnost rovnic nemění. Nechceme zabřednout do mnoha indexů a chceme odlišit případy odporu, cívky a kondenzátoru indexy R, L a C. Přehledně tedy:

$$\begin{aligned} \hat{U}_R &== R \cdot \hat{I}_R \\ \hat{U}_L &== j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I}_L \\ \hat{U}_C &== \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I}_C \end{aligned} \tag{11.10}$$

Vztahy 11.10 nám vždy dávají fázor napětí na příslušné součástce (budeme se opakovat, ale opět jen vždy pro orientaci napětí shodnou s orientací proudu) jako násobek fázoru proudu tekoucího příslušnou součástkou. Odpor zůstal odporem a jeho jednotkou je tedy stále ohm (Ω); ať již z jednotek indukčnosti a kapacity, nebo z faktu, že jednotka fázoru je shodná s jednotkou veličiny, jejíž harmonický časový průběh fázor popisuje, mají zřejmě výrazy $j \cdot \omega \cdot L$ a $\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$ také jednotku ohm (Ω). Neuškodí tedy chápat vztahy 11.10 jako Ohmův zákon pro harmonický ustálený stav.

Poznámka pro zvídavé čtenáře:
Jednotky a fyzikální rozměry (fyzikálním rozměrem jednotky rozumíme v tomto textu její vyjádření pomocí základních rozměrů SI, rozdíl mezi jednotkou a fyzikálním rozměrem je jen v tom, že si výraz vyjadřující jednotku, který často používáme, *pojmenujeme*, aby naše vyjadřování bylo stručnější: tak používáme N (newton) místo $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ a podobně) *jsou — pokud zkoumáme měřitelné veličiny z fyzikálního světa — důležité. Velmi důležité.* Koho by to zajímalo, ať si vyhledá pojmy jako „dimenzionální analýza“ a „fyzikální podobnost“. „Jak veliký je otvor“ musí mít jednotku a fyzikální rozměr, nicméně řešení problému „vejde se předmět do otvoru“ záleží na poměru velikosti otvoru a předmětu (ať již velikostí rozumíme cokoli). Fázory jsme zavedli podle vztahu $v_i(t) = \mathrm{Im}(\hat{V}_i \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t})$. Funkce $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ fyzikální rozměr měnit nemůže a imaginární jednotce nelze fyzikální rozměr smysluplně přiřadit, naopak popření zvoleného smyslu je obvykle elementární, není ani v metrech, ani v ampérech, kilogramech atd. Výraz $j \cdot \omega \cdot t$ je bezrozměrný (tj. má stejný rozměr jako číslo 1), rozměr kruhové frekvence a času se vyruší. Výraz $e^{j \cdot \omega \cdot t}$ je také bezrozměrný: číslu e nelze fyzikální rozměr smysluplně přiřadit také a tudíž jeho mocnině na bezrozměrný výraz také nikoli. Suma sumárum, fázor veličiny má shodný fyzikální rozměr jako veličina, kterou popisuje.

V harmonickém ustáleném stavu (a v jiných případech nikoli!) můžeme tedy zavést pojem *impedance* jako „to, čím musíme násobit fázor proudu, abychom získali fázor napětí“. Impedance má jednotku ohm (Ω).

Impedance na rozdíl od zvyklostí na některých vysokých školách a fakultách nebudeme odlišovat stříškou, tu si ponecháme pro fázory. Impedance je komplexní číslo s jednotku ohm (Ω): komplexní no a co. Rozdíl mezi reálným číslem a komplexním číslem je mnohem menší, než mezi číslem a fázorem.

Přepišme tedy 11.10 pomocí impedancí:

$$\begin{aligned} \hat{U}_R &== R \cdot \hat{I}_R == Z_R \cdot \hat{I}_R, & Z_R &= R \\ \hat{U}_L &== j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I}_L == Z_L \cdot \hat{I}_L, & Z_L &= j \cdot \omega \cdot L \\ \hat{U}_C &== \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I}_C == Z_C \cdot \hat{I}_C, & Z_C &= \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \end{aligned} \tag{11.11}$$

Kapitola 12

Použití fázorů pro řešení elektrických obvodů, řazení impedancí, přenos, decibely

12.1 Fázory a metoda uzlových napětí

Ukažme, že platí věta:

Věta 5. *Buďtež $i_1(t)$ a $i_2(t)$ dvě harmonické funkce (ve výše zmíněném smyslu) se stejnou kruhovou frekvencí ω, popsané fázory $\hat{I}_1$ a $\hat{I}_2$. Pak veličina $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$ je harmonická funkce se shodnou frekvencí ω popsaná fázorem $\hat{I}_3 = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$.*

Důkaz: Využijeme toho, že platí:

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: &\quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) == \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_1) \\ \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}: &\quad \mathrm{Im}(a_1 + j \cdot b_1) + \mathrm{Im}(a_2 + j \cdot b_2) == \\ &\quad == b_1 + b_2 == \mathrm{Im}(a_1 + j \cdot b_1 + a_2 + j \cdot b_2) \end{aligned}$$

Tedy můžeme psát:

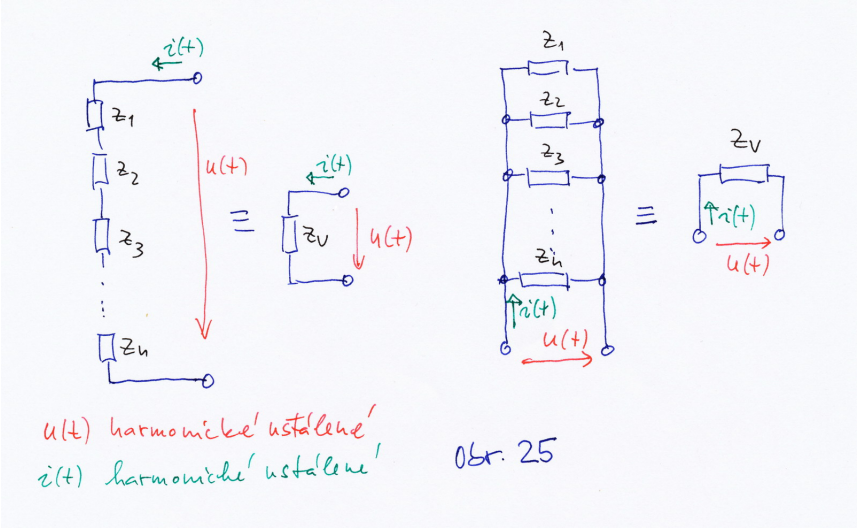
$$\begin{aligned} i_1(t) + i_2(t) &== \mathrm{Im}\left(\hat{I}_1 \cdot e^{j\omega t}\right) + \mathrm{Im}\left(\hat{I}_2 \cdot e^{j\omega t}\right) == \\ &== \mathrm{Im}\left(\hat{I}_1 \cdot e^{j\omega t} + \hat{I}_2 \cdot e^{j\omega t}\right) == \\ &== \mathrm{Im}\left(\left(\hat{I}_1 + \hat{I}_2\right) \cdot e^{j\omega t}\right) == \\ &== \mathrm{Im}\left(\hat{I}_3 \cdot e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

□

Pro konečný počet harmonických funkcí je důkaz zobecnění věty pro n veličin, tedy že součet n harmonických funkcí o shodné frekvenci je harmonická funkce popsaná fázorem, který je součtem fázorů popisujících tyto harmonické funkce jednoduchý (například matematickou indukcí) a ponecháme jej čtenáři coby cvičení.

Rovněž zřejmě platí:

Věta 6. *Buďtež $u_1(t)$ a $u_2(t)$ dvě harmonické funkce (ve výše zmíněném smyslu) se stejnou kruhovou frekvencí ω, popsané fázory $\hat{U}_1$ a $\hat{U}_2$. Pak veličina $u_3(t) = u_1(t) - u_2(t)$ je harmonická funkce se shodnou frekvencí ω popsaná fázorem $\hat{U}_3 = \hat{U}_1 - \hat{U}_2$.*



Obrázek 12.1:

Platí-li tedy, že součet proudů do uzlu vtékajících je roven součtu proudů z uzlu vytékajících, platí pro uvažované harmonické průběhy, že součet fázorů proudů do uzlu vtékajících je roven součtu fázorů proudů z uzlu vytékajících.

Platí-li, že je-li napětí n-tého uzlu vůči zvolenému vztažnému uzlu u_n a napětí m-tého uzlu vůči zvolenému vztažnému uzlu u_m, je $u_{n,m} = u_n - u_n$, platí též pro příslušné fázory $\hat{U}_{n,m} = \hat{U}_n - \hat{U}_m$.

Můžeme tedy shrnout použití metody uzlových napětí pro harmonický ustálený stav:

- Namísto napětí a proudů zdrojů píšeme příslušné fázory
- Namísto proudů v bilancích uzlů píšeme příslušné fázory proudů, vztahy pro proudy zůstávají formálně shodné
- Namísto napětí píšeme fázory napětí, vztahy pro napětí mezi uzly zůstávají formálně shodné
- Vztahy mezi fázory proudu a napětí na součástkách používáme podle rovnic 11.11
- Počáteční podmínky nemají vliv, nezajímají nás, nepíšeme je.

12.2 Sériové a paralelní řazení impedancí

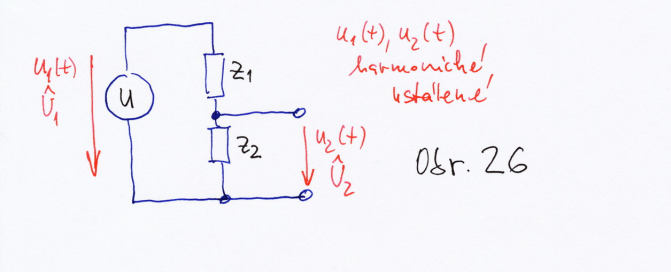
Při odvozování sériového a paralelního řazení rezistorů jsme nikde nepotřebovali fakt, že jejich odpory jsou kladná reálná čísla. Využili jsme metodu uzlových napětí a o ní nyní víme, že v ní můžeme v případě harmonického ustáleného stavu použít místo proudů a napětí jim odpovídající fázory formálně úplně stejně.

Celé odvození by platilo, kdybychom namísto R psali Z s jakýmkoli indexem.

Pro situaci podle Obr. 12.1 tedy platí:

Je-li sériově řazeno n impedancí $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_{n-1}, Z_n$, výsledná impedance je

$$Z_v = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{12.1}$$



Obrázek 12.2:

Je-li paralelně řazeno n impedancí $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_{n-1}, Z_n$, výsledná impedance je

$$Z_v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}} \tag{12.2}$$

Také vztah pro odporový dělič platí pro „impedanční“ dělič podle Obr. 12.2.

$$\hat{U}_2 == \hat{U}_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{12.3}$$

Jelikož vztahy mezi fázorem proudu a napětí 11.11 jsou formálně shodné nezávisle na tom, příslušíli impedance rezistoru, cívce nebo kondenzátoru, je zcela jedno, jestli ve vztazích 12.1, 12.2 a 12.3 jde o impedanci příslušející tomu či onomu prvku.

Pro obecné průběhy můžeme skládat v jeden prvek jen prvky stejného typu, při uvažování harmonického ustáleného stavu je můžeme skládat libovolně.

Poznámka:
V literatuře týkající se teorie elektrických obvodů se můžete setkat také s pojmem *admitance*, přičemž ovšem nejde o nic jiného, než o převrácenou hodnotu impedance, tedy

$$Y = \frac{1}{Z},$$

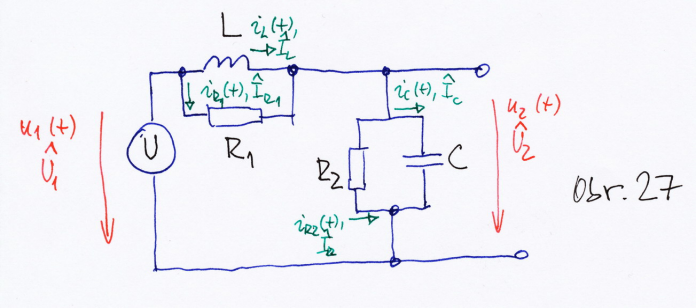
jednotkou admitance je Siemens, $S = \Omega^{-1}$, někdy též psaný jako „velké omega vzhůru nohama“, ℧, někde též „mho“, tedy pozpátku psaný ohm.
V případě rezistoru se říká převrácené hodnotě odporu *vodivost*, tedy $G = R^{-1}$ se stejnými jednotkami jako má admitance.
Vezmeme-li absolutní hodnotu impedance kondenzátoru či cívky, získáme tzv. induktivní či kapacitní *reaktanci*, tedy

$$X_L = \omega \cdot L, \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

s jednotkou stejnou jako impedance.
Převráceným hodnotám reaktancí se říká *susceptance*... Tyto pojmy snad usnadňují komunikaci mezi odborníky, nicméně pro další výstavbu teorie elektrických obvodů mají značnou *redundanci* ☺. Nepotřebujeme je a v tomto textu je nebudeme používat

12.2.1 Příklad

Některé možné postupy řešení obvodů si ukážeme, schéma obvodu je na Obr. 12.3 a řešení v notebooku `CAOukazkaHUS.nb`.



Obrázek 12.3:

První způsob řešení. Nejprve je v tomto notebooku ukázáno řešení „v časové oblasti“, tedy normální metodou uzlových napětí s uvažováním obecných průběhů. Příslušné rovnice jsou:

Rovnice jediného uzlu, kde není známo napětí, tedy uzlu 2:

$$i_{R1}(t) + i_L(t) == i_{R2}(t) + i_C(t)$$

Pro proudy platí rovnice součástek:

$$\begin{aligned} i_{R1}(t) &== \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_1} \\ u_1(t) - u_2(t) &== L \cdot i_L'(t) \\ i_{R2}(t) &== \frac{u_2(t)}{R_2} \\ i_C(t) &== C \cdot u_2'(t) \end{aligned}$$

A rovnice počátečních podmínek:

$$i_L(0) == 0A, \quad u_C(0) == 0V.$$

Tento systém umožňuje jednoznačné řešení a toto řešení je v notebooku ukázáno.

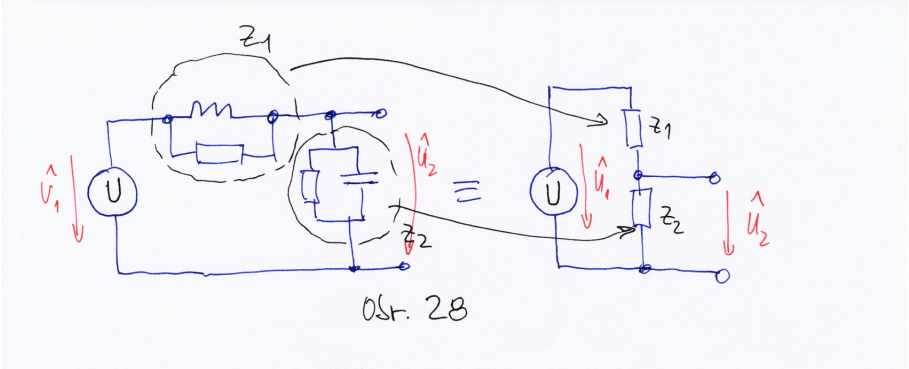
Druhý způsob řešení. V notebooku `CAOukazkaHUS.nb` je dále provedeno řešení metodou HUS tak, že mechanicky provedeme záměny:

$$\begin{aligned} i_L'(t) &\to j \cdot \omega \cdot \hat{I}_L, & u_2'(t) &\to j \cdot \omega \cdot \hat{U}_2, \\ i_{R1}(t) &\to \hat{I}_{R1}, & i_{R2}(t) &\to \hat{I}_{R2}, \\ a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) &\to a \cdot e^{j \cdot \varphi}, & u_2(t) &\to \hat{U}_2. \end{aligned}$$

Výsledná soustava algebraických rovnic je vyřešena a výsledné výstupní napětí je získáno z definičního vztahu „transformace do fázorů“, tedy

$$u_2(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{U}_2 \cdot e^{j\omega t}\right).$$

Touto ukázkou chceme připomenout, že metoda uzlových napětí jak byla uvedena ještě než se o fázorech začalo mluvit, je obecná a HUS lze pojmout i jako jen použitou transformaci jí získaných rovnic.



Obrázek 12.4:

Třetí způsob řešení. Mohli jsme ovšem napsat rovnice pro HUS bez mezistupně řešení „v časové oblasti“; jednoduše napíšeme bilanci proudů v uzlu s neznámým napětím s použitím vyjádření proudů z 11.11:

$$\frac{\hat{U}_1 - \hat{U}_2}{R_1} + \frac{\hat{U}_1 - \hat{U}_2}{j \cdot \omega \cdot L} == \frac{\hat{U}_2}{R_2} + \frac{\hat{U}_2}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}.$$

Řešením lze zjistit $\hat{U}_2$ a časový průběh opět podle $u_2(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{U}_2 \cdot e^{j\omega t}\right)$. Vidíme, že jsme velmi snadno získali shodný fázor napětí $\hat{U}_2$.

Čtvrtý způsob řešení. Další jednoduchý způsob si ukážeme, když použijeme pravidla řazení impedancí a překreslíme obvod podle Obr. 12.4. Vidíme, že můžeme určit fázor napětí $\hat{U}_2$ použitím vzorce pro „impedanční dělič“.

Pro paralelní řazení platí:

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L}}, \qquad Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}}}$$

$$\hat{U}_2 == \hat{U}_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Opět jsme dostali fázor $\hat{U}_2$ a snad čtenář uzná, že poměrně krátkou a jednoduchou cestou.

12.3 Přenos, decibely, proč vlastně HUS

Čtenář by mohl z výše uvedeného nabýt dojmu, že stejnosměrné obvody jsou snad k něčemu, za málo peněz hodně muziky, zjednodušení je značné a není k němu třeba takových vlastně nepřirozených abstrakcí jako jsou komplexní čísla, věty a důkazy.

Řešení HUS bylo sice jednodušší, ale informace dávalo o chování konkrétního obvodu mnohem méně: Řešení „v časové oblasti“ pro jakýkoli (v přírodě možný) vstup jako funkci času poskytne (až na problematičnost numerických metod a HW) poměrně jistou předpověď, jaký bude výstup jako funkce času, funkcí je ovšem mnohem víc, než harmonických funkcí (a je to aspoň o alef nula; pěkný výklad o velikosti nekonečen je zde), a tak ne až tak (když máme MATHEMATICU) velké zjednodušení drasticky zmenší množinu funkcí, na které je použitelné a samo o sobě explicitně neříká „po jakém čase je děj ustálený, kdy už můžeme řešení věřit“.

Vypadá to jako docela špatný obchod: za o něco méně peněz mnohem méně muziky.

Pokud víme o obvodech jenom z tohoto spisku, je takový názor oprávněný. Jenže není tomu tak.

Jde o rozdíl mezi výroky „každý kdo chce může pracovat“ a „všichni kdo chtějí mohou pracovat“ (ve smyslu být v placeném zaměstnaneckém poměru).

Je-li totiž v hypotetické zemi 10^5 nezaměstnaných a 10^4 volných pracovních míst, pak při veškeré snaze nemohou všichni pracovat. Prvních 10^4 nejsnaživějších zabere volná místa na trhu práce a pro zbytek již místo není.

Máme tři kuličky a dva otvory. Ve chvíli, kdy se ještě rozhoduje, může každá kulička být dána do otvoru. Všechny ovšem nikoli.

Navíc v analogii s kuličkami nastává problém, že kuliček a děr je velmi mnoho a možných kombinací jejich umístění ještě více.

Dokážeme vypočítat výstup a „podívat se na něj“ jen velmi málokrát za život člověka, množinu vstupů člověk nikdy neprozkoumá, neomezí-li se na nějaké úzké třídy. Lze to částečně obejít svěřením části práce počítači, ale pak mu musíme přesně říci, co nás na chování obvodu zajímá, jaká je účelová funkce.

HUS nám dává možnost najednou posoudit chování zadaného obvodu „z hlediska HUS“ pro obecné hodnoty rezistorů, kondenzátorů a cívek v obvodu a pro všechny v přírodě možné frekvence a fáze.

HUS nám poskytne v uzavřené algebraické podobě vztahy mezi vstupy, výstupy a parametry obvodu, pochopitelně jen mezi vstupy a výstupy povolenými konceptem HUS.

Uvidíme, že to byl nakonec velmi dobrý obchod. ☺

12.3.1 Přenos

Základní myšlenky ukážeme v notebooku `CAOPrenos.nb`, ve kterém budeme zkoumat obvod podle obrázků 12.3 a 12.4, ovšem hodnoty $R_1, R_2, C, L, \omega, \hat{U}_1$ a tedy nutně i $\hat{U}_2$ ponecháme typu Symbol, nedáme jim konkrétní číselnou hodnotu.

Mimochodem, obecné a konkrétní ve vztahu k typu Symbol a ostatním typům v Mathematice zaslouží zvláštní pozornosti.

V notebooku `CAOPrenos.nb` je použit impedanční dělič. Získali jsme výstupní (neznámé) napětí —- ovšem jako fázor — $\hat{U}_2$ jako výraz upravitelný do tvaru

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \cdot P(R_1, R_2, L, C, \omega) \implies \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = P(R_1, R_2, L, C, \omega) \tag{12.4}$$

Poměr dvou napětí v obvodu jsme vyjádřili jako funkci kapacit, indukčností a odporů v obvodu a kruhové frekvenci ω. $P(R_1, R_2, L, C, \omega)$ je obecně racionální lomená funkce svých parametrů (pro řešitelný smysluplný obvod).

Výrazu $P(R_1, R_2, L, C, \omega)$ říkáme přenos a původ je ve smyslu „jak se přenese vstup na výstup“, pochopitelně ve smyslu HUS.

Poznámka:
Někteří teoretici jako parametr přenosu P uvádějí namísto ω výraz $j \cdot \omega$. Z didaktického hlediska je to správné v tom smyslu, že jelikož jsou hodnoty odporů, kapacit a indukčností nezáporné, bude koeficient u ω^{2+4k} pro celé k záporný. Na druhou stranu z matematického a Mathematického hlediska je přenos P mnohem více funkcí parametru ω než $j \cdot \omega$. Ale naprogramovat by to tak šlo ☺.

Racionální lomená funkce je i intuitivně myšlenkově uchopitelná, její průběh lze vyšetřit.

Je-li stupeň jmenovatele vyšší, než v čitatele, limita přenosu pro $\omega \to \infty$ je nula, hodně vysoké kmitočty se budou přenášet málo.

Získali jsme velmi mnoho, můžeme nastavovat hodnoty, aby přenos měl zvolené hodnoty (v jistých mezích) pro zvolené hodnoty ω. Při použití řešení „v časové oblasti“ bychom museli postupovat metodou „pokus omyl“, nebo nějakou optimalizační metodou... ale to je vlastně sofistikovaná metoda „pokus omyl“. Řešením soustavy lineárních rovnic (což je úloha řešitelná v konečném počtu kroků) jsme získali úplnou informaci, a to v konečném tvaru o chování obvodu v rámci HUS.

Pro konkrétní hodnoty součástek (v našem případě R_1, R_2, L, C) můžeme vyčíslit $P(R_1, R_2, ...L_1, L_2, ...C_1, C_2, ..., \omega) = P(\omega)$. Jinými slovy řečeno, po dosazení hodnot součástek získáme přenos jako funkci jednoho parametru, a sice ω. Graficky můžeme vynést závislost

$$\mathrm{Abs}\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right) = \mathrm{Abs}\left(P\left(\omega\right)\right).$$

12.3.2 Logaritmické vs. lineární měřítko

Tato závislost je v `CAOPrenos.nb` zobrazena, a to jednou v dvojitém logaritmickém měřítku a jednou v lineárním měřítku.

Podívejme se, jakou má pro nás vypovídací hodnotu první a druhý graf.

Grafy jsou velmi odlišné; abychom přišli na kloub této odlišnosti, musíme si nejprve uvědomit rozdíl mezi *rozdíly* a *poměry*.

Informace, že někdo přišel o milión korun, sama o sobě nevypovídá nic o tom, co ta ztráta pro něj znamená. Pro pokladní v supermarketu pravděpodobně mnohem více, než pro stát nebo Billa Gatese.

Nicméně ztrátu *poloviny* svého majetku budou vnímat již podstatně podobněji.

V hudbě znamená „o oktávu výše“ to, že se například vinylová deska točí dvakrát rychleji a interval $\langle 110Hz, 220Hz\rangle$ se změní v interval $\langle 220Hz, 440Hz\rangle$. Druhý interval je ovšem dvakrát delší!

Logaritmické měřítko zohledňuje to, co je pro nás (koho to zajímá, googlete Buckinghamův teorém) důležité, tedy podíly.

Podle vět o logaritmech platí:

$$\log(a \cdot b) == \log(a) + \log(b)$$

V logaritmickém měřítku znamenají rozdíly délek na osách (tedy rozdíly logaritmů veličin na osách) podíly hodnot veličin.

Ještě jednou, protože pochopení důležitosti poměrů *je důležité*: dostane-li malý dům o tunu uhlí méně, je to větší újma na tepelné pohodě, než dostane-li velký dům o tunu uhlí méně. Dostane-li jeden byt o 10% uhlí méně, je to při spravedlivém rozdělování tepla stejné, jako dostane-li výtopna pro 100 bytů o 10% uhlí méně.

V neposlední míře je v případě slyšitelných kmitočtů pocit posluchače mnohem bližší logaritmickému grafu: výšku tónu vnímá podle logaritmu frekvence a hlasitost přibližně také.

12.3.3 Decibely

Pro vyjádření poměrů veličin nám předkové vynalezli *decibely*, které značíme dB.

Docela pěkně je to popsáno zde.

Poměr $\frac{A}{B}$ vyjádřený v decibelech je $20 \cdot \log\left(\frac{A}{B}\right)$.

Funkcí log rozumíme logaritmus při základu 10, tedy tzv. dekadický logaritmus.

Příklad:
Útlum kabelu je $5dB$, jaké je napětí na výstupu, je-li na vstupu $50mV$?
Řešení je v notebooku `CAOPrenos.nb`.
Útlum znamená, že je výstupní napětí *o pět dB menší*. Je tedy

$$20 \cdot \log\left(\frac{u_2}{u_1}\right) == -5,$$
$$20 \cdot \log\left(\frac{u_2}{50 \cdot 10^{-3}}\right) == -5 \implies u_2 \doteq 28mV.$$

Udávat útlum v decibelech je dobré: zapojíme-li kabely sériově a jeden má útlum p_1 a druhý útlum p_2, má jejich sériová kombinace (pokud nedělá nějaké problémy jejich spojení) útlum $p_1 + p_2$.

$$20 \cdot \log\left(\frac{u_1}{u_2}\right) == -p_1, \quad 20 \cdot \log\left(\frac{u_2}{u_3}\right) == -p_2 \implies$$
$$20 \cdot \log\left(\frac{u_1}{u_2}\right) + 20 \cdot \log\left(\frac{u_2}{u_3}\right) == -p_1 - p_2 \implies$$
$$20 \cdot \left(\log\left(\frac{u_1}{u_2}\right) + \log\left(\frac{u_2}{u_3}\right)\right) == -p_1 - p_2 \implies$$
$$20 \cdot \log\left(\frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_3}\right) == -p_1 - p_2 \implies$$
$$20 \cdot \log\left(\frac{u_1}{u_3}\right) == -p_1 - p_2 == -(p_1 + p_2)$$

Útlum $5dB$ znamená vlastně „o pět decibelů menší než jedna“.

Příklad:
Zkusme vyřešit úlohu: „pro jakou ω je absolutní hodnota přenosu obvodu z Obr. 12.3 rovna minus $15dB$“?
Přenos je již sám poměrem, absolutní hodnota poměru je poměr absolutních hodnot, v našem případě výstupního a vstupního napětí, tedy musíme řešit rovnici:

```
20 Log[10, Abs[[P[R1, R2, L, C, ω] /.
    {R1->10, R2->10, L->10^-3, C->10^-6}]]] == -15
```

Řešení je v notebooku `CAOPrenos.nb` a odpověď je „pro $\omega \doteq 85406.2s^{-1}$“.
Úroveň $-15dB$ je také znázorněna v grafech vodorovnou čarou: tak který se vám zdá srozumitelnější, co? ☺

Uvedli jsme výše, že přenos je racionální lomená funkce svých parametrů; zadáme-li hodnoty součástek a zbude-li jako nezávisle proměnná jen kruhová frekvence ω, bude přenos racionální lomenou funkcí ω. Zkoumejme chování absolutní hodnoty přenosu při velkých hodnotách ω.

Budiž absolutní hodnota přenosu vyjádřitelná ve tvaru:

$$\mathrm{Abs}\left(P\left(\omega\right)\right) = \frac{a \cdot \omega^n}{b \cdot \omega^m}.$$

Zkoumejme poměr

$$\begin{aligned}
20 \cdot \log\left(\frac{\mathrm{Abs}\left(P(\omega_1)\right)}{\mathrm{Abs}\left(P(\omega_2)\right)}\right) &== 20 \cdot \log\left(\frac{\frac{a \cdot \omega_1^n}{b \cdot \omega_1^m}}{\frac{a \cdot \omega_2^n}{b \cdot \omega_2^m}}\right) == \\
&== 20 \cdot \log\left(\frac{\omega_1^n \cdot \omega_2^m}{\omega_1^m \cdot \omega_2^n}\right) == \\
&== 20 \cdot \log\left(\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^n \cdot \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^m\right) == \\
&== 20 \cdot \left(n \cdot \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) + m \cdot \log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right) == \\
&== 20 \cdot \left(n \cdot \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) - m \cdot \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\right) == \\
&== 20 \cdot (n - m) \cdot \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)
\end{aligned}$$

Je-li tedy $\frac{\omega_1}{\omega_2} == 10$, je poměr absolutních hodnot přenosů $20dB$ a podobně.

Mluvíme tedy například o „poklesu 20 dB na dekádu“, čímž míníme $n-m == 1$ a poměr kmitočtů $\frac{\omega_1}{\omega_2} == 10$ a podobně. Pro $\frac{\omega_1}{\omega_2} == 2$ dostáváme pro $n - m == 1$: $20 \cdot \log(2) \doteq 6.0206$ a mluvíme o „šesti decibelech na oktávu“, kde oktávu bereme z teorie hudby, kde o oktávu vyšší tón má dvakrát větší frekvenci a tedy i ω.

Kapitola 13

Rezonanční obvody, rezonance

Uvažme obvod podle Obr. 13.1

V notebooku `CAORezonance.nb` je vyřešen tento obvod pro harmonické vstupní napětí U_1 a je vyjádřeno výstupní napětí — jako impedanční dělič —-

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \cdot \frac{Z_{2par}}{Z_1 + Z_{2par}},$$

kde $Z_1 = R_1$ a

$$Z_{2par} = \frac{1}{\frac{1}{R_2 + j \cdot \omega \cdot L} + \frac{1}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}},$$

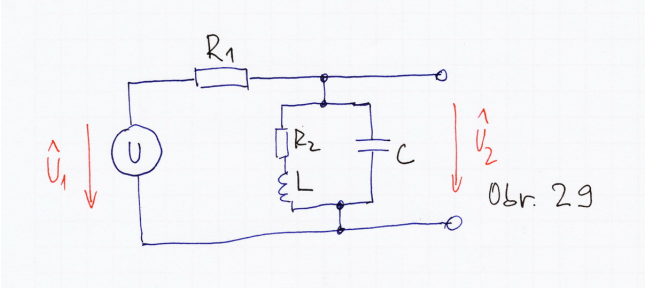
tady paralelní kombinace impedance kondenzátoru a impedance sériové kombinace rezistoru a cívky. Přenos tedy můžeme vyjádřit jako

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{Z_{2par}}{Z_1 + Z_{2par}}.$$

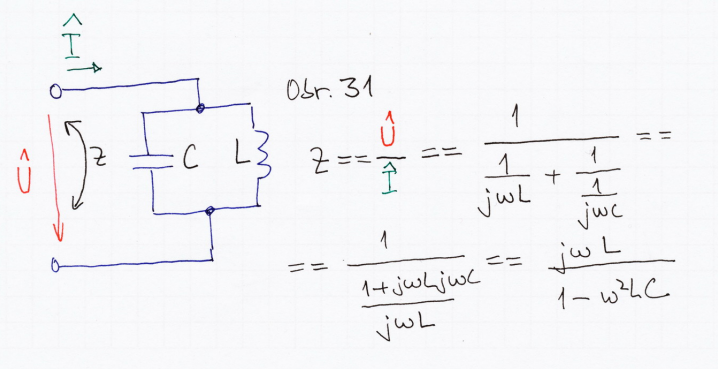
V notebooku `CAORezonance.nb` je pomocí příkazu Manipulate ukázána situace, kdy indukčnost L a kapacita C jsou pevné a odpory R_1 a R_2 jsou proměnné.

Na průbězích si nejprve všimněme, že zvláště pro velké hodnoty R_1 a malé hodnoty R_2 vykazuje absolutní hodnota přenosu výrazné maximum: obvod „přenáší“ jednu frekvenci „výrazně raději“ (měřítko prvního grafu je logaritmické!) než frekvence ostatní.

Matematicky se podíváme jen na dva idealizované případy: „ideální kondenzátor a cívka paralelně“ a „ideální kondenzátor a cívka sériově“.



Obrázek 13.1:



Obrázek 13.2:

13.1 Paralelní rezonanční obvod

Schématu podle Obr. 13.1 více odpovídá situace „ideální kondenzátor a cívka paralelně“, podle Obr. 13.2, začněme tedy s ní a vyjádřeme impedanci:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\frac{1}{j\cdot\omega\cdot L}+\frac{1}{\frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}}} == \frac{1}{\frac{1}{j\cdot\omega\cdot L}+j\cdot\omega\cdot C} == \\ &\frac{1}{\frac{1+j\cdot\omega\cdot C\cdot j\cdot\omega\cdot L}{j\cdot\omega\cdot L}} == \frac{j\cdot\omega\cdot L}{1+j\cdot\omega\cdot C\cdot j\cdot\omega\cdot L} == \\ &== \frac{j\cdot\omega\cdot L}{1+j^2\cdot\omega^2\cdot C\cdot L} == \frac{j\cdot\omega\cdot L}{1-\omega^2\cdot L\cdot C} \end{aligned} \tag{13.1}$$

Poslední výraz je zajímavý proto, že existuje

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\cdot C}},$$

pro který není impedance definovaná, dokonce nemá ani limitu, neboť

$$\lim_{\omega\to\omega_0^+} \frac{j\cdot\omega\cdot L}{1-\omega^2\cdot L\cdot C} == -j\cdot\infty$$

a

$$\lim_{\omega\to\omega_0^-} \frac{j\cdot\omega\cdot L}{1-\omega^2\cdot L\cdot C} == j\cdot\infty.$$

Jsme-li od ω_0 „vlevo“, je imaginární část impedance kladná (jako u cívky). Jsme-li od ω_0 „vpravo“, je imaginární část impedance záporná, jako u kondenzátoru.

Poznámka:
Imaginární část impedance kondenzátoru je záporná, neboť

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\left(\frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}\right) == \mathrm{Im}\left(\frac{1}{j}\right)\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\omega\cdot C}\right) ==\\ &== \mathrm{Im}\left(\frac{-j^2}{j}\right)\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\omega\cdot C}\right) == \mathrm{Im}\left(\frac{-j^2}{j}\right)\cdot\frac{1}{\omega\cdot C}\\ &== \mathrm{Im}\left(\frac{-j}{1}\right)\cdot\frac{1}{\omega\cdot C} == -\frac{1}{\omega\cdot C}.\end{aligned}$$

Nicméně existuje

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\mathrm{Abs}\left(\frac{j\cdot\omega\cdot L}{1-\omega^2\cdot L\cdot C}\right) == \infty$$

a protože $Z=\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$, pak ovšem také existuje

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to\omega_0}\mathrm{Abs}\left(\frac{\hat{U}}{\hat{I}}\right) &== \lim_{\omega\to\omega_0}\mathrm{Abs}\left(Z\right) ==\\ &== \lim_{\omega\to\omega_0}\mathrm{Abs}\left(\frac{j\cdot\omega\cdot L}{1-\omega^2\cdot L\cdot C}\right) == \infty.\end{aligned}$$

Má-li v reálném obvodu $\mathrm{Abs}(\hat{U})$ konečnou hodnotu, pak tedy musí platit $\lim_{\omega\to\omega_0}\mathrm{Abs}\left(\hat{I}\right) == 0$. Paralelní kombinací kondenzátoru a cívky při napájení zdrojem napětí o tzv. rezonanční kruhové frekvenci ω_0 tedy teče nulový proud, chová se tedy, jako by tam nebyla, pro nižší frekvence se chová jako cívka, pro vyšší jako kondenzátor.

Pro jistotu připomeneme, že vše, co se týká přenosů a impedancí, platí v tomto spisku pro harmonický ustálený stav a nikde jinde.

Z grafů v notebooku je vidět, že takový obvod může být vhodný, pokud nás zajímají frekvence blízko ω_0 a jiné méně: pokud váš malý bratříček obvykle křičí o pomoc kolem $440Hz$, sestrojíte si obvod podle Obr. 13.1, zvolíte hodnoty R_1 a R_2 velké tak, aby měl přenos výrazné maximum, zvolíte hodnoty L a C tak, aby platilo

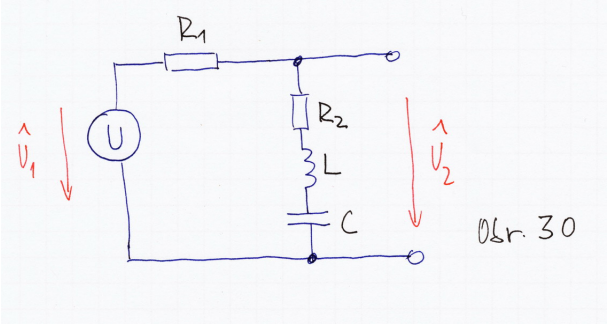
$$\frac{1}{\sqrt{L\cdot C}} == 2\cdot\pi\cdot 440$$

a vřadíte tento obvod mezi mikrofon a vaši zvukovou kartu. Křik dětí, které křičí na jiné frekvenci, než komorní A vašeho bratříčka (pozn.: komorní A má frekvenci $440Hz$...), bude potlačen a nebude vás tolik rušit, křik bratříčka bude podstatně hlasitější.

Jasně, tenhle příklad je hooodně divný, ale snad názorný. Ale stejně jako hlas bratříčka si potřebujeme vybrat hlas našeho rádia z hluku elektromagnetických vln vysílání moře všech možných stanic a rušení. A k tomu se hodí a používají tzv. rezonanční obvody, například jako na Obr. 13.1 a 13.2. Ale také často mnohem mnohem chytřejší rezonanční obvody, ale na ty nemáme čas a prostor.

13.2 Sériový rezonanční obvod

V další části notebooku `CAORezonance.nb` je pomocí příkazu Manipulate ukázána situace, kdy indukčnost L a kapacita C jsou pevné a odpory R_1 a R_2 jsou proměnné ve schématu podle Obr. 13.3.



Obrázek 13.3:

Vidíme, že takto sestavený obvod „zadržuje“ některé frekvence, byl by dobrý, pokud bychom *nechtěli* bratříčka slyšet, nebo kdybychom se chtěli zbavit nějaké stanice, která ruší náš příjem.

Situace je obdobná uvažování situace „ideální kondenzátor a cívka sériově“. Pro impedanci platí:

$$Z = j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} == \frac{1 + j \cdot \omega \cdot L \cdot j \cdot \omega \cdot C}{j \cdot \omega \cdot C} == \\ == -j \cdot \frac{1 - \omega^2 \cdot L \cdot C}{\omega \cdot C}$$

Poslední výraz je zajímavý proto, že existuje

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}},$$

pro kterou je impedance nulová a pro kterou se tedy chová jako *zkrat*; pro frekvence menší se chová jako kondenzátor, pro větší jako cívka.

Pro jistotu připomeneme, že vše, co se týká přenosů a impedancí, platí v tomto spisku pro harmonický ustálený stav a nikde jinde.

Vlastnosti rezonančních obvodů jsou velmi zajímavé, navíc se dají použít i tzv. magneticky vázané obvody, o kterých se zmíníme později. Také je zajímavé, že potřebujeme přenášet vždy nějaký interval (říkáme mu pásmo) frekvencí: signál, který má frekvenci jen jednu, nese informace málo: o amplitudě, frekvenci a umíme-li ji měřit, i o fázi. Tři čísla, nic víc. Proto potřebujeme *pásma* frekvencí a naše rezonanční obvody musejí být chytré. Ale na to všechno nemáme čas.

Poznamenejme ještě, že oficiální definice rezonance v případě elektrických obvodů říká, že v rezonanci má impedance nulovou imaginární část. Jak to je s imaginární částí a přenosem si můžete prohlédnout v notebooku `CAORezonance.nb`.

Kapitola 14

Náhrada periodického průběhu pomocí lineární kombinace harmonických průběhů. Fourierovy „řady“ — řady v uvozovkách, protože u nás to řady nebudou

V notebooku `CAOFourier.nb` je ukázáno, jak můžeme přibližně nahradit periodickou obecně neharmonickou funkci součtem harmonických funkcí. Pokud byste nerozuměli některým Mathematickým příkazům (například `@@`, `/@`, `&`, apod.), pak se zkuste podívat do upraveného notebooku `CAOFourier-upr.nb`, kde jsou tyto zkratky nahrazeny funkcemi `Apply`, `Map`, apod.

14.1 Odvození

Zkoumejme výraz:

$$\begin{aligned} f^*(t) = a_0 &+ a_1 \cdot \cos\left(1 \cdot 2\pi\frac{t}{T}\right) + a_2 \cdot \cos\left(2 \cdot 2\pi\frac{t}{T}\right) + \dots \\ &\cdots + a_n \cdot \cos\left(n \cdot 2\pi\frac{t}{T}\right) + \\ &+ b_1 \cdot \sin\left(1 \cdot 2\pi\frac{t}{T}\right) + b_2 \cdot \sin\left(2 \cdot 2\pi\frac{t}{T}\right) + \dots \\ &\cdots + b_n \cdot \sin\left(n \cdot 2\pi\frac{t}{T}\right) == \\ &== a_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \cdot \cos\left(i \cdot 2\pi\frac{t}{T}\right) + b_i \cdot \sin\left(i \cdot 2\pi\frac{t}{T}\right)\right) \end{aligned} \tag{14.1}$$

O funkcích vyskytujících se v technické praxi, kdy tyto jsou výstupem nějakého systému, můžeme předpokládat, že jsou spojité; $f^*(t)$ je spojitá a T konečné kladné číslo. Matematická analýza nám říká, že existují určité integrály, tedy konečná čísla:

$$\int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \mathrm{d}t,$$

$$\int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \cos\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

$$\int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \sin\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Víme, že platí:

$$\begin{aligned}
&\forall i_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall T \in (0, \infty): \\
&\qquad \int_{t=0}^{T} \cos\left(i_1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t == 0 \\
&\forall i_1, i_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall T \in (0, \infty): \\
&\qquad \int_{t=0}^{T} \cos\left(i_1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \sin\left(i_2 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t == 0 \\
&\forall i_1, i_2 \in \mathbb{N}, i_1 \neq i_2, \quad \forall T \in (0, \infty): \\
&\qquad \int_{t=0}^{T} \cos\left(i_1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(i_2 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t == 0 \\
&\forall i_1, i_2 \in \mathbb{N}, i_1 = i_2, \quad \forall T \in (0, \infty): \\
&\qquad \int_{t=0}^{T} \cos\left(i_1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(i_2 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t == \frac{T}{2}.
\end{aligned} \tag{14.2}$$

A obdobně:

$$\begin{aligned}
&\forall i_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall T \in (0,\infty): \\
&\qquad \int_{t=0}^{T} \sin\left(i_1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t == 0 \\
&\forall i_1, i_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall T \in (0,\infty): \\
&\qquad \int_{t=0}^{T} \sin\left(i_1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(i_2 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t == 0 \\
&\forall i_1, i_2 \in \mathbb{N}, i_1 \neq i_2, \quad \forall T \in (0,\infty): \\
&\qquad \int_{t=0}^{T} \sin\left(i_1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \sin\left(i_2 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t == 0 \\
&\forall i_1, i_2 \in \mathbb{N}, i_1 = i_2, \quad \forall T \in (0,\infty): \\
&\qquad \int_{t=0}^{T} \sin\left(i_1 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \sin\left(i_2 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t == \frac{T}{2}.
\end{aligned} \tag{14.3}$$

Předpokládejme, že máme k dispozici číslo:

$$I_{a_0} = \int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \mathrm{d}t.$$

Pak ovšem s uvážením 14.2 a 14.3 platí:

$$\begin{aligned}
I_{a_0} = \int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \mathrm{d}t == \int_{t=0}^{T} a_0 \cdot \mathrm{d}t == a_0 \cdot T \implies \\
\implies a_0 == \frac{I_{a_0}}{T} == \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{14.4}$$

Dále, předpokládejme, že máme $\forall i \in \mathbb{N}$ k dispozici číslo:

$$I_{a_i} = \int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \cos\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t. \tag{14.5}$$

Pak ovšem s uvážením 14.2 a 14.3 platí:

$$\begin{aligned}
I_{a_k} &= \int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \cos\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int_{t=0}^{T} \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot \cos\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right)\right) + b_i \cdot \sin\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right)\right) \cdot \cos\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t = \\
&= a_k \cdot \frac{T}{2} \implies \\
&\implies a_k == \frac{2}{T} \cdot I_{a_k} = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \cos\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{14.6}$$

A obdobně, předpokládejme, že máme $\forall i \in \mathbb{N}$ k dispozici číslo:

$$I_{b_i} = \int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \sin\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t.$$

Pak ovšem s uvážením 14.2 a 14.3 platí:

$$\begin{aligned} I_{b_k} &= \int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \sin\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \int_{t=0}^{T} \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot \cos\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right)\right) + b_i \cdot \sin\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right)\right) \cdot \sin\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t = \\ &= b_k \cdot \frac{T}{2} \implies \\ &\implies b_k == \frac{2}{T} \cdot I_{b_k} = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^{T} f^*(t) \cdot \sin\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot \mathrm{d}t \quad (14.7) \end{aligned}$$

Prostě jsou integrály ze součinů nulové. Pokud nejsou nulové, pak je to proto, že buď v nich není žádný sinus ani kosinus, anebo je integrand převoditelný na

$$a_k \cdot \left(\cos\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right)\right)^2$$

nebo

$$b_k \cdot \left(\sin\left(k \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right)\right)^2.$$

Elementary, dear Watson ☺.

14.2 Shrnutí

Představme si, že máme pracovat s funkcí, o které víme akorát to, že byla zadána podle rovnice 14.1, tedy víme, že se jedná o $f^*(t)$. Bohužel, koeficienty a_k a b_k se ztratily. Naštěstí však známe průběh funkce, tedy známe funkční hodnotu $f^*(t)$ v každém bodě (což je samozřejmě utopie – těžko budeme znát funkční hodnotu v úplně každém bodě, protože těch bodů je nekonečně – na ose x je nekonečně bodů).

To, co jsme si popsali výše, je návod, jak ztracené koeficienty a_k a b_k zrekonstruovat: V první řadě zjistíme periodu T (například měřením) a poté již provedeme výpočty podle rovnic 14.4, 14.6 a 14.7 a obdržíme koeficienty a_0, a_k a b_k, $\forall k \in \langle 1, n \rangle$.

Tento postup má ale daleko větší význam. Umožňuje nám totiž *jakoukoliv* periodickou funkci $f(t)$ aproximovat pomocí součtu harmonických funkcí (tj. sinusovek a kosinusovek).

14.3 Přibližná náhrada jakékoliv periodické funkce součtem harmonických funkcí

Zatím jsme se zabývali jen funkcí $f^*(t)$; ve vyjádření funkční hodnoty této funkce pro konkrétní číselnou hodnotu t a T není (za předpokladu, že máme k dispozici hodnotu funkce sinus pro každou číselnou hodnotu jejího parametru) žádné nekonečno, hodnotu tedy získáme v konečném počtu kroků.

Předpokládejme dále, že pro $t \in \langle 0, T\rangle$ existuje n takové, že platí: $f(t) \approx f^*(t)$, kde přibližná rovnost znamená například, že odchylka mezi $f(t)$ a $f^*(t)$ je pro $t \in \langle 0, T\rangle$ pro nás akceptovatelná. Pak můžeme pro naše účely (například řešení elektrických obvodů ☺) nahradit funkci $f(t)$ funkcí $f^*(t)$.

14.4 Inženýrský vs. matematický přístup

Pokud by to, co jsme zde uvedli, četl „matematik však pravý, ač živý tu není, jak chápu jej v srdci, bych mohl naň ukázat prstem...“, asi by hodně nesouhlasil s naším pojetím „Fourierových řad“: jenže my se můžeme úspěšně hájit tím, že se Fourierovými řadami vůbec nezabýváme: naše n bylo vždy konečné, pracovali jsme s konečnými součty a korektním způsobem.

Neporozumění je v podstatě až paradigmatické: všechny problémy s funkčními řadami a stejnoměrnou konvergencí jsme schovali do tvrzení, že „odchylka mezi $f(t)$ a $f^*(t)$ je pro $t \in \langle 0, T\rangle$ pro nás akceptovatelná“. My totiž máme možnost podrobně experimentálně onu odchylku zkoumat, můžeme vyčíslovat funkce i na podintervalech z intervalu $\langle 0, T\rangle$, tisknout si grafy... pochopte, v jistém smyslu je možné snadněji uchopit myšlenkově výraz

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot \cos\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T} \right) + b_i \cdot \sin\left(i \cdot 2\pi \frac{t}{T} \right) \right)$$

pro $n = \infty$ než pro $n = 51$. Vyčíslení výrazů je pro $n = 51$ bez výpočetní techniky celoživotní úkol, pro $n = \infty$ jde chybu odhadnout extrémně chytrým trikem. Jenže takové triky nefungují obecně a nevíme, jak na ně přijít jinak než šťastnou náhodou, v ČAO na ně navíc nemáme dost času. A umíme docela dobře pracovat s výrazy pro $n = 51$.

14.5 Souvislost s fázory a HUS

A jak souvisejí siny a kosiny s fázory a obvody? To je jednoduché:

$$u_{b_k}(t) = b_k \cdot \sin(\omega_k \cdot t + 0) == \mathrm{Im}\left(b_k \cdot e^0 \cdot e^{j\omega_k t} \right),$$

tedy příslušný fázor je roven přímo b_k.

Ovšem pro každé x platí

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

a tedy zřejmě:

$$u_{a_k}(t) = a_k \cdot \cos(\omega_k \cdot t) == a_k \cdot \sin\left(\omega_k \cdot t + \frac{\pi}{2} \right) == \\ == \mathrm{Im}\left(a_k \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega_k t} \right).$$

Sečtením harmonických funkcí $u_{ak}(t)$ a $u_{bk}(t)$ o kruhových frekvencích ω_k obdržíme harmonickou funkci $u_k(t)$ o stejné kruhové frekvenci ω_k:

$$\begin{aligned} u_k(t) &== u_{b_k}(t) + u_{a_k}(t) == \\ &== \mathrm{Im}\left(b_k \cdot e^{j\omega_k t}\right) + \mathrm{Im}\left(a_k \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega_k t}\right) == \\ &== \mathrm{Im}\left(b_k \cdot e^{j\omega_k t}\right) + \mathrm{Im}\left(a_k \cdot j \cdot e^{j\omega_k t}\right) == \\ &== \mathrm{Im}\left((b_k + j \cdot a_k) \cdot e^{j\omega_k t}\right) \end{aligned}$$

Fázor odpovídající kruhové frekvenci ω_k je tedy roven $b_k + j \cdot a_k$ (věty o součtech, rovnostech fázorů atd.).

Sečtením cosinusovky a sinusovky o kruhových frekvencích ω_k obdržíme fázově posunutou sinusovku o stejné kruhové frekvenci. Jinak řečeno, pro harmonickou funkci o kruhové frekvenci ω_k musíme znát 2 čísla,

- buď její amplitudu a fázový posun,
- nebo koeficienty a_k a b_k, což jsou amplitudy (fázově neposunuté) cosinusovky a sinusovky, z nichž se tato harmonická funkce složí.

Připomeňme, že amplituda výsledné harmonické je rovna

$$\mathrm{Abs}\left(b_k + j \cdot a_k\right) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

a její fázový posun je roven

$$\mathrm{Arg}\left(b_k + j \cdot a_k\right)$$

Co z toho plyne: Pokud máme analyzovat obvod, v němž zdroj napětí nebo proudu má periodický průběh $f(t)$, potom nemusíme používat NDSolve. V tomto případě můžeme průběh $f(t)$ rozložit na jednotlivé harmonické a analyzovat odezvu obvodu pro každou harmonickou zvlášť (na sobě nezávisle). Jak víme, s výhodou můžeme použít aparát komplexních čísel. Pro každou harmonickou tedy obdržíme dílčí výsledek a jejich sečtením obdržíme odezvu obvodu na $f(t)$.

Tento postup je demonstrován v notebooku `CAOFourier+HUS-upr.nb`.

14.6 Příklady použití

Převod do Fourierových řad a podobné techniky nalézají uplatnění při zpracování signálů. Signálem přitom může být elektromagnetická vlna, zvuk nebo obrazová informace. Mohlo by se na první pohled zdát, že výše uvedené postupy jsou užitečné pouze v analogové (spojité) technice, ale není tomu tak. Byly vyvinuty i modifikované postupy pro digitální signály.

Jak jistě víte, digitální technika nezpracovává spojité signály, ale signály diskrétní. Zvuk na CD je uložen ve formě vzorků, obraz je rozložen na jednotlivé obrazové body (pixely). Spojitý signál je proto zapotřebí před zpracováním navzorkovat (angl. sampling). Pokud bychom navzorkovali například černobílý obrázek, potom hodnota každého vzorku (pixelu) bude znamenat jas vzorku (čím světlejší, tím vyšší hodnota a naopak).

Navzorkovaný signál se často zpracovává některým z níže popsaných způsobů. S některými z nich se pravděpodobně potkáte.

14.6.1 Spektrální analýza

Budete-li se zabývat např. zpracováním signálů, ať už se jedná o audio signál nebo video signál (na FIT v rámci oborů zabývajících se multimédii nebo počítačovou grafikou), velmi pravděpodobně se potkáte s Diskrétní Fourierovou transformací, Discrete Fourier Transform (DFT) nebo její efektivní implementací, které se říká Rychlá Fourierova fransformace, Fast Fourier Transform (FFT).

DFT, resp. FFT je modifikací výše popsaného převodu do Fourierových řad, a to pro diskrétní signály. Zpracováním signálu pomocí DFT (FFT) dostaneme jeho spektrum, tedy informaci o frekvencích, které jsou v signálu zastoupeny. Spektrum znáte např. z jednoduchých spektrálních analyzátorů, které se montují na některé audiozesilovače, ukázku naleznete např. zde. ☺

14.6.2 Komprese obrazu a zvuku

`[Tohle je potřeba ještě předělat (ty obrázky, odkazy na ně atd.)]`

Pro (ztrátovou) kompresi zvukového nebo obrazového signálu se používá Diskrétní kosinová transformace, Discrete Cosine Transform (DCT), což je transformace příbuzná s DFT.

DCT se používá např. pro kompresi obrázků ve formátu JPEG a kompresi videí MJPEG, MPEG, DV, Theora. Modifikovaná diskrétní kosinová transformace se používá v audio formátech MP3, AC-3, Vorbis, WMA, ATRAC, Cook či AAC.

Funguje to zhruba takto: Ze signálu se vybere skupina vzorků. Průběh signálu ve skupině vzorků se aproximuje součtem kosinusovek. Do výstupního souboru se poté uloží koeficienty kosinusovek (zatímco ve vstupním souboru byly uloženy hodnoty vzorků). Čím více koeficientů kosinusovek uložíme, tím přesněji aproximujeme průběh signálu. Čím méně koeficientů uložíme, tím je komprese vyšší, ale aproximace je nepřesnější (proto se jedná o *ztrátovou* kompresi). Základní myšlenka komprese je demonstrována v notebooku `CAOFourier-komprese.nb`.

Např., ve formátu JPEG se obrázek rozděluje na čtverce 8x8 pixelů (více zde). Každý čtverec se poté aproximuje součtem dvourozměrných kosinusovek. A je to právě DCT, kdo může za to, že JPEG obrázky s ostrými hranami (tj. ostrými přechody z bílé do černé, neboli s prudkými změnami jasu) jsou "ušpiněné"- podél těchto hran jsou šedivé šmouhy, jak je vidět níže zejména na JPEG obrázku s nejnižší kvalitou. Totiž, jak jsme si ukázali v notebooku `CAOFourier.nb`, použijeme-li pro aproximaci málo harmonických funkcí, potom jejich součet okolo ostrých přechodů "zakmitává". Názorně si to můžete vyzkoušet v notebooku `CAOFourier-komprese.nb`, použijete-li sadu pixelů `vzorky2`.

Formát JPEG je proto vhodný pro ukládání fotografií, protože ty zpravidla neobsahují ostré přechody (a pokud ano, "ušpinění"se "ztratí"v okolí). Pro ukládání obrázků s ostrými hranami (např. grafy, elektrická nebo logická schémata, karikatury) se však nehodí, jak demonstrují ukázky níže. Pro takovéto typy obrázků proto raději používáme např. formát PNG, jehož algoritmus komprese je bezeztrátový. Shrnuto: Pro fotografie je vhodnější JPEG, pro grafiku je vhodnější PNG.

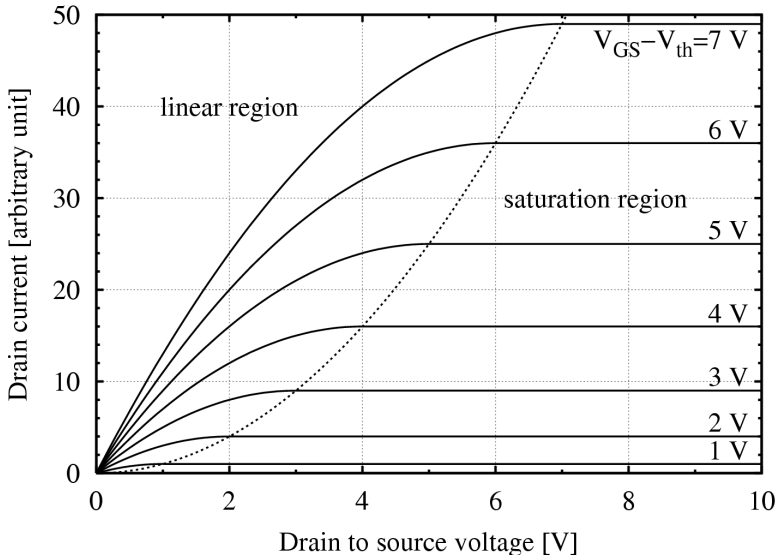
Klepnutím na každý obrázek jej zvětšíte (a uvidíte detailně "zašpinění").

Originální obrázek ve formátu PNG, velikost 43 009 B (zde žádné šmouhy nejsou):

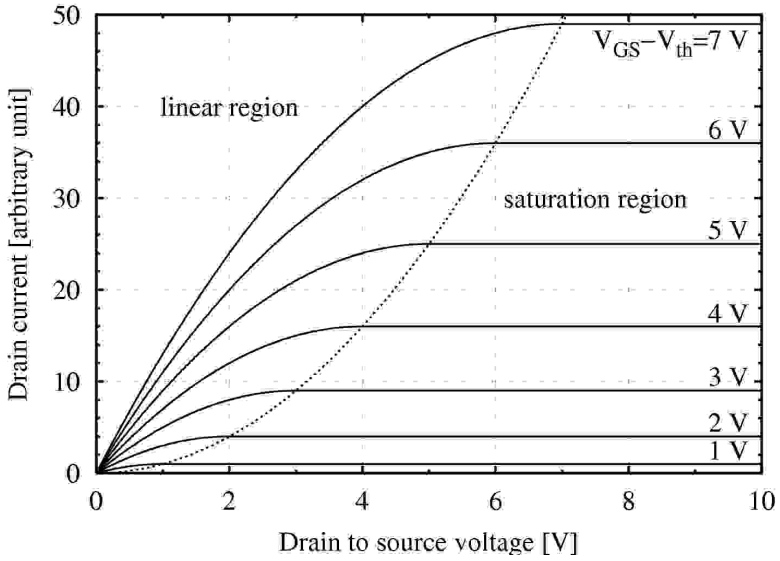
Obrázek konvertovaný do JPEG, kvalita 1, velikost 21 825 B. Zde jsou dobře vidět šmouhy:

Obrázek konvertovaný do JPEG, kvalita 10, velikost 41 799 B. Přestože má obrázek stejnou velikost jako originální PNG, stále je znehodnocen šmouhami:

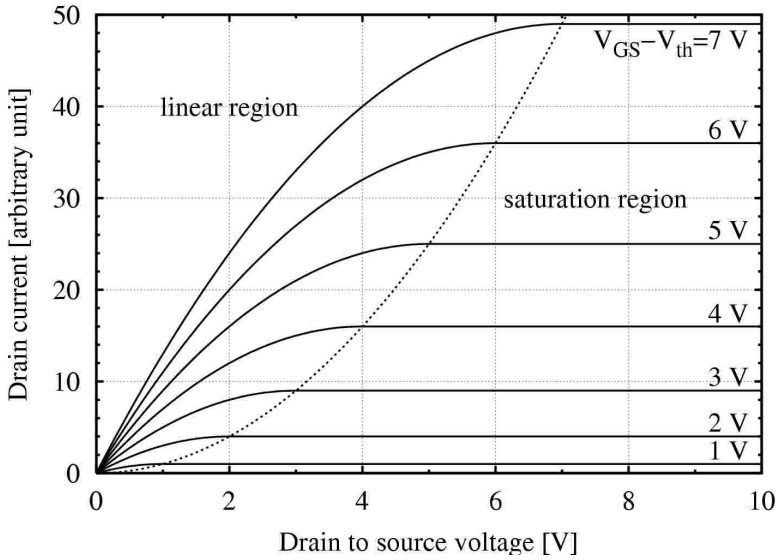
Obrázek konvertovaný do JPEG, kvalita 100, velikost 240 390 B. Šmouhy zmizely, ale obrázek má oproti originálu PNG šestinásobnou velikost:



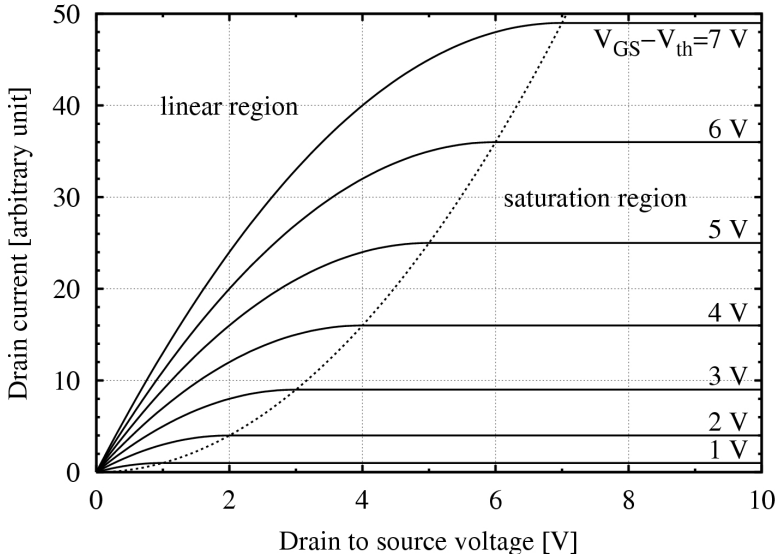
Obrázek 14.1:



Obrázek 14.2:



Obrázek 14.3:



Obrázek 14.4:

Kapitola 15

Elektrický výkon, elektrická energie

Zdroje napětí a proudu jsme chápali také jako „hranici našeho obvodu“, kde ono idealizované zařízení „zajistí napětí na svých svorkách, ať už je proud jakýkoli, jen pokud má konečnou velikost“ v případě zdroje napětí a totéž `/.napětí->proud` v případě zdroje proudu.

Naše součástky „nepotřebovaly žádný pohon“, zdroje napětí a proudu zajistily napětí a proudy na prvcích obvodu.

Proudy a napětí zdrojů byly důvodem všech napětí a proudů v obvodu.

Ovšem napětí a proudy v obvodech se vyskytující mohou být často větší, než proudy příslušných zdrojů, veličiny podle Obr. 15.1 jsou vypočítány a zobrazeny v notebooku `CAOVykony.nb`.

Připojíme-li k obvodu zdroj napětí $U_1 = 1V$, napětí v obvodu může být $15V$ a při připojení zdroje proudu mohou v obvodu téci proudy větší, než z onoho zdroje.

Životní zkušenost nás učí, že „něco za nic, mnoho z mála“ je statisticky nepravděpodobné: něco je celkově spíše za něco a z mála je statisticky častěji „$málo + \mathrm{d}málo$“, kde d$málo$ může být i záporné.

Napětí je ve smyčce nulové, ale v jiném dobrém smyslu se „nezachovává“, není třeba práce a snahy pro „zvýšení napětí“. Bilance všech proudů v uzlu je nulová, proud se ovšem ve stejném smyslu „nezachovává“, ke zvýšení proudu nemusí být třeba práce a snahy.

Z fyziky víme, že v běžné mechanice je důležité zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti.

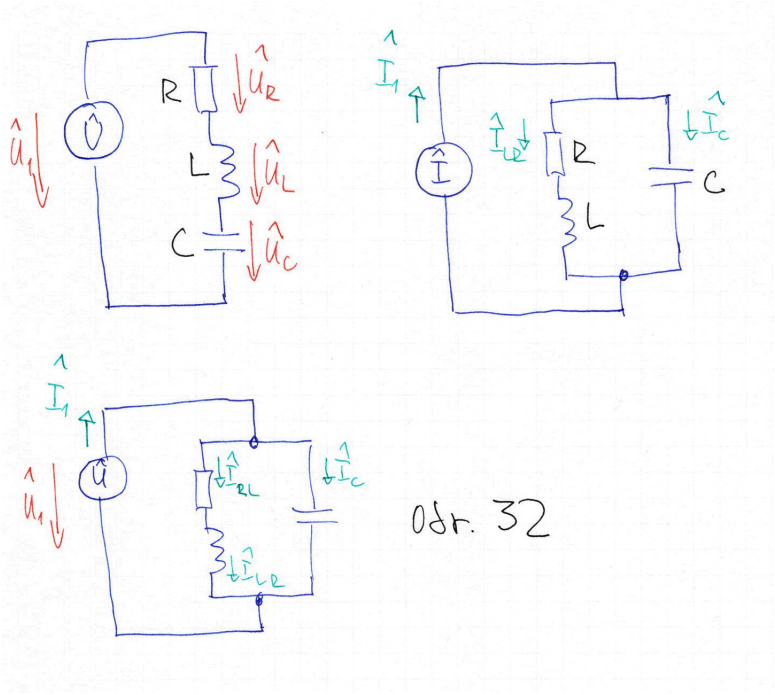
Obvody ze součástek L, R, C nemají snahu se otáčet ani ulétat, zachování momentu hybnosti a hybnosti je pro námi pojednávané elektrické obvody irelevantní, nepíšeme pojednání o elektrických strojích, kde je podstatné; zachování energie však musejí naše obvody v nějakém dobrém smyslu splňovat: kdybychom měli elektrický obvod, který *nesplňuje* zákon zachování celkové energie soustavy, tak se nezabýváme ČAO, protože máme Nobelovu cenu a jsme vědeckou celebritou, nebo, pokud máme zdravý rozum, jsme nejbohatší na Zemi a prodáváme energii získanou pomocí takových obvodů zadarmo za drahé peníze: navíc by šlo o obnovitelný zdroj energie a měli bychom šanci získat dotace.

To se však neděje a energie se tedy v obvodech podle současného vědění zachovává.

15.1 Mechanické analogie

Elektro-mechanické analogie nemáme sice rádi (jde totiž dokázat, že univerzálně platné neexistují, dobrá analogie pro nějakou situaci selže v situaci jiné; Lord Kelvin se o nalezení univerzální analogie snažil a neuspěl a to to byl jinačí kabrňák, než my), nicméně jedna taková analogie je teď vhodná.

Máme firmu, která zajišťuje dopravu uhlí do vyšších pater budov v době bez výtahů. Objednáme-li si dopravu uhlí, logicky nám budou účtovat za součin „kolik uhlí“ a „jak vysoko“. Zkusme si to



Obrázek 15.1:

představit v „digitální formě“: Platíme dělníkům za čas. Jeden dělník unese po dobu pracovní dejme tomu 10kg uhlí najednou. Jedno patro trvá s touto zátěží dělníkovi $20s$. Kolik „dělníkohodin“ musíme zaplatit, máme-li odnést $3t$ uhlí do pátého patra?

Snadno lze pomocí matematických metod přibližně šesté třídy základní školy ukázat, že potřebné „dělníkohodiny“ jsou úměrné součinu počtu pater a množství uhlí. „Dělníkohodinám“ odpovídají peníze a penězům v naší analogii energie.

Podobný příklad je čerpání nějakého objemového průtoku přes nějaký tlakový spád; součinem je výkon a analogií je součin proudu a napětí.

15.2 Elektrický výkon

Platíme-li „za proud“, platíme za to, že dodavatel musel jednorázově koupit takové dráty, které nejvyšší možný proud vydrží: vlastně neplatíme „za proud“, ale za možnost mít proud „až tak veliký“, za opakovatelnou maximální hodnotu.

Platíme-li za to, že po drátech k nám do zásuvky „přijde objednané napětí“, neplatíme za „napětí, jaké je“, ale za izolaci, která maximální možné napětí vydrží a také za to, že někdo udržuje hodnotu napětí na objednané výši.

Ale za součin proudu a napětí se platí, protože spotřebováváme uran a házíme uhlí do kotlů.

Přesnější vysvětlení pojmu „elektrický výkon“ není bez rozšíření předmětu ČAO možné a ani účelné: koneckonců, přijali jsme k věření vztahy mezi proudem a napětím na cívce, odporu a kondenzátoru a k podepření naší víry v tyto vztahy stačila důvěra v naše tvrzení, že „tak to je“.

Uvěřme tady vztahu mezi *výkonem* a *energií*:

$$p(t) == \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} \qquad [W == \frac{J}{s}, J, s], \tag{15.1}$$

kde $p(t)[W]$ je výkon ve wattech, $E(t)$ energie v joulech a t čas v sekundách. Díky volbě jednotek SI (jak je psáno v poznámce v sekci 11.8, *jednotky jsou důležité*) platí:

$$p(t) == u(t) \cdot i(t) \qquad [W, V, A] \tag{15.2}$$

Explicitae píšeme argument výkonu, tedy $p(t)[W]$ chápeme jako *okamžitou hodnotu v konkrétním čase* $t[s]$.

Kdybychom měli jiné jednotky než watty, ampéry a sekundy, mohl by vztah 15.2 mít tvar například $p(t) = 42 \cdot u(t) \cdot i(t)[jineW, jineV, jineA]$.

Přijmeme-li analogii s vodou, tlak může být větší „vlevo nebo vpravo“, voda může proudit „zprava doleva nebo zleva doprava“. To prozatím ponechme stranou a podívejme se na výkon a energii na cívce:

15.3 Energie a výkon na cívce

$$\begin{aligned} &p(t) == u(t) \cdot i(t), \quad u(t) == L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}, \\ &p(t) == L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot i(t). \end{aligned} \tag{15.3}$$

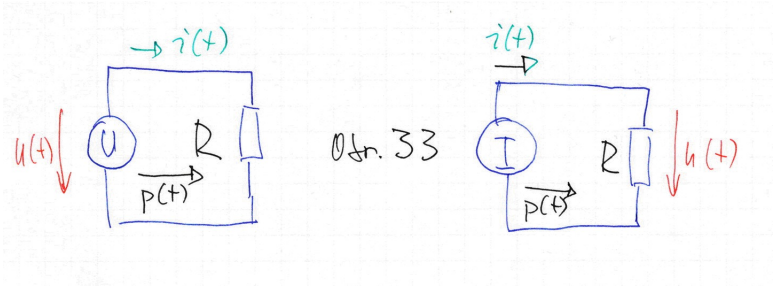
Ovšem platí:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(i(t)^2\right) == 2 \cdot i(t) \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \implies \\ &\implies i(t) \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} == \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(i(t)^2\right) == \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{i(t)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Interpretujme 15.1 následovně:

$$p(t) == \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} \implies p(t) \cdot \mathrm{d}t == \mathrm{d}E(t), \tag{15.4}$$

$$\begin{aligned} &E(t = t_{konec}) - E(t = t_{pocatek}) == \\ &== \int_{t=t_{pocatek}}^{t=t_{konec}} \mathrm{d}E(t) == \int_{t=t_{pocatek}}^{t=t_{konec}} p(t) \cdot \mathrm{d}t == \\ &== \int_{t=t_{pocatek}}^{t=t_{konec}} L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot i(t) \cdot \mathrm{d}t == \\ &== L \cdot \int_{t=t_{pocatek}}^{t=t_{konec}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{i(t)^2}{2}\right) \mathrm{d}t == \\ &== L \cdot \int_{i=i_{pocatek}}^{i=i_{konec}} \mathrm{d}\left(\frac{i(t)^2}{2}\right) == \\ &== \frac{L}{2} \cdot \left(i_{konec}^2 - i_{pocatek}^2\right). \end{aligned} \tag{15.5}$$



Obrázek 15.2:

Je ovšem docela dobře možné předpokládat, že se milá cívka narodila ve fabrice bez proudu a jednou bez proudu skončí na sběrném dvoře. Platí tedy podle 15.5:

$$E(t = t_{konec}) - E(t = t_{pocatek}) == \frac{L}{2} \cdot (0^2 - 0^2) == 0. \tag{15.6}$$

Celkový energetický přínos cívky je tedy nulový.

15.4 Energie a výkon na kondenzátoru

Podceňovali bychom inteligenci čtenáře, kdybychom celý postup opakovali pro *kondenzátor* a *napětí*. Dospěli bychom k analogickému závěru, že pokud kondenzátor s nulovým napětím začal a s nulovým napětím skončí, jeho celkový příspěvek k energii světa je nulový rovněž.

15.5 Energie a výkon na rezistoru

Pokud je tedy celková energetická bilance mezi světem a obvodem za celý život obvodu nenulová, potom pachatelem musí být rezistor(y).

Cívka a kondenzátor někdy energii přijímají, jindy vydávají, ale neztrácí se v nich: celkově co dostanou, vrátí.

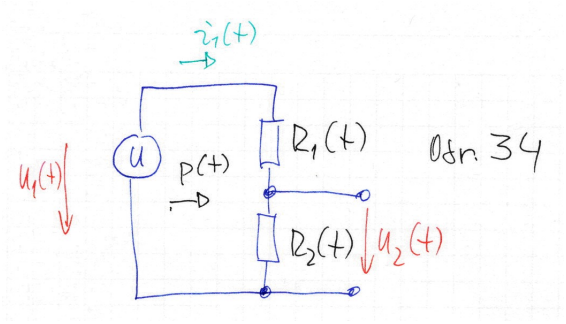
Rezistor nevrátí nic: všechna elektrická energie a elektrický výkon na něm se mění v tepelnou energii a tepelný výkon.

Uvažme elektrický obvod podle Obr. 15.2. Ze zkušenosti víme, že pokud proudy a napětí jsou v uvedených směrech kladné, proudí výkon od zdroje k rezistoru: rezistor „se hřeje“ a reálný zdroj napětí vyžaduje nějaký pohon, například kliku nebo vodní turbínu.

Podívejme se na několik příkladů výkonu, jsou uvedeny v `CAOVykony.nb`.

15.6 Výkon ve stejnosměrném obvodu

Nejprve zkoumejme stejnosměrný ustálený stav: proud je konstantní, napětí je konstantní a součin konstant je konstanta: můžeme tedy v dobrém smyslu říci, že „výkon je 7.2W“. Zde není nic složitého.



Obrázek 15.3:

15.7 Výkon a HUS

Podívejme se dále na HUS: nechť jsou napětí i proudy harmonické funkce, nechť napětí a proud jsou:

$$u(t) = U_M \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_U\right) = U_M \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_U\right) \tag{15.7}$$

$$i(t) = I_M \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_I\right) = I_M \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_I\right) \tag{15.8}$$

Příklad časového průběhu součinu $i(t) \cdot u(t)$ je v notebooku `CAOVykony.nb`.

Vidíme, že ve dvou hodnotách proměnného φ_I je graf časového průběhu výkonu zcela nad osou času nebo pod osou času, tedy stále kladný, nebo záporný, v obecném případě nabývá ovšem hodnot obou znamének.

15.8 Výkon na odporovém děliči s proměnnými odpory

Uvažme obvod podle Obr. 15.3. Jde o odporový dělič, kde odpory rezistorů jsou časově proměnné: v čase $t = 0s$ odpor $R_1(t)$ prudce klesá a odpor $R_2(t)$ prudce stoupá v čase posunutém o proměnnou *posun*. Vztah pro odporový dělič platí i pro časově proměnné odpory rezistorů, pro výstupní napětí platí tedy:

$$u_2(t) == u_1(t) \cdot \frac{R_2(t)}{R_1(t) + R_2(t)}. \tag{15.9}$$

Pro proud ze zdroje platí:

$$i_1(t) == \frac{u_1(t)}{R_1(t) + R_2(t)}. \tag{15.10}$$

A pro výkon tekoucí ze zdroje platí:

$$p(t) == u_1(t) \cdot i_1(t) == \frac{\left(u_1(t)\right)^2}{R_1(t) + R_2(t)}. \tag{15.11}$$

Pozorný návštěvník přednášek ČAO si povšimne, že jde vlastně o simulaci přepínání P-MOSu a N-MOSu, kde přepnutí probíhá v mírně rozdílných časech.

Vidíme, že výkon se v tomto případě (není-li posun nulový) mění a jednomu takovému přepnutí nelze přiřadit jeden výkon, půjde mu přiřadit energie.

15.9 Elektrická energie

Viděli jsme, že v obecném případě nelze přiřadit výkonu $p(t)$ jedno číslo.

Vždy ovšem můžeme vyjádřit energii prošlou ve zvoleném směru (směr podle Obr. 15.2 mezi časy $t == t_1$, a $t == t_2$

$$E_{\langle t_1,t_2\rangle} == \int_{t_1}^{t_2} p(t)\cdot \mathrm{d}t. \tag{15.12}$$

Vztah 15.12 je vlastně jiným vyjádřením 15.4.

15.10 Střední hodnota výkonu pro periodické průběhy

Pro *periodické* průběhy s periodou T je často výhodné vyjádřit takzvanou *střední hodnotu* výkonu:

$$P = \frac{1}{T}\cdot \int_{t=t_1}^{t_1+T} p(t)\cdot \mathrm{d}t. \tag{15.13}$$

Kdyby byl výkon konstantní a měl velikost P podle 15.13, pak za čas rovný celočíselnému násobku periody T znamená stejnou prošlou energii, jako projde při časově proměnném výkonu $p(t)$. Pro zvolený čas rovný periodě T je to zřejmé:

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{T}\cdot \int_{t=t_1}^{t_1+T} p(t)\cdot \mathrm{d}t \implies \\ \implies P\cdot T = \int_{t=t_1}^{t_1+T} p(t)\cdot \mathrm{d}t \implies \\ \implies \int_{t=t_1}^{t_1+T} P\cdot \mathrm{d}t = \int_{t=t_1}^{t_1+T} p(t)\cdot \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{15.14}$$

A pro násobky se použijí vlastnosti periodických funkcí, což již necháváme laskavému čtenáři coby cvičení.

Střední hodnota výkonu v stejnosměrném ustáleném stavu je pro jakékoli nenulové T rovna okamžité hodnotě výkonu.

15.11 Střední hodnota výkonu pro HUS, efektivní hodnoty napětí a proudu

Určeme ještě střední hodnotu výkonu pro harmonické průběhy proudu a napětí:

$$\begin{aligned} P == \frac{1}{T}\cdot \int_{t=0}^{T} I_M\cdot \sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi_I\right)\cdot U_M\cdot \sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi_U\right) == \\ == \frac{U_M\cdot I_M}{2}\cdot \cos(\varphi_I-\varphi_U). \end{aligned} \tag{15.15}$$

Poslední výraz v 15.15 můžeme přepsat:

$$\begin{aligned} P &== \frac{U_M \cdot I_M}{2} \cdot \cos(\varphi_I - \varphi_U) == \\ &== \frac{U_M}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_M}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi_I - \varphi_U) == \\ &== U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_I - \varphi_U). \end{aligned} \tag{15.16}$$

Hodnotám

$$U_{eff} = \frac{U_M}{\sqrt{2}}, \qquad I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \tag{15.17}$$

říkáme *efektivní hodnoty* napětí a proudu.

Uvážíme-li harmonický stav na rezistoru, pak $\varphi_I = \varphi_U$, tedy $cos(\varphi_I - \varphi_U) == 1$. Pak ovšem platí

$$P == \frac{U_M \cdot I_M}{2} == U_{eff} \cdot I_{eff},$$

tedy efektivní hodnoty harmonického napětí a proudu jsou takové, aby byl vzorec pro střední hodnotu výkonu na rezistoru v harmonickém ustáleném stavu formálně shodný se vzorcem pro okamžitou hodnotu výkonu a pro střední hodnotu výkonu v případě stejnosměrného ustáleného stavu.

Tato hodnota se obvykle udává, $230V$ v zásuvce tedy znamená $230 \cdot \sqrt{2}V$ maximální hodnoty harmonického napětí.

Fázory se často uvádějí *v měřítku efektivních hodnot*; přepočet je opět přes odmocninu ze dvou.

Proč nás zajímá střední hodnota výkonu (a kvůli ní zavedené efektivní hodnoty proudu a napětí)?

Uvedli jsme výše, že „rezistor se hřeje“, tedy elektrický výkon v obvodu se realizuje tepelně. Cívky a kondenzátory si energii s obvodem jen vyměňují, nula od nuly pojde.

Tepelné děje jsou však i pro obvyklé nízké frekvence elektrických harmonických veličin ve srovnání s elektrickými *pomalé*.

15.11.1 Příklad

Ukažme si to na příkladu:

Rezistor je tvořen tepelně zaizolovaným měděným „drátem“ o průřezu $1mm^2$ a délce $1m$.

Teplota, proud a napětí jsou vyřešeny v notebooku `CAOVykony.nb`.

Vidíme, že uvažování konstantního středního výkonu namísto skutečného časového průběhu výkonu sice vnáší do výpočtů chybu, ale technicky zpravidla naprosto akceptovatelnou.

Se střední hodnotou se z hlediska tepelných problémů (a ty jsou dost důležité i pro HW) počítá mnohem snadněji a obvykle je chyba nepatrná.

15.12 Efektivní hodnota proudu a napětí u neperiodických průběhů

U obecných neperiodických průběhů můžeme definovat efektivní hodnotu proudu či napětí přes zvolený časový interval $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ jako takovou konstantní hodnotu proudu či napětí, která by na rezistoru vyvolala stejnou energii přeměněnou v teplo.

Na rezistoru platí

$$p(t) == u(t) \cdot i(t) == \frac{(u(t))^2}{R(t)} == R(t) \cdot (i(t))^2 \,, \tag{15.18}$$

kde jsme buď proud nebo napětí vyjádřili z Ohmova zákona.

Definici efektivní hodnoty obecného průběhu přes obecný interval $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ lze tedy přepsat:

$$\begin{aligned}
&\int_{t=t_1}^{t_2} \frac{U_{eff}^2}{R} \cdot \mathrm{d}t == \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{(u(t))^2}{R} \cdot \mathrm{d}t \implies \\
&\implies \frac{U_{eff}^2}{R} \cdot \int_{t=t_1}^{t_2} 1 \cdot \mathrm{d}t == \frac{1}{R} \cdot \int_{t=t_1}^{t_2} (u(t))^2 \cdot \mathrm{d}t \implies \\
&\implies (t_2 - t_1) \cdot \frac{U_{eff}^2}{R} == \frac{1}{R} \cdot \int_{t=t_1}^{t_2} (u(t))^2 \cdot \mathrm{d}t \implies \\
&\implies U_{eff} == \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t=t_1}^{t_2} (u(t))^2 \cdot \mathrm{d}t}
\end{aligned} \tag{15.19}$$

Obdobně ovšem při vyjádření pomocí proudu platí:

$$I_{eff} == \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t=t_1}^{t_2} (i(t))^2 \cdot \mathrm{d}t.} \tag{15.20}$$

Kapitola 16

Homogenní vedení

Již na počátku našeho příběhu o elektrických obvodech jsme se zmiňovali o obvodech se soustředěnými a rozptýlenými parametry. Doposud jsme se zabývali jen obvody se soustředěnými parametry: vodič byl vodič, zdroj zdroj, cívka cívka atd.

To, jestli je modelování nějaké reálné části obvodu možné s použitím jedné ideální součástky, nebo jich musíme použít více, záleží obecně na zvolené přesnosti modelu a na proudech a napětích, které se v obvodu mohou vyskytnout, zejména na frekvencích a vlnových délkách.

Připomeňme, že je-li frekvence signálu $f[Hz]$ a rychlost šíření signálu $c[m \cdot s^{-1}]$, je odpovídající vlnová délka

$$\lambda = \frac{c}{f} == c \cdot T \qquad \left[m, m \cdot s^{-1}, Hz, m \cdot s^{-1}, s\right] \tag{16.1}$$

Frekvence vyskytující se v elektrických obvodech jsou velmi různé, v běžných aplikacích od nuly odpovídající stejnosměrnému ustálenému stavu po jednotky GHz v počítačích a desítky až stovky GHz v mikrovlnných spojích.

Rychlost šíření záleží na vlastnostech prostředí, kterým se vlnění šíří, ve vzduchu jde přibližně o rychlost světla ve vakuu (tedy přibližně $3 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$), v ostatních materiálech je tato rychlost šíření o něco menší, nicméně nikoli řádově.

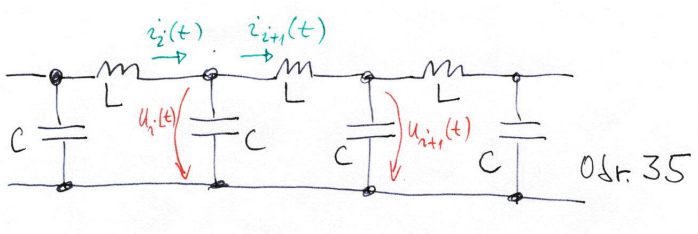
Uvážíme-li například frekvenci $50Hz$, je ve vzduchu odpovídající vlnová délka asi $6000km$ a pokud je náš obvod rozměrově podstatně menší, než vlnová délka, nemusíme vlnové vlastnosti v našich obvodech uvažovat: například „přenosy elektrické energie na velmi dlouhé vzdálenosti“ byl v SSSR důležitý předmět na elektrotechnických fakultách, neboť se délky vedení mohly vlnové délce řádově přiblížit, v ČR tato nauka velký význam pro přenos elektrické energie nemá.

Ovšem frekvenci $3GHz$ odpovídá ve vzduchu vlnová délka asi $10cm$. Je zřejmé, že dva metry dlouhý kus vodiče z hlediska $50Hz$ se nám bude chovat „nevlnově“ a podle zvolené přesnosti můžeme jeho chování v obvodu modelovat ideálním vodičem, případně vodičem a rezistorem, takový model pro $3GHz$ bude ovšem dávat výsledky chybné.

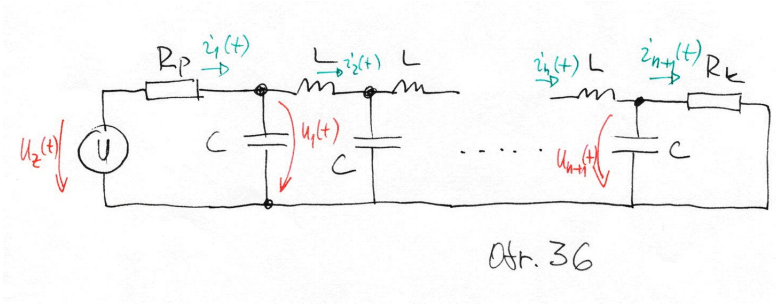
Cílem ČAO není podat podrobnou nauku o vysokofrekvenčních problémech obecně, ani o vlnových jevech na vedení: půjde nám o to získat představu, „co se může v případě vedení a vysokých frekvencí přihodit“ a vědět, jak se nepříjemných důsledků vlnových vlastností v případě vedení vyvarovat.

Vztahy odvodíme pro vedení tzv. nesymetrická (vodiče obecně nejsou shodného tvaru a nemají ani stejné postavení vůči okolí), jako je například koaxiální (kdysi se mu říkalo souosý) kabel. Výsledné vztahy jsou zobecnitelné na symetrické vedení snadno a rychle, čtenář by si s tím jistě poradil sám.

Použijeme jiný matematický popis, než jaký je obvyklý: parciálními diferenciálními rovnicemi se zabývat nebudeme, potřebný matematický aparát nemáme a na jeho výklad nemáme dost času.



Obrázek 16.1:



Obrázek 16.2:

Zájemci o popis vedení pomocí parciálních diferenciálních rovnic, shrnuto je to stručně a jasně například zde.

Vztahy odvodíme pro tzv. *bezeztrátové* vedení; jelikož ztráty energie, jak už víme z předchozí kapitoly, se v obvodech dějí pouze na rezistorech, bude náš model vedení složen jen z cívek a kondenzátorů. Reálná vedení mají pochopitelně také útlum, který by se projevil v modelu přidáním rezistorů (na Obr. 16.1 například jednoho s poměrně malým odporem sériově s každou cívkou a jednoho s velkým odporem paralelně s každým kondenzátorem). Upravit výsledné vztahy není obtížné a necháváme to zvídavému čtenáři coby cvičení.

Uvažme „řetězec“ cívek a kondenzátorů podle Obr. 16.1. Pro úsek mezi uzly s indexem i a $i+1$ platí:

$$\begin{aligned} i_i(t) &== i_{i+1}(t) + C \cdot \frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}, \\ u_i(t) - u_{i+1}(t) &== L \cdot \frac{\mathrm{d}i_{i+1}(t)}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{16.2}$$

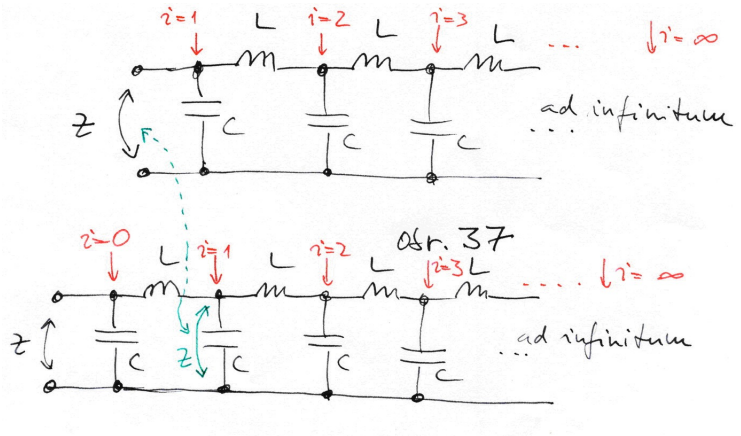
Při řešení necháme Mathematicu vygenerovat rovnice pro obecně n vnitřních úseků vedení; pro začátek a konec uvážíme pro začátek připojení zdroje napětí přes rezistor o odporu R_p a konec spojíme se společným uzlem přes rezistor o odporu R_k, tak jak je na Obr. 16.2.

Rovnice popisující začátek a konec vedení tedy jsou:

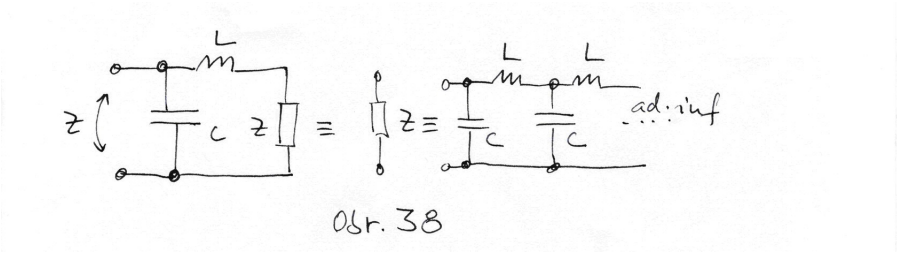
$$\begin{aligned} u_Z(t) - u_1(t) &== R_p \cdot i_1(t), \\ u_{n+1}(t) &== R_k \cdot i_{n+1}(t). \end{aligned} \tag{16.3}$$

Tyto rovnice pro $n >= 3$ musíme řešit numericky, pro numerické řešení však potřebujeme obvod řešit pro konkrétní hodnoty L, C, R_p, R_k. V předchozím jsme viděli, že z hodnot R a C plynula nějaká hodnota času a podobně. Zkusíme vyzkoumat, jestli vedení podle Obr. 16.1 a Obr. 16.2 nedává nějaký návod, jaké hodnoty R_p a R_k vyzkoušet.

Využijeme obvyklý trik v případě nekonečných problémů: nebudeme pracovat s aktuálním nekonečnem přímo (ostatně to neumíme), ale použijeme trik, že „(spočetné) nekonečno zvětšené o jedničku je stejné spočetné nekonečno“ (matematici prominou) a pak, že „nekonečnost“ je jistým způsobem relativní: vedení konečné délky je nekonečné vůči nekonečně malému kousku. Zkusíme



Obrázek 16.3:



Obrázek 16.4:

připojit další kousek vedení a vlastnosti vedení z hlediska vstupních svorek se nesmějí změnit. A zkusíme připojit „limitně nekonečně malý“ kousek vedení a uvidíme, co to udělá.

Abychom získali obecnější výsledky, utečeme se k HUS: ostatně koncept HUS je důležitější pro popis systémů a zobecňování závěrů, než pro samotné řešení elektrických obvodů: to umíme i bez něj. Kdybychom neměli HUS, bez parciálních diferenciálních rovnic bychom se hledaného výsledku nedobrali.

Podívejme se na Obr. 16.3. Obr. 16.3 ukazuje jen to, že pokud je řetěz cívek a kondenzátorů a cívek nekonečný, počíná indexem $i = 1$ a jeví se z hlediska vstupních svorek jako impedance Z, pak přidání jednoho dalšího článku řetězu s indexem $i = 0$ nezmění impedanci a z hlediska vstupních svorek bude mít řetěz opět impedanci Z.

To není přírodní zákon: takto pojímáme problémy spojené s nekonečnem; svým způsobem jde o víru nebo axiom (což je vlastně skoro totéž). Přijetím podobných postupů jsme nekonečno tak trochu „zkrotili“, resp. jako „nekonečné“ pojímáme objekty, se kterými se dá pomocí podobných kejklů pracovat. Koho by zajímalo, jak se způsoby „práce s nekonečnem“ vyvíjely, tomu vřele doporučujeme knihu Bernard Bolzano: Paradoxy nekonečna.

Shrnuto je to na Obr. 16.4. Obr. 16.4 vede na rovnici

$$\frac{1}{Z} == \frac{1}{\frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}} + \frac{1}{Z + j\cdot\omega\cdot L} \tag{16.4}$$

Je zbytečné sem přepisovat komplikovanější vzorce: rovnice je vyřešena v notebooku `CAOVedeni.nb`, řešení je ve druhé buňce.

Získaný výraz je sice konečný, nicméně pro uspokojení citu pro matematickou estetiku zápisu fyzikálních závislostí nestačí.

Připojili jsme další prvek nekonečného řetězu, trikem jsme získali vstupní impedanci. Pokud je však připojený kousek *konečně veliký*, musí být řetěz *nekonečně veliký*. Aby náš popis odpovídal

konečně dlouhým vedením (alespoň pro nějaký krátký čas příslušných dějů, než elektromagnetické vlny doletí z konce na konec) uvážíme nyní, že připojujeme *malinký kousek vedení*. Třeba milimetr a méně.

Je-li kabel všude stejný, homogenní (stejnorodý), nerozlišíme-li tedy od sebe dva stejně dlouhé úseky kabelu, máme dobrý důvod předpokládat, že indukčnost i kapacita kousku kabelu (ve smyslu Obr. 16.3) jsou lineární funkcí délky. Dvakrát delšímu kousku přísluší dvakrát větší kapacita i indukčnost (přičemž ji měříme ale tak, aby se neuplatnily vlnové jevy).

Dosaďme tedy do vztahu pro impedanci nekonečného vedení podle Obr. 16.3 podle pravidel

$$\left\{ L \to \frac{L}{n}, \quad C \to \frac{C}{n} \right\},$$

čím vyjadřujeme, že jsme před chvílí myšlený úsek vedení mezi dvěma indexy podle Obr. 16.1 myšlenkově rozdělili na n kousků o příslušně menší kapacitě a indukčnosti.

Výsledný vztah se zjednoduší na:

$$Z_\infty = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{16.5}$$

Výrazu Z_∞ říkáme *vlnová impedance vedení*.

Vztah 16.5 je již tak jednoduchý, že máme pocit, že by mohl vyjadřovat něco důležitého: tak jako

$$R \cdot C, \quad \frac{L}{R}, \quad \sqrt{L \cdot C}.$$

Opět máme jednoduše zkombinovány dvě vlastnosti prvků elektrických obvodů.

A opět nás bude zajímat fyzikální rozměr získané kombinace. Jednotky a fyzikální rozměry *jsou důležité* ☺.

$$\left[Z_\infty = \sqrt{\frac{L}{C}} \right] == \sqrt{\frac{\Omega \cdot s}{\frac{s}{\Omega}}} == \sqrt{\Omega^2} == \Omega. \tag{16.6}$$

Neboť béřeme $\Omega > 0$.

To je zajímavý výsledek: nekonečný řetěz z cívek a kondenzátorů se chová z hlediska vstupních svorek jako rezistor!

Jak je to možné? Celkový energetický přínos konečného počtu cívek a kondenzátorů světu je čistá nula a *nekonečný* počet cívek a kondenzátorů elektrickou energii spotřebovává??? Chová-li se vedení podle Obr. 16.2 jako rezistor, elektrická energie na něm přece mizí, na rezistoru se mění v teplo . . . v co se mění v případě nekonečného řetězu cívek a kondenzátorů?

Nemění se, je stále energií elektromagnetického pole: ale odchází od vstupních svorek a žene se řetězem cívek a kondenzátorů do nekonečna.

Nekonečným vedením tedy můžeme odsávat elektrický výkon, i když máme jen cívky a kondenzátory, odsouváme prostě „co s ním“, což umí jen rezistor, do nekonečna.

Námitka, že jsme odvodili tento fakt jen pro HUS, neobstojí: linearita nám dovoluje zobecnit výsledek i na spojitý periodický průběh a trocha čarování s diferenciálními rovnicemi by nám pomohla dokázat tvrzení o odnosu výkonu z obvodu pro mnohem mohutnější třídu možných průběhů napětí: ve skutečnosti pro všechny, které jsme schopni na vstupních svorkách napětí nastrojit.

Poznámka pro zvídavé čtenáře:
Zkuste si v notebooku `CAOVedeni.nb` ve druhé buňce odkomentovat zakomentovaný výběr prvního kořene řešení 16.4. Zjistíte, že pak platí

$$Z_\infty = -\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Tento výsledek by znamenal vnášení výkonu do našeho obvodu. Matematicky nelze mít proti tomuto výsledku námitek a tak jej vypouštíme jen protože „vlny přicházející z nekonečna z kosmologických důvodů z řešení vylučujeme“, jak říkal můj učitel parciálních diferenciálních rovnic, nebo prostě proto, že je nikdo neviděl, nechtěl za ně Nobelovu cenu a nevydělává na nich. Dále se tedy omezíme na kladné hodnoty vlnové impedance.

Jenže když se z hlediska vstupních svorek chová nekonečné vedení jako rezistor o odporu

$$Z_\infty = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

a jelikož trik s Obr. 16.4 nelze napadnout (napadli bychom pravidla zacházení s nekonečny, např. Archimédův axiom a tím bychom bourali veliké stavby lidského ducha), lze vedení v každém místě „obelstít“: usekneme z něj dvacet metrů, ty nastavíme rezistorem o vlnové impedanci a na začátku nikdo nic nepozná. Koneckonců i tak lze chápat Obr. 16.4: jde vlastně o návod pro zloděje nekonečných kabelů: useknou kabel, dají rezistor a na začátku vedení nikdo nic nepozná, a ten na konci je nekonečně daleko ☺

Konečné vedení zakončené správnou vlnovou impedancí

$$Z_\infty = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

se tedy chová z hlediska vstupních svorek jako nekonečné.

Jelikož ve vlny z nekonečna jdoucí nevěříme, co konečné vedení zakončené správnou vlnovou impedancí

$$Z_\infty = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

schvátí, nevrátí, stejně jako vedení nekonečné: kdyby tomu tak nebylo, bylo by možno odlišit toto vedení od nekonečného na vstupních svorkách a neplatila by rovnice 16.4.

V notebooku `CAOVedeni.nb` si můžete vyzkoušet měnit hodnoty R_p a R_k, uvidíte, jak původně obdélníkový impuls putuje po vedení a není-li $R_k == Z_\infty$, odráží se buď se stejným znaménkem (polaritou) a velikostí tím větší, čím je poměr

$$\frac{R_k}{Z_\infty}$$

vzdálenější od jedničky.

Kupodivu se signál odráží opět i od zdroje, pokud neplatí $R_p == Z_\infty$: to je ale logické, neboť odpor ideálního zdroje napětí je nulový a z hlediska vedení se zdroj tedy jeví s odporem $R_p == Z_\infty$, jako nekonečné vedení.

Nebudeme zde rozebírat, jaký je poměr „odraženého“ impulsu a impulsu vyslaného, je-li kladný či záporný v závislosti poměru

$$\frac{R_k}{Z_\infty},$$

resp.

$$\frac{R_p}{Z_\infty}.$$

Je o tom mnoho literatury napsané fundovanějšími autory. Pro nás je podstatné, že by se signál, který má sloužit pro přenos informace, odrážet *neměl*.

Vyšleme-li jeden impuls, chceme, aby vysílač dostal jeden impuls, pokud možno stejně vypadající a ne příliš zmenšený, aby jej nepřekryl šum. Nechceme, aby nám odražené impulsy rušily příjem a vysílání signálových pulsů.

U každého kabelu určeného pro přenos dat na elektrické bázi najdete údaj o impedanci Z_∞. Kabel má impedanci 75Ω, 50Ω, ... Takové kabely mají být napájeny zdroji napětí s vnitřními odpory (tedy kombinacemi ideální zdroj napětí + příslušný rezistor v náhradním schématu) 75Ω, 50Ω, ... a pracovat do zátěží se stejnými odpory. Pak nás nebudou odražené impulsy ad infinitum běhající po vedení obtěžovat.

Kapitola 17

Vázané induktory

Již při prvních Ampérových a Faradayových pokusech s elektřinou a magnetismem bylo zjištěno, že v čase proměnlivý elektrický proud vyvolává v čase proměnlivé magnetické pole a v čase proměnlivé magnetické pole může vyvolat ve vodičích elektrické napětí.

Nechtěli jsme tím čtenářům při výkladu o cívce mást hlavy, ale v cívce o tento jev právě jde: časově proměnlivý proud procházející závity cívky vyvolá proměnlivé magnetické pole, které v závitech té samé cívky *indukuje* elektrické napětí. Za starých časů se proto říkalo cívce *samoindukce*, tedy součástka, která sama v sobě indukuje.

Proměnlivé magnetické pole vyvolané cívkou indukuje ovšem elektrické napětí i v cívkách jiných (ostatně i v kanálových mřížích, v železném zábradlí a ostatně v každé i jen myšlené smyčce ve vesmíru až tak daleko, kam se rychlostí světla stačilo magnetické pole rozšířit).

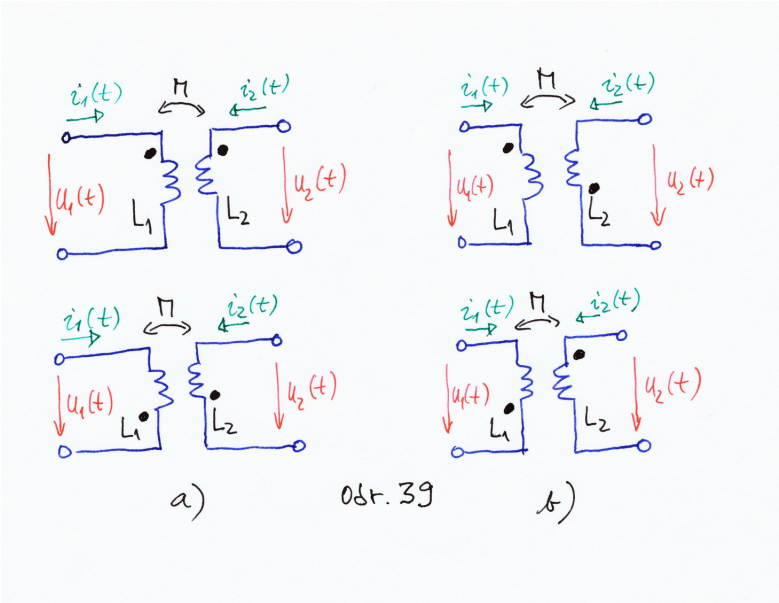
Magnetické pole vysílače Čro6, proměnlivé se základní frekvencí $639kHz$ *indukuje* elektrické napětí v cívce na vstupu středovlnného rádia, cívka v peci na tavení mědi indukuje proudy v oné mědi, které ji zahřívají a taví, silové rozvody elektřiny nám indukují *bručení* v Hi-Fi soupravě, pokud mámě špatně spojené některé přívodní vodiče... Všechny cívky našeho světa jsou takto navzájem *magneticky vázané*, některé ovšem více, jiné méně.

U cívek, které jsme probírali v předchozím textu, se zpravidla snažíme různými konstrukčními úpravami magnetické vazbě s jinými cívkami zabránit, chceme, aby napětí na takové cívce záviselo jen na proudu protékajícím onou cívkou a ne na proudech v okolních cívkách, abychom mohli magnetickou vazbu cívek navzájem při řešení elektrických obvodů zanedbat.

V případě magneticky vázaných obvodů, tzv. vázaných induktorů, magnetickou vazbu do řešení obvodů započítáváme, buď proto, že chování našeho obvodu na ní závisí a neumíme ji dostatečně eliminovat vhodnou konstrukcí obvodu, nebo naopak cívky konstruujeme tak, aby byla tato vazba co nejlepší, protože její vlastnosti chceme s výhodou využít: typickým příkladem takového využití jsou *transformátory*, které využíváme ke změně velikosti napětí a proudu a nebo k tzv. *galvanickému oddělení* elektrických obvodů.

Magnetické ovlivňování cívek je obousměrné: pokud proměnlivé magnetické pole vyvolané první cívkou (tedy proudem v ní) indukuje elektrické napětí v cívce druhé, pak bude proměnlivé pole vyvolané proudem v cívce druhé vyvolávat napětí v cívce první.

Tak jako jsme volili orientace proudů a napětí (šipky, které nás provázely celým povídáním), aby rovnice měly zvolený tvar (mimochodem, hlavně aby v nich bylo minimum znamének mínus), tak budeme volit orientace proudů a napětí i u magneticky vázaných obvodů. Kromě orientace proudů a napětí vůči sobě ale musíme navíc určit, jestli proudy ve zvolených orientacích mají magnetické účinky, které se sčítají, nebo které se odčítají. Máte-li dva magnety, můžete je orientovat tak, že



Obrázek 17.1:

budou střelku kompasu odklánět více, nebo méně a v podstatě jde o totéž. Podle toho, jestli se magnetické účinky sčítají, nebo odčítají, volíme schéma podle Obr. 17.1 a) nebo b).

Zavádíme tzv. *vzájemnou indukčnost* M, s jednotkou H shodnou s jednotkou indukčnosti, kterou jsme poznali a kterou, pokud je možné, že se v obvodu bude vyskytovat *vzájemná indukčnost*, pro odlišení označujeme jako *indukčnost vlastní*.

Rovnice pro případ podle Obr. 17.1 a), kdy oba proudy tečou „ze svorky k tečce“, nebo oba „od tečky ke svorce, mají tvar:

$$\begin{aligned} u_1(t) &== L_1 \cdot \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M \cdot \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \\ u_2(t) &== L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M \cdot \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{17.1}$$

A pro případ podle Obr. 17.1 b), kdy jeden proud teče „od tečky ke svorce“ a druhý „ze svorky k tečce“ mají tvar:

$$\begin{aligned} u_1(t) &== L_1 \cdot \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} - M \cdot \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \\ u_2(t) &== L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} - M \cdot \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{17.2}$$

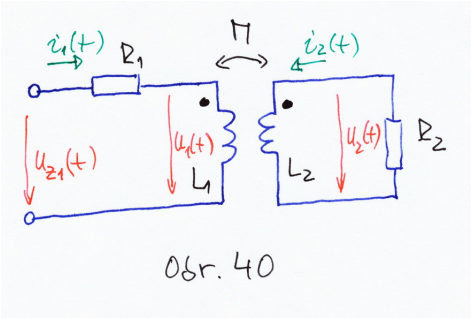
Pokud se mají vázané induktory používat tak, že na orientaci magnetického pole záleží, měla by buď být na nich vyznačena (označeny *začátky* vinutí tečkou), nebo musíme tuto orientaci zjistit.

Je to důležité při přenosu elektrické energie, zde v ČAO budeme kreslit tečky jak se nám zlíbí, tedy tak, aby mínusů bylo co nejméně.

K čemu jsou vázané induktory dobré? Jednu jejich vlastnost si vyzkoušíme v notebooku `CAOVazaneInduktory.nb`.

V notebooku je řešen obvod podle Obr. 17.2

Vidíme, že jsme měli k dispozici zdroj napětí o amplitudě 10V a získali jsme napětí o amplitudě skoro 100V! Vázané induktory nám mohou sloužit ke změně velikosti napětí. Pokud zaměníte velikosti L_1 a L_2, zjistíte, že můžeme napětí pomocí vázaných induktorů i snižovat. Podobně v dalším grafu vidíme, že je možné měnit i velikosti proudů.



Obrázek 17.2:

Z hlediska počítání již víme o dvou vázaných induktorech vše a jak by to bylo s v případě více induktorů se čtenář dočte v literatuře, ostatně struktura rovnic 17.1 a 17.2 napovídá, že přijmeme-li označení $L_i = L_{i,i}$, pak bude výsledek

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \pm L_{j,i} \cdot \frac{\mathrm{d}i_j(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{17.3}$$

kde jistě čtenáři nedělá problémy odlišení indexu i od označení proudu a znaménko je určeno shodně jako v případě dvou vázaných induktorů. Navíc platí $L_{i,j} == L_{j,i}$, což ponecháváme čtenáři k věření, případně ověření vírou v příslušnou literaturu.

Podívejme se ještě na celkovou bilanci energie po dobu života vázaných induktorů: postup bude obdobný jako v případě cívky a kondenzátoru.

V notebooku `CAOVazaneInduktory.nb` je odvozeno, že platí:

$$\begin{aligned} p_1(t) + p_2(t) &== u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t) == \\ &== \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1\left(i_1(t)\right)^2 + \frac{1}{2}L_2\left(i_2(t)\right)^2 + M \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)\right) == \\ &== \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t) \end{aligned} \tag{17.4}$$

Pak ovšem platí:

$$\begin{aligned} \Delta E &== \int_{t=t_1}^{t_2} \left(p_1(t) + p_2(t)\right) \cdot \mathrm{d}t == \\ &== \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t) \cdot \mathrm{d}t == \Psi(t_2) - \Psi(t_1). \end{aligned} \tag{17.5}$$

Ovšem počátek i konec života vázaných induktorů můžeme uvažovat bez proudu, a tak je celkově za jejich život $\Delta E == 0J$. Ale to se ostatně dalo čekat.

Vztah 17.3 je možno odvodit z požadavku $\Delta E == 0J$, pro zvídavé čtenáře je to zajímavé cvičení.

17.1 Ideální transformátor

Vyjádřeme dále derivace proudů z 17.1: derivace proto, že jsou důležité, určují nám směr časového vývoje systému. Obdržíme:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} &== -\frac{L_2 \cdot u_1(t) + M \cdot u_2(t)}{L_1 \cdot L_2 - M^2},\\ \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} &== -\frac{L_1 \cdot u_2(t) + M \cdot u_1(t)}{L_1 \cdot L_2 - M^2},\end{aligned} \tag{17.6}$$

Zajímavý bude případ, kdy by se jmenovatel blížil nule. Když vyjádříme výraz:

$$\delta = \sqrt{L_1} \cdot \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} - \sqrt{L_2} \cdot \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{17.7}$$

zjistíme, že platí:

$$\lim_{M \to \sqrt{L_1 \cdot L_2}} (\delta) == \infty \cdot \left(\sqrt{L_1} \cdot u_2(t) - \sqrt{L_2} \cdot u_1(t) \right), \tag{17.8}$$

kde ovšem násobení nekonečnem chápeme tak, jak se v Mathematice provádí operace se symbolem ∞.

V reálném světě je ovšem jistě

$$\mathrm{Abs}\left(\sqrt{L_1} \cdot u_2(t) - \sqrt{L_2} \cdot u_1(t) \right) < \infty,$$

a tedy pro

$$M == \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

musí platit

$$\sqrt{L_1} \cdot u_2(t) - \sqrt{L_2} \cdot u_1(t) == 0,$$

a tedy

$$u_2(t) == \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot u_1(t). \tag{17.9}$$

Pro

$$M == \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

jsou tedy napětí svázána rovnicí nikoli diferenciální, ale algebraickou a získali jsme takzvaný ideální transformátor.

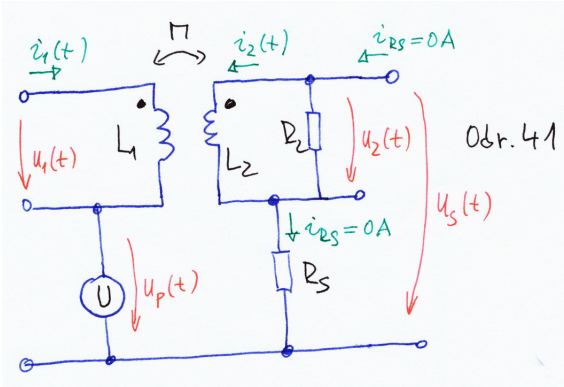
Obdobně bychom pro ideální transformátor zjistili, že platí:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(i_2(t) - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot i_1(t) \right) == 0 \implies\\ \implies i_2(t) - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot i_1(t) == konst.\end{aligned} \tag{17.10}$$

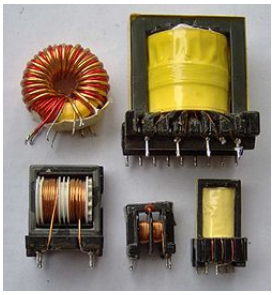
Poznamenejme, že označíme-li

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}},$$

pak pro reálné induktory platí $k \in (0; 1)$, hraniční případy odpovídají $k = 0$ induktorům zcela bez magnetické vazby a $k = 1$ ideálnímu transformátoru.



Obrázek 17.3:



Obrázek 17.4:

17.2 Galvanické oddělení

Uvažme zapojení podle Obr. 17.3. Zřejmě platí:

$$u_{R_S}(t) == i_{R_S}(t) \cdot R_S \tag{17.11}$$

a

$$\begin{aligned} u_S(t) &== u_{R_S}(t) + u_2(t) == \\ &== i_{R_S}(t) \cdot R_S + L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M \cdot \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{17.12}$$

Vidíme, že ani $u_{Rs}(t) = i_{Rs}(t) \cdot R_s$ ani $u_S(t)$ nezávisí na $u_P(t)$.

Vázané induktory se navzájem (napětí mezi svorkami jednotlivých vinutí a proudy jimi tekoucí) podle 17.1 ovlivňují, $u_P(t)$ je ale nepodstatné.

Napětí $u_P(t)$ může být i veliké a nebezpečné, galvanickým oddělením obvodů se jej ale umíme zbavit: obvody se ovlivňují, nebezpečí ale na straně indexu S (jako „sekundár“) nehrozí, resp. závisí jen na R_S, $i_2(t)$ a $\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}$ a nikoli na $u_P(t)$.

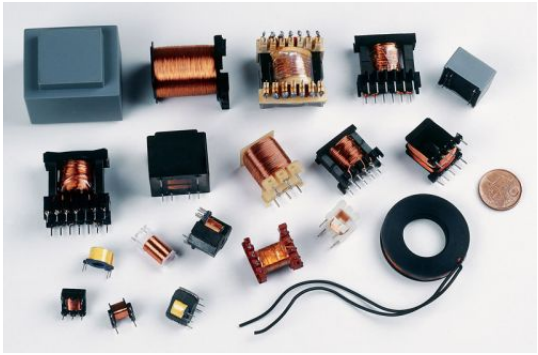
Díky galvanickému oddělení se můžeme relativně beze strachu dotýkat kovové skříně PC.

Postup při popisu vázaných induktorů pomocí HUS je metodicky zcela shodný s cívkou a kondenzátorem a ponecháváme ho čtenáři coby cvičení.

17.3 Ukázky

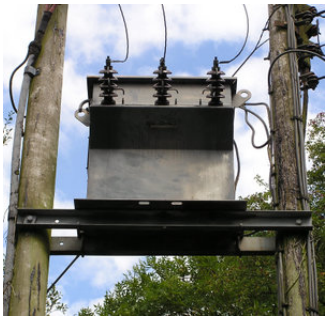
`[Tohle se musí trochu přepsat]`

Na následujících fotografiích naleznete pár ukázek transformátorů



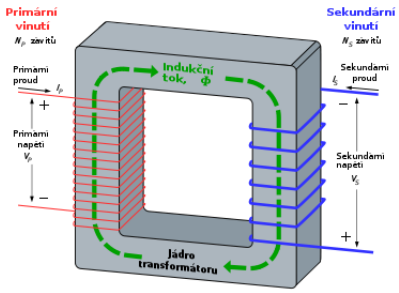
Obrázek 17.5:

Obrázek 17.6:



Obrázek 17.7:

Obrázek 17.8:


Primární vinutí
Sekundární vinutí
Indukční tok, Φ
Primární proud
Primární napětí
Sekundární proud
Sekundární napětí
Jádro transformátoru

Obrázek 17.9:

Kapitola 18

Ideální dioda

Připomeňme, že: „kde začíná nelinearita, končí HUS“. Dioda patří k tzv. nelineárním obvodovým prvkům a koncept HUS nelinearitu neumožňuje.

Ale vysvětleme si nejprve pojmy „charakteristika“ a „nelineární“.

Součástky, kterými jsme se zabývali dříve, byly popsány čísly (R, L, C, M). Grafické vyjádření jsme nepotřebovali, čísla nám stačila pro popis jejich chování.

Navíc vztahy mezi napětími a proudy (případně jejich derivacemi) byly lineární: zvětšíme-li na rezistoru napětí k-krát, vzroste proud k-krát a díky linearitě derivace vůči násobení konstantou platí totéž i pro cívku, kondenzátor, vázané induktory i homogenní vedení.

Mnoho zajímavých a užitečných součástek je *nelineárních*, čímž rozumíme to, že zvýšení napětí k-krát vyvolá obecně jinou změnu proudu.

Chování nelineárních součástek se dvěma svorkami popisujeme buď rovnicí, která je nelineární, nebo v grafické formě křivkou závislosti proudu na napětí nebo naopak.

Příklad takové charakteristiky je v notebooku `CAODioda.nb`.

V notebooku vidíme, že je-li napětí na součástce s ukázkovou charakteristikou harmonické o kruhové frekvenci ω, proud je složen nejen ze složky o frekvenci ω, ale i ze složky o frekvenci třikrát větší. Neplatí základní předpoklad HUS, kdy připojení zdroje napětí nebo proudu vyvolá v obvodu proudy a napětí jen o stejné frekvenci. Tak, jak jsme HUS zavedli, je pro nelineární obvody nepoužitelný.

Idealizovaná charakteristika (polovodičové) diody je ukázána v notebooku `CAODioda.nb`, a to na dvou grafech. Vidíme, že pro kladné napětí vzrůstá proud poměrně rychle, napětí záporné vyvolá jen proud velmi malý.

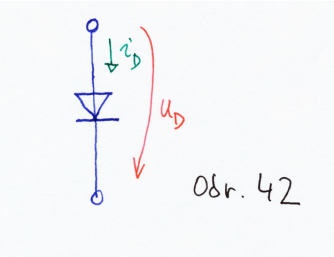
Schématická značka diody je na Obr. 18.1.

To, že proud při jedné polaritě napětí je velký a při druhé malý, využíváme například k tzv. *usměrňování* napětí: elektronická zařízení potřebují ke své činnosti obvykle napětí stejnosměrné a v elektrovodné síti je napětí střídavé (přibližně harmonického průběhu).

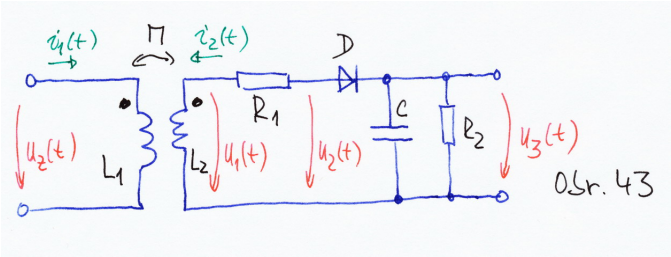
Zařízení, které ze střídavého napětí vyrábí napětí jedné polarity říkáme *usměrňovač*. Zapojení jednoduchého usměrňovače s transformátorem je na Obr. 18.2.

Vidíme, že podle velikosti kapacity kondenzátoru se mění tzv. *zvlnění* výstupního napětí.

Také si všimněme, že z napětí $230V$ efektivní hodnoty jsme získali přibližně stejnosměrné napětí asi $5V$.



Obrázek 18.1:



Obrázek 18.2:

Poznámka 1:
Zderivování rovnice pro uzel 2 výrazně zrychlí výpočet. Rovnici můžeme bez obav zderivovat, jsou-li funkce $f(t)$ a $g(t)$ na zvoleném intervalu diferencovatelné, pak pokud platí $f'(t) == g'(t)$ a $f(t_0) == g(t_0)$, pak platí $f(t) == g(t)$. Pokud tedy počáteční podmínky splňují nederivovanou rovnici, pak můžeme použít rovnici derivovanou. Jelikož NDSolve využívá pro řešení diferenciálních rovnic vyčíslených derivací, urychlí se výpočet, neboť z derivovaných rovnic se derivace vyjádří řešením lineárních rovnic.

Uvedenému zapojení říkáme *jednocestný* usměrňovač, neboť využívá jen jednu půlvlnu vstupního střídavého napětí. Obvykle používáme usměrňovač dvoucestný, který využívá půlvlny obě a jeho zapojení je na Obr. 18.3.

Naprogramování řešení dvoucestného usměrňovače ponecháváme zvídavému čtenáři coby cvičení.

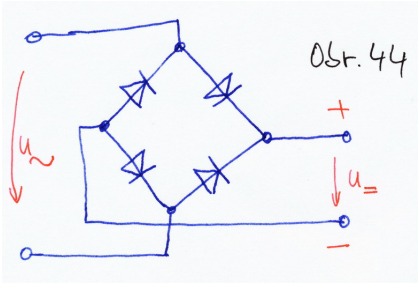
U reálných diod zohledňujeme jejich „neideálnost“ tak, že do schématu přidáváme další součástky, zejména rezistory a kondenzátory zohledňující odchylky diody od ideální charakteristiky (rezistory) a také vlastnosti reálných diod při vyšších kmitočtech (kondenzátory a pro ještě vyšší frekvence i cívky). Jenže na takové věci nemáme v ČAO čas a také to ponecháme skutečným odborníkům v této oblasti.

Reálné diody také vydrží jen nějaký proud v propustném směru (to je v oblasti, kde je proud veliký) a nějaké napětí v závěrném směru (kde je proud diodou malý). Je na to třeba pamatovat a nastudovat si jak je ten či onen mezní parametr definován a jakou má hodnotu, nejlépe v katalogu výrobce příslušné diody.

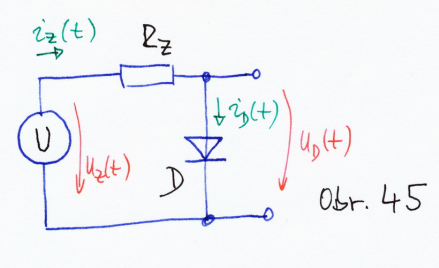
18.1 Linearizace

Protože je to v osnovách ČAO a abyste také viděli použití Taylorova rozvoje, ukážeme si linearizaci nelineárních charakteristik, tzv. linearizaci.

Linearizace není příliš potřebná, máme-li k dispozici matematické solvery jako je Mathematica (a ovšem umíme-li s nimi zacházet). Ale většina literatury, osnov a učebních textů o elektrických



Obrázek 18.3:



Obrázek 18.4:

obvodech pochází z dob, kdy takové solvery k dispozici nebyly a abychom v případě potřeby chápali, o čem je řeč... prostě jdeme na to.

Uvažme zapojení podle Obr. 18.4. Rovnice popisující obvod jsou:

$$\frac{u_Z(t) - u_D}{R_Z} == i_D == 10^{-7} \cdot \left(e^{19 \cdot u_D} - 1\right). \tag{18.1}$$

Řešení těchto rovnic znamená v grafu prostý průsečík přímky s charakteristikou diody, pokud se napětí mění, vidíme, že se průsečík pro v notebooku zadané hodnoty pohybuje po téměř přímkové části charakteristiky diody.

Řešení je provedeno solverem pro řešení obyčejných (nediferenciálních) rovnic, pro které nelze použít Solve (nejsou jednoduše převoditelné triky na aplikace inverzních funkcí), povšimněme si, že řešení trvá déle, než řešení diferenciálních rovnic popisujících usměrňovač.

Jelikož napětí zdroje mělo vyjádření

$$u_Z(t) == U_{SS} + a \cdot \sin(\omega \cdot t), \tag{18.2}$$

je zřejmé, že kolísá kolem své střední hodnoty $U_{SS} == u_Z(t = 0)$.

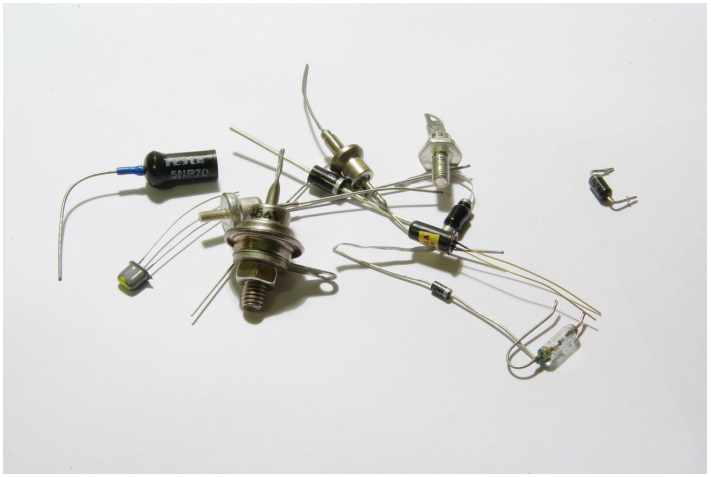
Pro střední hodnotu vyřešíme rovnice 18.1 a získáme takzvaný *pracovní bod*, tedy dvojici i_{D0}, u_{D0}.

V tomto *pracovním bodě* vypočteme první dva členy Taylorova rozvoje závislosti proudu diodou na napětí na ní a získáme tzv. *linearizovanou charakteristiku*.

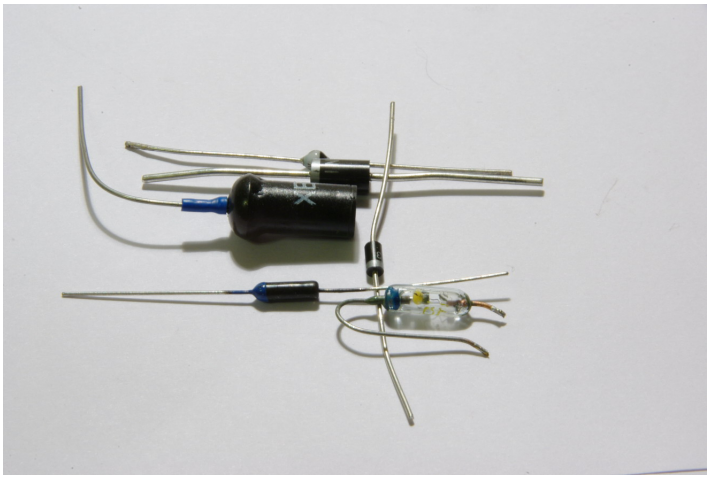
$$i_{DLin}(u_D) = i_D(u_{D0}) + \left.\frac{\mathrm{d}i_D(u_D)}{\mathrm{d}u_D}\right|_{u_D = u_{D0}} \cdot (u_D - u_{D0}), \tag{18.3}$$

kde ovšem $i_D(u_{D0})$ a $\left.\frac{\mathrm{d}i_D(u_D)}{\mathrm{d}u_D}\right|_{u_D = u_{D0}}$ jsou čísla, takže můžeme přepsat 18.3 jako

$$i_{DLin}(u_D) = i_{D0} + \frac{1}{R_D} \cdot (u_D - u_{D0}) \tag{18.4}$$



Obrázek 18.5:



Obrázek 18.6:

Rovnice 18.4 je vyčíslena v notebooku `CAODioda.nb` a také je uvedena její úprava s vyjádřením napětí. Tyto rovnice vlastně znamenají rovnice linearizovaného náhradního schématu se zdrojem proudu či napětí a rezistorem.

Nakreslit nejjednodušší náhradní schémata podle rovnice 18.4 je pěkné cvičení pro zvídavého čtenáře.

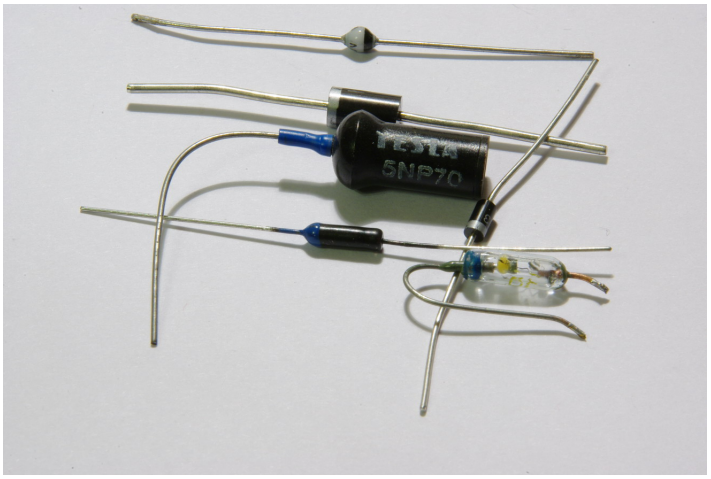
Zkuste si změnit amplitudu vstupního napětí a uvidíte, že pro malé amplitudy je výsledek řešení linearizovaných rovnic zcela uspokojivý, s větší amplitudou však odchylky narůstají.

Jednou z hlavních nevýhod linearizace je, že v případě diferenciálních rovnic nemáme žádnou obecnou metodu, která neobsahuje řešení nelinearizovaných rovnic, která by mohla odhadnout chybu vzniklou linearizací.

18.2 Ukázky

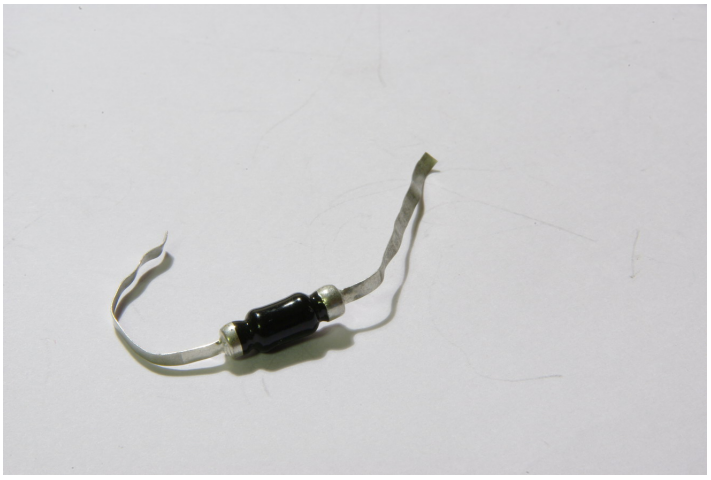
Na závěr Vám pro ilustraci přinášíme několik fotografií historických i méně historických diod.

Na následující fotografii je integrovaný usměrňovač (tzv. Graetzův můstek) podle schématu na Obr. 18.3:

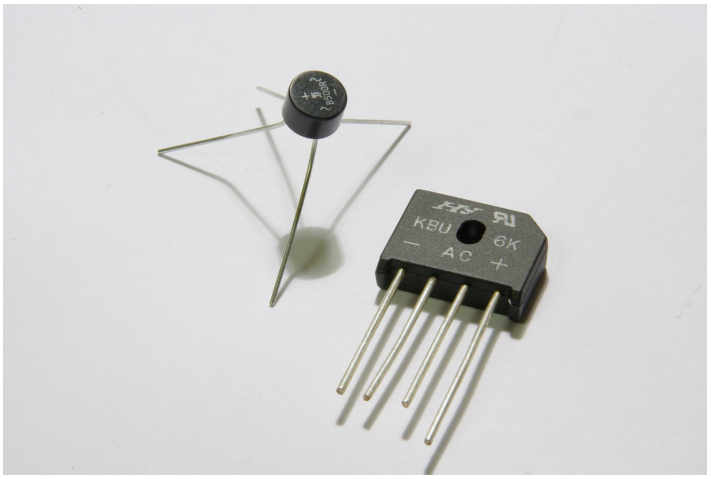


Obrázek 18.7:

Obrázek 18.8:



Obrázek 18.9:



Obrázek 18.10:

Kapitola 19

Operační zesilovače

Operační zesilovače jsou ve skutečnosti složité obvody z mnoha tranzistorů a rezistorů, někdy i kondenzátorů, vymyšlené a realizované tak, aby se blížily tzv. ideálnímu operačnímu zesilovači.

Ideální operační zesilovač totiž může posloužit mnoha způsoby, v analogových počítačích pak obvody s operačními zesilovači realizovaly některé matematické operace.

Schématická značka a elektrické náhradní schéma ideálního operačního zesilovače je na Obr. 19.1.

Rovnice ideálního OZ jsou:

$$\begin{aligned} i^+ &== i^- == 0A, \\ u_v &== A \cdot \left(u^+ - u^-\right), \quad A \in \mathbb{R}^+, A \to \infty \end{aligned} \tag{19.1}$$

Jde o tzv. *řízený zdroj napětí*, kde řídící signál neovlivňuje zbytek obvodu ($i^+ == i^+ == 0A$), výstupní napětí je úměrné rozdílu na svorkách, té s plusem říkáme *neinvertující vstup* protože neobrací, *neinvertuje* polaritu napětí na tomto vstupu, tomu s mínusem říkáme *invertující vstup*, protože polaritu obrací, mění její znaménko tak, jako u čísla násobení mínus jedničkou, ($u_v == A \cdot (u^+ - u^-), A \in \mathbb{R}^+$) a *zesílení* A je veliké ($A \to \infty$).

To je vše, co lze o ideálním OZ říci a obvykle sdělovaná polotajemná pravidla o „virtuální nule“ a podobná jsou více či méně přesnou přeformulací výše uvedeného. Nebudeme je uvádět, jsou zbytečná a mohou člověka i zavést na scestí.

Použití správných, tedy těch našich, pravidel si ukážeme na řešení obvodu podle Obr. 19.2.

Již nepíšeme explicitae, že proudy a napětí jsou funkcemi času, u ideálního OZ čas nehraje roli (a odtud hned vidíme, že ideální OZ není z tohoto světa).

Rovnice popisující náhradní obvod je

$$\frac{u_2 - u_3}{R_1} == \frac{u_3}{R_2} \tag{19.2}$$

Rovnice popisující OZ je:

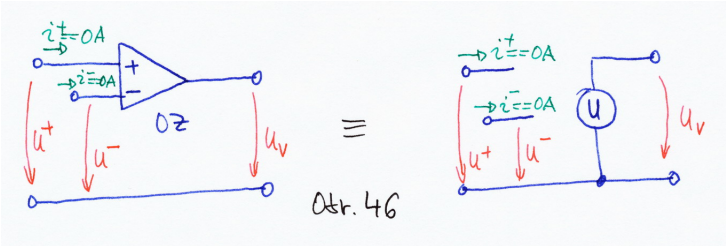
$$u_2 == A \cdot (u_1 - u_3) \tag{19.3}$$

Vyřešíme-li rovnice 19.2) a 19.3 tak, že vyjádříme u_2, získáme:

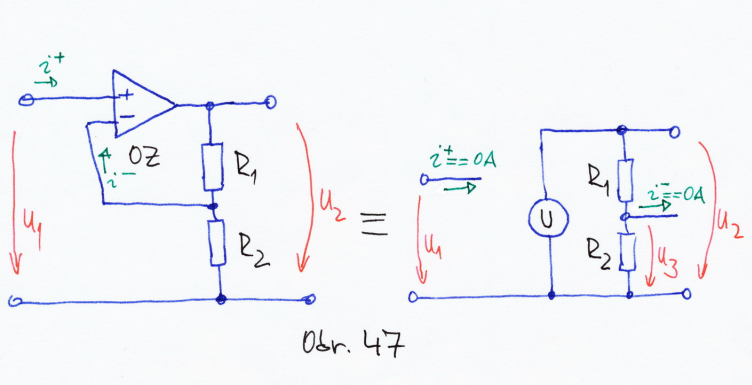
$$u_2 == u_1 \cdot \frac{A \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A \cdot R_2} == u_1 \cdot \frac{R_1 + R_2}{\frac{R_1}{A} + \frac{R_2}{A} + R_2} \tag{19.4}$$

A vypočítáme-li limitu pro $A \to \infty$, získáme:

$$u_2 == u_1 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} \tag{19.5}$$



Obrázek 19.1:



Obrázek 19.2:

Vidíme, že přenos je $\frac{R_1+R_2}{R_2}$, konstantní, nezávisí ani na čase, ani na frekvenci a skutečně se toto zapojení používá pro zesilovač s konstantním zesílením.

Model ideálního OZ je možno bez problémů použít v HUS.

19.1 Trochu reálnější model OZ

Reálný OZ musíme pochopitelně napájet, elektrická energie v něm nevzniká, nemůžeme snímat signál v rámci klasické fyziky, aniž bychom jej ovlivnili, a proudy do neinvertujícího a invertujícího vstupu nejsou nulové.

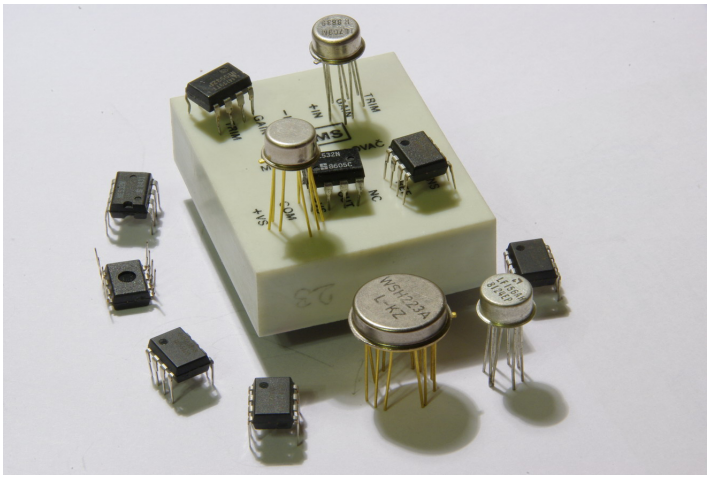
Chceme-li se přiblížit více reálným, běžně vyráběným OZ, měli bychom respektovat zejména tři základní odchylky od ideálního OZ:

- Výstupní napětí je omezeno na interval $u_v \in (-U_{SAT}, U_{SAT})$.
- Zesílení A není nekonečné.
- Zesílení A je frekvenčně závislé.

Třetí odrážku můžeme pro $u_v \in (-U_{SAT} + \Delta, U_{SAT} - \Delta)$ respektovat pomocí HUS a $A = A(\omega)$, případně přidáním kondenzátorů, odporů a cívek, podobně bychom zohlednili i nenulovost vstupních proudů.

První odrážku nemůžeme řešit pomocí HUS, omezení na daný interval obecně není slučitelné s linearitou systému. Můžeme ji ale respektovat například:

$$\begin{aligned} i^+ &== i^- == 0A, \\ u_v &== f(u^+ - u^-), \end{aligned} \tag{19.6}$$



Obrázek 19.3:

kde f je vhodná funkce. Ukázáno je to včetně chování v notebooku `CAOOperacniZesilovac.nb`.

Modrá čára vždy znamená „reálnější OZ s konečným zesílením s limitací“ a červená „reálnější OZ s konečným zesílením bez limitace“.

No a skutečné OZ mají mnohem složitější chování, jsou o tom celé knihy a v češtině vyšla jedna velmi pěkná a poučná. O OZ již víte tolik, že ty knihy můžete číst a můžete porozumět jejich sdělení. A to je také ostatně jeden z cílů ČAO: nebudete umět navrhovat obvody, jen něco málo použijete, abyste nezapomněli na zpoždění v číslicových obvodech. Ale získali jste klíč k bráně k podobným věcem.

Ale to už je jiná pohádka, jiný příběh.

19.2 Ukázky

Závěrem připojujeme na Obr. 19.3 skupinové foto několika operačních zesilovačů.