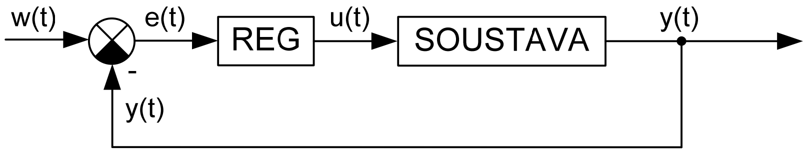
# Základy regulace




w(t)……….žádaná (řídicí) veličina

u(t)………..akční veličina

y(t)………..skutečná (regulovaná) veličina

e(t)………. regulační odchylka (rozdíl žádané a skutečné veličiny)

# Popis systému

Popis lineárního systému (spojitého) s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou můžeme vyjádřit pomocí:

a) lineární diferenciální rovnice
b) operátorového přenosu v Laplaceově transformaci
c) impulsní charakteristiky
d) přechodové funkce a jejího grafického vyjádření (přechodová charakteristika)
e) frekvenčního přenosu a jeho grafického vyjádření (frekvenční charakteristika)

## *Popis systému lineární diferenciální rovnicí*

Vztah mezi vstupem u(t) a výstupem y(t) lze popsat lineární diferenciální rovnicí:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots\dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots\dots + b_0 u(t) \qquad (1)$$

kde $a_i$, $b_i$ značí konstanty. S ohledem na fyzikální realizovatelnost musí platit, že stupeň nejvyšší derivace výstupní veličiny je vždy větší nebo roven stupni derivace vstupní veličiny $m \le n$. Řád diferenciální rovnice určuje řád systému. Uvedenou rovnici můžeme při znalosti počátečních podmínek snadno řešit.

Rovnice (1) platí pro systémy s konečnou rychlostí šíření signálu. V případě konečné rychlosti šíření (dopravníky, aj.) se jedná o systémy s tzv. **dopravním zpožděním**, kdy systém reaguje na změny vstupu s určitým časovým zpožděním $T_d$. Systém s časovým zpožděním potom lze popsat rovnicí:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i . y^n(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j . u^j(t - T_d) \qquad (2)$$

K popisu reálných systémů lze přistoupit dvěma způsoby: Buď na základě fyzikálních zákonů sestavíme nelineární diferenciální rovnici, kterou poté linearizujeme (např. Taylorovým rozvojem), nebo sestavíme lineární rovnici s již linearizovanými jednotlivými členy (např. pomocí d´Alambertova principu).

## *Laplaceova transformace*

Definice: Obrazem F(s) funkce času f(t) nebo také Laplaceovou transformací funkce f(t) rozumíme:

$$\underset{\mathrm{Re}\, s > c}{F(s)} = L\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t).e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t).e^{-st}dt \qquad (3)$$

Pro existenci tohoto obrazu musí být splněny níže uvedené požadavky na funkci f(t):

1. f(t) je jednoznačná a pro $t < 0$ je identicky rovna nule
2. f(t) je v každém konečném intervalu po úsecích hladká
3. f(t) je exponenciálního řádu, tj. existuje $c > 0$ pro které platí:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-ct}.f(t) < M \qquad (4)$$

kde M je konečná hladká konstanta. Potom integrál (3) existuje pro všechna s, pro která platí $\mathrm{Re}\ s > c$. Funkce, které splňují tyto podmínky nazýváme Laplaceovy funkce. Je-li f(t) Laplaceovou funkcí, je transformace (3) **jednoznačná** a potom každé funkci f(t) přísluší **jediný obraz** F(s) a naopak.

K Laplaceově transformaci existuje i zpětná Laplaceova transformace definovaná integrálem:

$$f(t) = \frac{1}{2j.\pi}\oint_G F(s).e^{st}ds = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s_i).e^{s_i t}\right] \qquad (5)$$

kde $s = s_i$ jsou póly funkce F(s) a $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s_i).e^{s_i t}\right]$ je reziduum pólu $s_i$. Integrace je provedena v komplexní rovině a integrační cesta je volná tak, aby obepínala všechny póly.

Jestliže funkce F(s) má jednoduché póly, potom platí:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{s_i t} \lim_{s\to s_i}(s - s_i)F(s_i) \qquad (6)$$

Pro usnadnění výpočtu obrazů často používaných funkcí, byly sestaveny příslušné dvojice (originál – obraz), tzv. slovníky operátorového počtu.

*__Tabulka č. 1:__ Základní operace Laplaceovy transformace*

| Číslo | Matematická operace | Časová oblast | Operátorová oblast |
|---|---|---|---|
| 1. | Definice Laplaceovy transformace | $f(t)$ | $F(s)=\int_0^\infty f(t).e^{-st}dt$ |
| 2. | Zpětná Laplaceova transformace | $f(t)=\frac{1}{2j.\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}dt$ | $F(s)$ |
| **3.** | **Násobení konstantou** | $f(t) = c.f(t)$ | $F(s) = c.F(s)$ |
| 4. | Změna měřítka | $f(t) = f(at)$ | $F(s)=\frac{1}{a}\cdot F(\frac{s}{a})$ |
| 5. | Posunutí funkce | $f_1(t) = f_1(t - T_d)$ | $F_1(t) = e^{-sT_d}.F(s)$ |
| **6.** | **Derivace** | $f^{(1)}(t)=\frac{df(t)}{dt}$ | $F^{(1)}(s) = s.F(s) - f(+0)$ |
| **7.** | **Integrace** | ${}^1f(t)=\int_0^t f(u)du$ | ${}^1F(s)=\frac{1}{s}F(s)$ |

*__Tabulka č. 2:__ Základní operátorový slovník*

| | Časová oblast | Operátorová oblast |
|---|---|---|
| **1.** | $f(t)$ | $F(s)$ |
| **2.** | $\delta(t)$ | $1$ |
| **3.** | $f(t) = 0,\ t < 0$<br>$f(t) = 1,\ t \geq 0$ | $\frac{1}{s}$ |
| **4.** | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 5. | $t^K$ | $\frac{K!}{s^{K+1}}$ |
| **6.** | $e^{\pm at}$ | $\frac{1}{s \mp a}$ |
| 7. | $t.e^{\pm at}$ | $\frac{1}{(s \mp a)^2}$ |
| 8. | $t^K.e^{\pm at}$ | $\frac{K!}{(s \mp a)^{K+1}}$ |
| **9.** | $1-e^{-at}$ | $\frac{a}{s(s+a)}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 10. | $\sin \omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 11. | $\cos \omega t$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 12. | $\sin(\omega t+\varphi)$ | $\dfrac{\omega \cos\varphi + s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$ |
| 13. | $\cos(\omega t+\varphi)$ | $\dfrac{s \cos\varphi - \omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$ |
| 14. | $e^{-at}.\sin(\omega t)$ | $\dfrac{\omega}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$ |
| 15. | $e^{-at}.\cos(\omega t)$ | $\dfrac{s+a}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$ |
| 16. | $e^{-at}.\sin(\omega t+\varphi)$ | $\dfrac{\omega.\cos\varphi+(s+a).\sin\varphi}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$ |
| 17. | $\sinh at$ | $\dfrac{a}{s^2-a^2}$ |
| 18. | $\cosh at$ | $\dfrac{s}{s^2-a^2}$ |

**Operátorový přenos systému** je roven poměru Laplaceova obrazu výstupu k Laplaceově obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách. Systém popsaný diferenciální rovnicí má potom přenos:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+.....+b_0}{a_n s^n+.....+a_0} \tag{7}$$

Opět musí být splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti, to znamená, že stupeň čitatele přenosu nemůže být větší než stupeň polynomu ve jmenovateli přenosu. Kořeny polynomu ve jmenovateli se nazývají **póly systému**. Kořeny polynomu v čitateli přenosu se nazývají **nuly systému**.

Záporně vzaté převrácené hodnoty reálných pólů a nul jsou časové konstanty systému. Označují se $\tau$ respektive T.

$$\tau_i=-\frac{1}{p_i};\ T_j=-\frac{1}{n_j} \qquad \text{kde } p_i,\ n_j \text{ jsou reálné} \tag{8}$$

Jsou-li všechny nuly a póly systému reálné, můžeme přenos systému vyjádřit pomocí časových konstant ve tvaru:

$$G(s)=\frac{a_0}{b_0}\cdot\frac{(1+sT_1)\cdot(1+sT_2)\cdot\cdots\cdot(1+sT_m)}{(1+s\tau_1)\cdot(1+s\tau_2)\cdot\cdots\cdot(1+s\tau_n)} \tag{9}$$

kde $\dfrac{a_0}{b_0}$ je zesílení systému.

## *Impulsní charakteristika*

Impulsní charakteristika g(t) je **odezva systému na Diracův impuls** při nulových počátečních podmínkách. Diracův impuls je idealizovaná funkce, kterou můžeme vyjádřit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \ dt = 1; \ \delta(t) = 0 \ \text{ pro každé t, } t \neq 0 \tag{10}$$

Laplaceův obraz Diracova impulsu je 1, a proto Laplaceův obraz impulsové charakteristiky je přímo roven přenosu systému:

$$L\{g(t)\} = G(s), L\{\delta(t)\} = 1 \tag{11}$$

## *Přechodová charakteristika*

Přechodová charakteristika je definovaná jako grafické vyjádření přechodové funkce. Přechodová funkce h(t) je rovna **odezvě na jednotkový skok** při nulových počátečních podmínkách. Jednotkový skok funkce je definován:

$$\mathbf{1}(t) = \left\langle \begin{matrix} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{matrix} \right. \tag{12}$$

Protože $L\{\mathbf{1}(t)\} = \frac{1}{s}$, můžeme napsat obraz přechodové funkce jako:

$$L\{h(t)\} = H(s) = \frac{1}{s} G(s) \tag{13}$$

Přechodová i impulsní charakteristika spolu velmi těsně souvisí. Impulsová charakteristika je podle předcházejících vztahů rovna derivaci přechodové charakteristiky:

$$g(t) = \frac{d\, h(t)}{dt}; \ \ h(t) = \int_{0}^{t} g(t) dt \tag{14}$$

## *Frekvenční charakteristika*

Frekvenční přenos G(jω) systému je podíl Fourierova obrazu výstupu systému a Fourierova obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \tag{15}$$

Aby funkce měla Fourierův obraz, musí být absolutně integrovatelná. Frekvenční přenos systému získáme z přenosu v Laplaceově transformaci formální změnou p za jω:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \ldots\ldots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \ldots\ldots + a_1 (j\omega) + a_0} \tag{16}$$

Frekvenční charakteristiku lze také získat Fourierovou transformací impulsové charakteristiky:

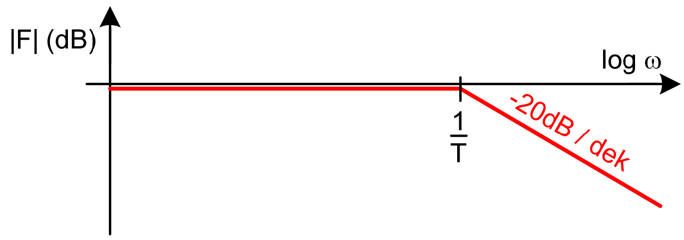
$$G(j\omega) = \int_{0}^{\infty} g(t) \cdot e^{j\omega t} dt \tag{17}$$

Frekvenční charakteristiku můžeme zobrazit v komplexní rovině o souřadnicích reálné a imaginární části frekvenčního přenosu G(jω). Frekvenční charakteristika je křivka v komplexní rovině, jejíž parametrem je kruhová frekvence ω.

Frekvenční charakteristiku můžeme také zobrazit v logaritmických souřadnicích.

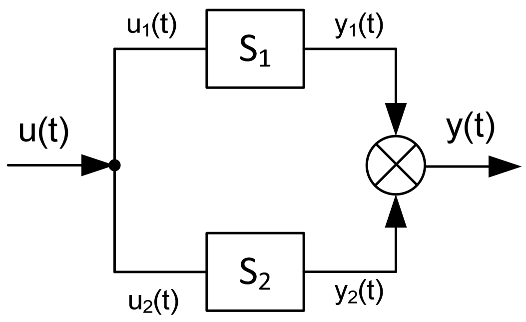
$$\log G(j\omega) = \log|G(j\omega)| + j\varphi(\omega) \qquad (18)$$

Tato frekvenční charakteristika má dvě části: 1) amplitudovou (vynášená na svislou stupnici v decibelech) představující závislost $20 \cdot \log|G(j\omega)|$ na frekvenci (vynášenou na vodorovnou stupnici v logaritmických souřadnicích); 2) fázovou $\varphi = f(\omega)$. Důvodem zavedení logaritmických frekvenčních charakteristik je zjednodušení výpočtů charakteristik složených systémů, kde kromě výhodného rozložení frekvencí na logaritmických stupnici je násobení převedeno na sčítání příslušných logaritmů.



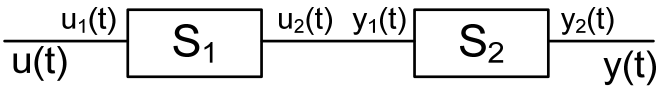
# Spojování systémů

## *Paralelní zapojení*



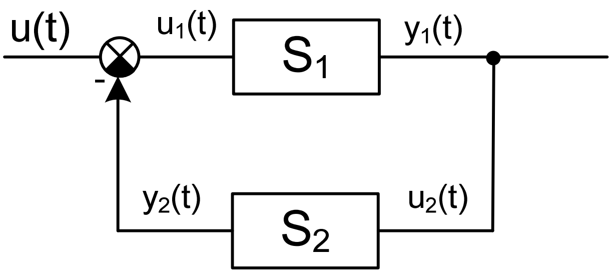

přenos: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ (19)

## *Sériové zapojení*



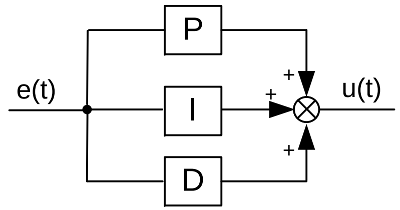

přenos: $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$ (20)

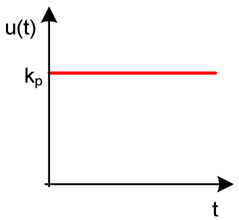
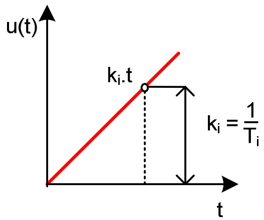
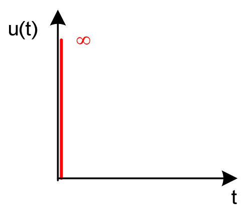
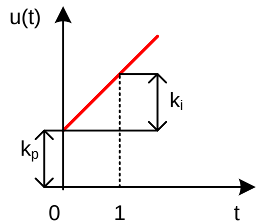
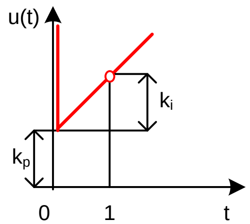
## *Zpětnovazební zapojení*




přenos: $G(s) = \dfrac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$ (21)

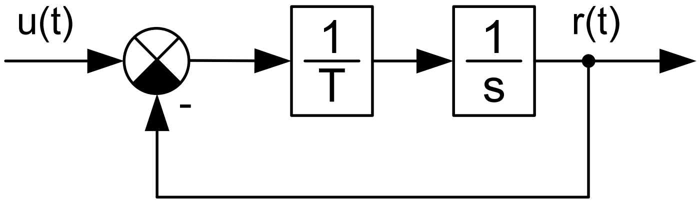
# Regulátory




| | P - regulátor | I - regulátor | D - regulátor | PI - regulátor | PID - regulátor |
|---|---|---|---|---|---|
| Diferenciální rovnice | $u(t) = k_p . e(t)$ | $u(t) = k_i . \int_0^t e(\tau) d\tau$ | $u(t) = k_d . \frac{de(t)}{dt}$ | $u(t) = k_p . e(t) + k_i . \int_0^t e(\tau) d\tau$ | $u(t) = k_p . e(t) + k_i . \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d . \frac{de(t)}{dt}$ |
| Přenos | $G(s) = k_p$ | $G(s) = \frac{k_i}{s} = \frac{1}{T_i . s}$ | $G(s) = s . k_d$ | $G(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$ | $G(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + s . k_d$ |
| Přechodová charakteristika h (t) |  |  |  |  |  |

## *Soustava se zpožděním prvního řádu*

Jedná se o soustavy s přenosem typu $G(s) = \frac{K}{1 + T \cdot s}$. Přechodová charakteristika má průběh $h(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$. V modelech lze takovou soustavu realizovat integrátorem se zápornou zpětnou vazbou:




Podle principu zpětnovazebního zapojení bude přenos této soustavy:

$$R(s) = [U(s) - R(s)] \cdot \frac{1}{T \cdot s}$$

$$R(s) \cdot \left(\frac{1}{T \cdot s} + 1\right) = U(s) \cdot \frac{1}{T \cdot s}$$

$$G(s) = \frac{R(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{T \cdot s}}{1 + \frac{1}{T \cdot s}} = \frac{1}{1 + T \cdot s}$$

V časové oblasti lze soustavu popsat následující diferenciální rovnicí:

$$r(t) = \frac{1}{T} \int_0^t [u(\tau) - r(\tau)] \, d\tau$$

$$\underline{r(t) + T \cdot r'(t) = u(t)}$$