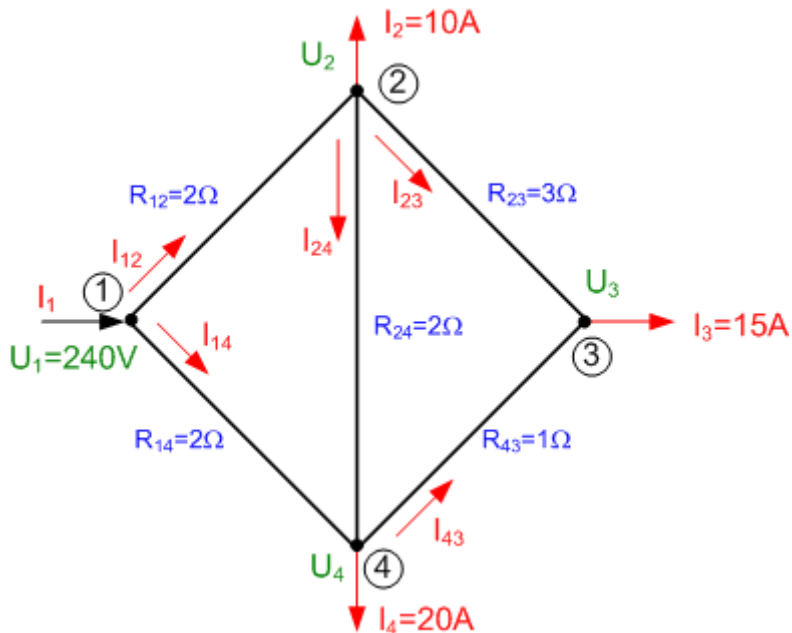


Výpočet napětí malé elektrické sítě

Elektrická stejnosměrná soustava je zobrazená na obr. 1. Vypočítejte napětí v uzlech 2, 3 a 4 a uzlový proud v bilančním uzlu 1. Odběry v uzlech, napětí bilančního uzlu a odpory jednotlivých větví viz. obr. 1.

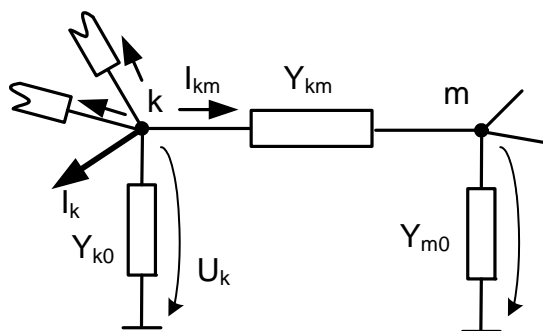
Výpočet proveďte: 1) metodou uzlových napětí MUN
2) metodou postupného zjednodušování



Obr. 1: Schéma zapojení soustavy

1. Metoda uzlových napětí MUN

Nejprve jsou na základě znalosti parametrů zadaných prvků a topologie soustavy vypočteny prvky admitanční matice, a to podle následujícího principu:



Obr. 2: Model větve v soustavě

Pro uzlový proud v uzlu k platí:

$$\hat{I}_k + \sum_{m \neq k} \hat{I}_{km} = 0 \quad (1)$$

$$\hat{I}_k = -\sum_{m \neq k} \hat{I}_{km} = -\sum_{m \neq k} \hat{Y}_{km} \cdot (\hat{U}_k - \hat{U}_m) = -\sum_{m \neq k} \hat{Y}_{km} \cdot \hat{U}_k + \sum_{m \neq k} \hat{Y}_{km} \cdot \hat{U}_m \quad (2)$$

Předcházející rovnice vlastně představuje násobení matic, kde $\hat{Y}_{(k,k)}$ odpovídá diagonálnímu prvku a $\hat{Y}_{(k,m)}$ prvku mimo diagonálu.

$$\hat{I}_k = -\hat{U}_k \cdot \hat{Y}_{(k,k)} + \sum_{m \neq k} \hat{U}_m \cdot \hat{Y}_{(k,m)} \quad (3)$$

kde $\hat{Y}_{(k,k)}$, $\hat{Y}_{(k,m)}$ jsou prvky admitanční matice soustavy. Poznamenejme, že při tvorbě admitanční matice budou prvky na diagonále záporné a mimo diagonálu kladné.

Protože máme 4 uzly, bude admitanční matice typu 4 x 4.

První prvek Y_{11} vypočítáme jako záporný součet všech admitancí, které jsou do uzlu 1 připojeny.

$$Y_{11} = -(Y_{12} + Y_{14}) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1 \quad (4)$$

Druhý prvek Y_{12} je stejný jako Y_{21} a získáme ho jako součet admitancí mezi uzly 1 a 2:

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

Další prvek Y_{13} je stejný jako Y_{31} a protože uzly 1 a 3 nejsou propojeny, je admitance rovna 0.

Takto postupujeme dále:

$$Y_{22} = -(Y_{12} + Y_{14} + Y_{24}) = -\frac{4}{3} \quad (6)$$

$$Y_{33} = -(Y_{23} + Y_{34}) = -\frac{4}{3} \quad (7)$$

$$Y_{44} = -(Y_{14} + Y_{24} + Y_{34}) = -2 \quad (8)$$

$$Y_{14} = Y_{41} = \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$Y_{23} = Y_{32} = \frac{1}{3} \quad (10)$$

$$Y_{24} = Y_{42} = \frac{1}{2} \quad (11)$$

$$Y_{34} = Y_{43} = 1 \quad (12)$$

Admitanční matice Y bude potom vypadat:

$$[Y] = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Nejprve provedeme obecné odvození pro zadanou síť. Napíšeme maticovou rovnici pomocí proudů, admitance a napětí.

$$[I] = [Y] \cdot [U] \quad (14)$$

Abych mohl vypočítat hodnoty napětí, bylo by třeba vynásobit předcházející rovnici inverzní maticí $[Y]^{-1}$ zleva, ale to není možné, protože matice $[Y]$ je singularární ($\det Y = 0$). Proto provedeme rozdělení sloupcových vektorů $[I]$, $[U]$ a matice $[Y]$ na známé a neznámé submatice:

$$\begin{pmatrix} [I_1] \\ [I_2] \\ [I_3] \\ [I_4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [Y_A] & [Y_B] \\ [Y_C] & [Y_D] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [U_1] \\ [U_2] \\ [U_3] \\ [U_4] \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} [I_1] \\ [I_{odb}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Y_A] & [Y_B] \\ [Y_C] & [Y_D] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [U_1] \\ [U_{odb}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

kde značí:

$[I_1]$ neznámá hodnota proudu v uzlu 1

$[U_1]$ známá hodnota napětí v uzlu 1

$[I_{odb}]$ známá hodnota proudových odběrů v počítaných uzlech

$[U_{odb}]$ neznámá hodnota napětí v počítaných uzlech

Rozměry matic v našem případě budou:

$$[I_1] \in R^{1 \times 1}, [U_1] \in R^{1 \times 1}, [I_{odb}] \in R^{3 \times 1}, [U_{odb}] \in R^{3 \times 1}$$

$$[Y_A] \in R^{1 \times 1}, [Y_B] \in R^{1 \times 3}, [Y_C] \in R^{3 \times 1}, [Y_D] \in R^{3 \times 3}$$

Nyní provedeme roznásobení jednotlivých submatic a dostaneme a po menších úpravách:

$$[\mathbf{I}_1] = [\mathbf{Y}_A] \cdot [\mathbf{U}_1] + [\mathbf{Y}_B] \cdot [\mathbf{U}_{odb}] \quad (17)$$

$$[\mathbf{I}_{odb}] = [\mathbf{Y}_C] \cdot [\mathbf{U}_1] + [\mathbf{Y}_D] \cdot [\mathbf{U}_{odb}] \quad / \cdot [\mathbf{Y}_D]^{-1} \quad (18)$$

$$[\mathbf{Y}_D]^{-1} \cdot [\mathbf{I}_{odb}] = [\mathbf{Y}_D]^{-1} \cdot [\mathbf{Y}_C] \cdot [\mathbf{U}_1] + [\mathbf{U}_{odb}] \quad (19)$$

$$[\mathbf{U}_{odb}] = [\mathbf{Y}_D]^{-1} \cdot [\mathbf{I}_{odb}] - [\mathbf{Y}_D]^{-1} \cdot [\mathbf{Y}_C] \cdot [\mathbf{U}_1] \quad (20)$$

Pomocí maticové rovnice (20) nejdříve vypočítáme neznámé hodnoty napětí v ostatních uzlech a poté pomocí maticové rovnice (17) vypočítáme hodnotu napájecího proudu, který vtéká do sítě.

Výsledná napětí v uzlech 2,3 a 4 potom jsou:

$$[\mathbf{U}_{odb}] = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199,375 \\ 181,563 \\ 190,625 \end{bmatrix} \text{ (V)} \quad (21)$$

Napájecí proud I_1 bude mít na základě rovnice (17) hodnotu:

$$I_1 = -45 \text{ A} \quad (22)$$

Záporná hodnota nám říká, že se jedná o dodávku a nikoli o odběr (pro stejnou orientaci všech uzlových proudů).

Proudy mezi jednotlivými uzly vypočítáme dle vztahů:

$$I_{12} = (U_1 - U_2) \cdot Y_{12} = 20,31 \text{ A} \quad (23)$$

$$I_{14} = (U_1 - U_4) \cdot Y_{14} = 24,69 \text{ A} \quad (24)$$

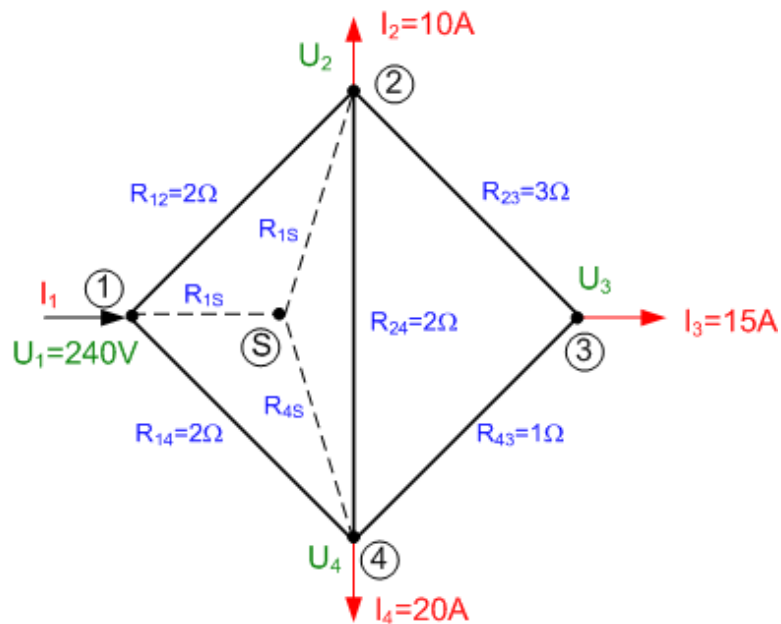
$$I_{24} = (U_2 - U_4) \cdot Y_{24} = 4,38 \text{ A} \quad (25)$$

$$I_{23} = (U_2 - U_3) \cdot Y_{23} = 5,94 \text{ A} \quad (26)$$

$$I_{43} = (U_4 - U_3) \cdot Y_{34} = 9,06 \text{ A} \quad (27)$$

2. Metoda postupného zjednodušování

Abychom mohli síť zjednodušit, je třeba odstranit Δ mezi uzly 1, 2 a 4 a to pomocí transfigurace (D \rightarrow Y):



Obr. 3: Schéma sítě s transfigurací

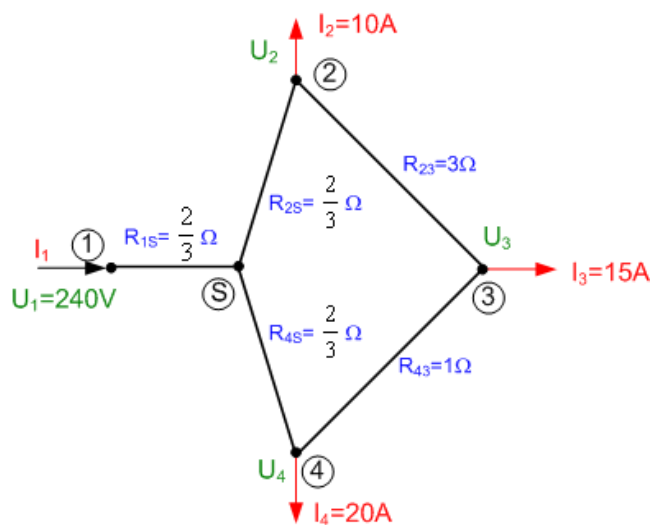
Přepočty odporů provedeme pomocí vzorců pro transfiguraci:

$$R_{1S} = \frac{R_{12} \cdot R_{14}}{R_{12} + R_{14} + R_{24}} = \frac{2}{3} \Omega \quad (28)$$

$$R_{2S} = \frac{R_{12} \cdot R_{24}}{R_{12} + R_{14} + R_{24}} = \frac{2}{3} \Omega \quad (29)$$

$$R_{4S} = \frac{R_{14} \cdot R_{24}}{R_{12} + R_{14} + R_{24}} = \frac{2}{3} \Omega \quad (30)$$

Nyní můžeme původní síť překreslit:



Obr. 4: Síť po transfiguraci

Při dalším zjednodušování sítě, musíme provést odlehčení uzlů 2 a 4 od proudů. Odlehčení provedeme rozložením odběru do sousedních uzlů a to na základě principu proudového děliče. Proudů I_2 a I_4 rozložíme do uzlů S a 3 následovně:

$$I_{23} = \frac{R_{2S}}{R_{2S} + R_{23}} \cdot I_2 = \frac{20}{11} \text{ A} \quad (31)$$

$$I_{2S} = \frac{R_{23}}{R_{2S} + R_{23}} \cdot I_2 = \frac{90}{11} \text{ A} \quad (32)$$

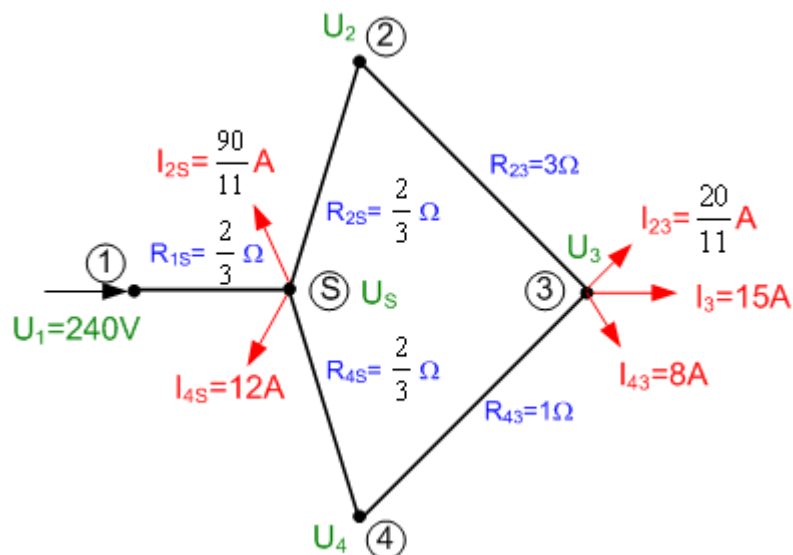
$$I_{43} = \frac{R_{4S}}{R_{4S} + R_{34}} \cdot I_4 = 8 \text{ A} \quad (33)$$

$$I_{4S} = \frac{R_{34}}{R_{4S} + R_{34}} \cdot I_4 = 12 \text{ A} \quad (34)$$

Výsledné uzlové proudy v uzlu S a 3 potom budou:

$$I_S = I_{2S} + I_{4S} = \frac{222}{11} \text{ A} \quad (35)$$

$$I_3 = I_{23} + I_{43} + I_3 = \frac{273}{11} \text{ A} \quad (35)$$



Obr. 5: Sít' po odlehčení uzlů 2 a 4

Nyní můžeme sít' zjednodušit a to tak, že úseky mezi uzly S – 2 – 3 a S – 4 – 3 sečteme sériově a obě paralelní větve nahradíme jejich paralelní kombinací:

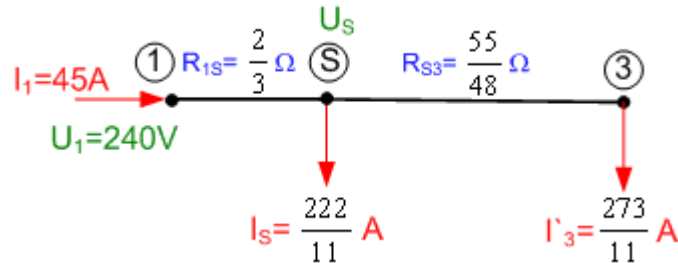
$$R_{S3a} = R_{2S} + R_{23} \quad \text{a} \quad R_{S3b} = R_{4S} + R_{43} \quad (36)$$

$$R_{S3} = \frac{R_{S3a} \cdot R_{S3b}}{R_{S3a} + R_{S3b}} = \frac{55}{48} \Omega \quad (37)$$

Proud I_1 získáme na základě součtu všech odběrů v síti.

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 = 10 + 15 + 20 = 45 \text{ A} \quad (38)$$

Celá síť se nyní zjednoduší na radiální síť napájenou z jedné strany viz. obr.6. Nyní můžeme vypočítat napětí v uzlu S a 3.

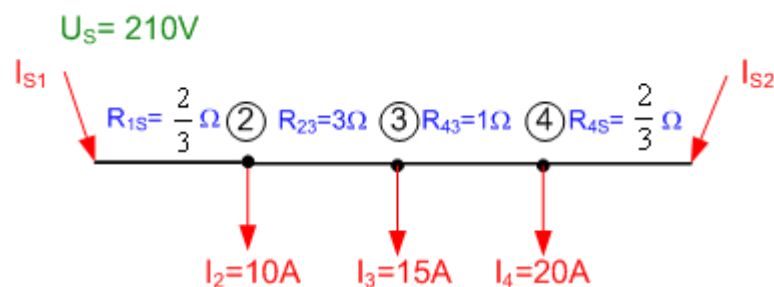


Obr. 6: Jednostranně napájená radiální síť

$$U_S = U_1 - I_1 \cdot R_{1S} = 240 - 45 \cdot \frac{2}{3} = 210 \text{ V} \quad (39)$$

$$U_3 = U_S - I_{S3} \cdot R_{S3} = 210 - \frac{273}{11} \cdot \frac{55}{48} = 181,56 \text{ V} \quad (39)$$

Nyní dopočítáme napětí v uzlech 2, 3 a 4. Výpočet provedeme pro vedení napájené ze dvou stran při stejném napětí obou napáječů U_S (viz. obr.4). Nejdříve vypočítáme proudy I_{S1} a I_{S2} pomocí momentové věty a potom na základě těchto proudů dopočítáme napětí.



Obr. 7: Vedení napájené ze dvou stran

$$I_{S1} = \frac{R_{4S} \cdot I_4 + (R_{4S} + R_{43}) \cdot I_3 + (R_{4S} + R_{43} + R_{23}) \cdot I_2}{R_{4S} + R_{43} + R_{23} + R_{1S}} = 15,94 \text{ A} \quad (40)$$

$$I_{S2} = \frac{R_{1S} \cdot I_2 + (R_{1S} + R_{23}) \cdot I_3 + (R_{1S} + R_{23} + R_{43}) \cdot I_4}{R_{4S} + R_{43} + R_{23} + R_{1S}} = 29,06 \text{ A} \quad (41)$$

$$U_2 = U_S - I_{S1} \cdot R_{1S} = 210 - 15,94 \cdot \frac{2}{3} = 199,37 \text{ V} \quad (42)$$

$$U_4 = U_S - I_{S2} \cdot R_{4S} = 210 - 29,06 \cdot \frac{2}{3} = 190,63 \text{ V} \quad (42)$$