

# Numerické řešení diferenciálních rovnic

**Omezení:** obyčejné (nikoli parciální) diferenciální rovnice, Cauchyho počáteční úloha, pouze jedna diferenciální rovnice 1. řádu

# Numerické řešení diferenciálních rovnic

**Omezení:** obyčejné (nikoli parciální) diferenciální rovnice, Cauchyho počáteční úloha, pouze jedna diferenciální rovnice 1. řádu

**Úloha:** Na intervalu  $\langle x_0, x_n \rangle$  máme řešit diferenciální rovnici

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0 ,$$

kde  $f$  (**pravá strana diferenciální rovnice**) je funkce dvou reálných proměnných a  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

# Numerické řešení diferenciálních rovnic

**Omezení:** obyčejné (nikoli parciální) diferenciální rovnice, Cauchyho počáteční úloha, pouze jedna diferenciální rovnice 1. řádu

**Úloha:** Na intervalu  $\langle x_0, x_n \rangle$  máme řešit diferenciální rovnici

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0,$$

kde  $f$  (**pravá strana diferenciální rovnice**) je funkce dvou reálných proměnných a  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

**Poznámka:** Pokud  $f$  nezávisí na  $y$ , tj.  $f(x, y) = g(x)$ , dostáváme numerickou integraci jako speciální případ řešení diferenciální rovnice

$$y'(x) = g(x)$$

---

# Existence a jednoznačnost řešení

Není obecně zaručena:

**Příklad:** Uvažujme diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}, \quad y(0) = 0,$$

kde třetí odmocninu považujeme za reálnou funkci definovanou i pro záporný argument. Má řešení např.  $y(x) = 0$  a  $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ .

# Existence a jednoznačnost řešení

Není obecně zaručena:

**Příklad:** Uvažujme diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}, \quad y(0) = 0,$$

kde třetí odmocninu považujeme za reálnou funkci definovanou i pro záporný argument. Má řešení např.  $y(x) = 0$  a  $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ .

**Věta:** Nechť funkce  $f$  je definovaná a spojitá na  $\langle x_0, x_n \rangle \times \mathbb{R}$  (tj. pro všechna  $x \in \langle x_0, x_n \rangle$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ).

Nechť je splněna **Lipschitzova podmínka**

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \langle x_0, x_n \rangle \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Pak řešení naší úlohy na intervalu  $\langle x_0, x_n \rangle$  existuje a je jednoznačné.

# Existence a jednoznačnost řešení

Není obecně zaručena:

**Příklad:** Uvažujme diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}, \quad y(0) = 0,$$

kde třetí odmocninu považujeme za reálnou funkci definovanou i pro záporný argument. Má řešení např.  $y(x) = 0$  a  $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ .

**Věta:** Nechť funkce  $f$  je definovaná a spojitá na  $\langle x_0, x_n \rangle \times \mathbb{R}$  (tj. pro všechna  $x \in \langle x_0, x_n \rangle$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ).

Nechť je splněna **Lipschitzova podmínka**

$$\exists L \in \mathbb{R} \ \forall x \in \langle x_0, x_n \rangle \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Pak řešení naší úlohy na intervalu  $\langle x_0, x_n \rangle$  existuje a je jednoznačné.

Postačující podmínka:  $\frac{\partial f}{\partial y}$  spojitá a omezená na  $\langle x_0, x_n \rangle \times \mathbb{R}$ .

---

# Interpretace úlohy a princip řešení

**Poznámka:** Ekvivalentní formulace úlohy: řešení

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Ize chápat jako integrál (neznámé) funkce  $g(t) = f(t, y(t))$  jedné proměnné nebo křivkový integrál známé funkce  $f$  přes (neznámou) křivku s parametrizací  $(t, y(t))$ ,  $t \in \langle x_0, x_n \rangle$ .

# Interpretace úlohy a princip řešení

**Poznámka:** Ekvivalentní formulace úlohy: řešení

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Ize chápat jako integrál (neznámé) funkce  $g(t) = f(t, y(t))$  jedné proměnné nebo křivkový integrál známé funkce  $f$  přes (neznámou) křivku s parametrizací  $(t, y(t))$ ,  $t \in \langle x_0, x_n \rangle$ .

Interval  $\langle x_0, x_n \rangle$  rozdělíme na  $n$  dílčích intervalů délky  $h = (x_n - x_0)/n$ . Získáme **uzlové body**  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Správné hodnoty řešení v uzlových bodech,  $y(x_i)$ , nahradíme odhady  $y_i$ .

Hodnoty pravé strany:  $f_i = f(x_i, y_i)$ .

---



# Obecný postup řešení

Generujeme posloupnost  $y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . V kroku  $i + 1$  počítáme z odhadů  $y_0, \dots, y_i$  odhad  $y_{i+1}$ . Přesné řešení:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

odhadujeme pomocí

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt .$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i .$$

Jednotlivé metody se liší pouze odhadem  $\Delta y_i$ .

---

# Rungovy-Kuttovy metody 1: Eulerova metoda

Je zobecněním metody levého odhadu; funkci  $f(t, y(t))$  nahrazujeme její hodnotou  $f(x_i, y_i)$  v bodě  $x_i$

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) dt = h f(x_i, y_i) ,$$
$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) = y_i + h f_i .$$

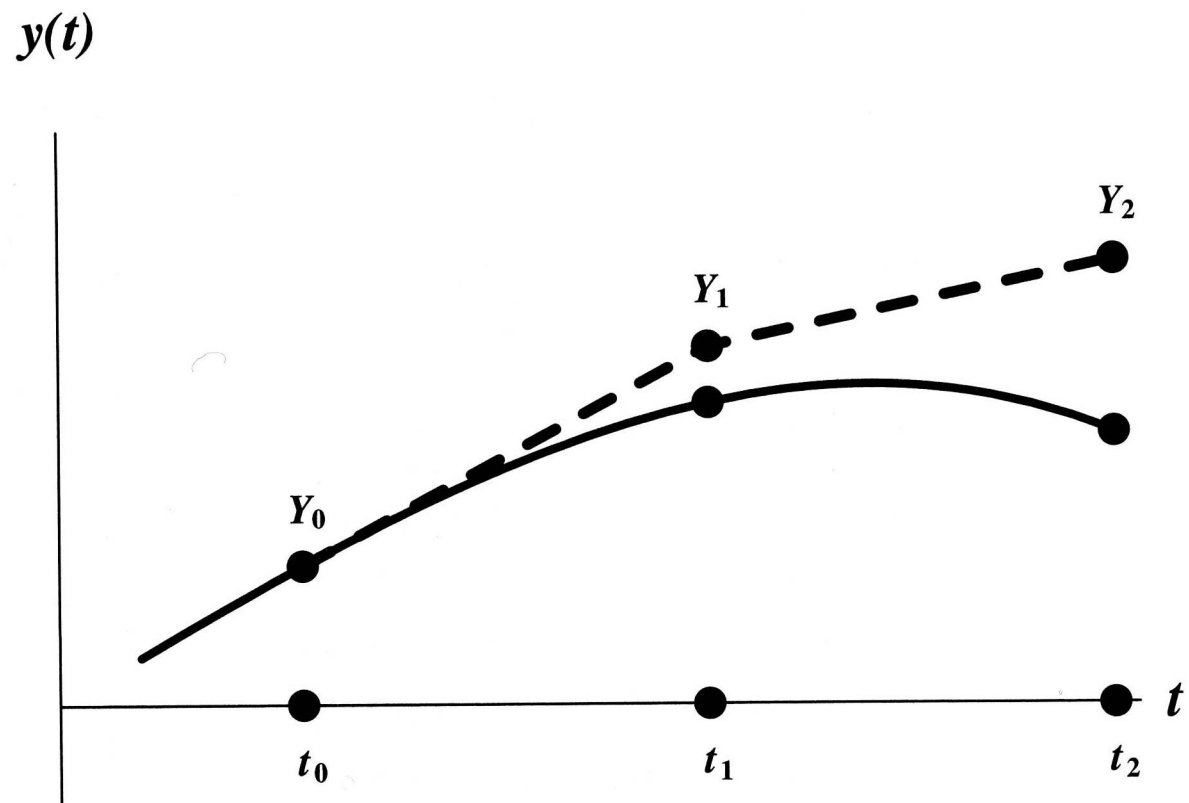
# Rungovy-Kuttovy metody 1: Eulerova metoda

Je zobecněním metody levého odhadu; funkci  $f(t, y(t))$  nahrazujeme její hodnotou  $f(x_i, y_i)$  v bodě  $x_i$

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) dt = h f(x_i, y_i) ,$$
$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) = y_i + h f_i .$$

Geometrický význam:  $f_i = f(x_i, y_i)$  je směrnice úsečky vedené body  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ .

---



**The Euler method approximation**

Příklad:

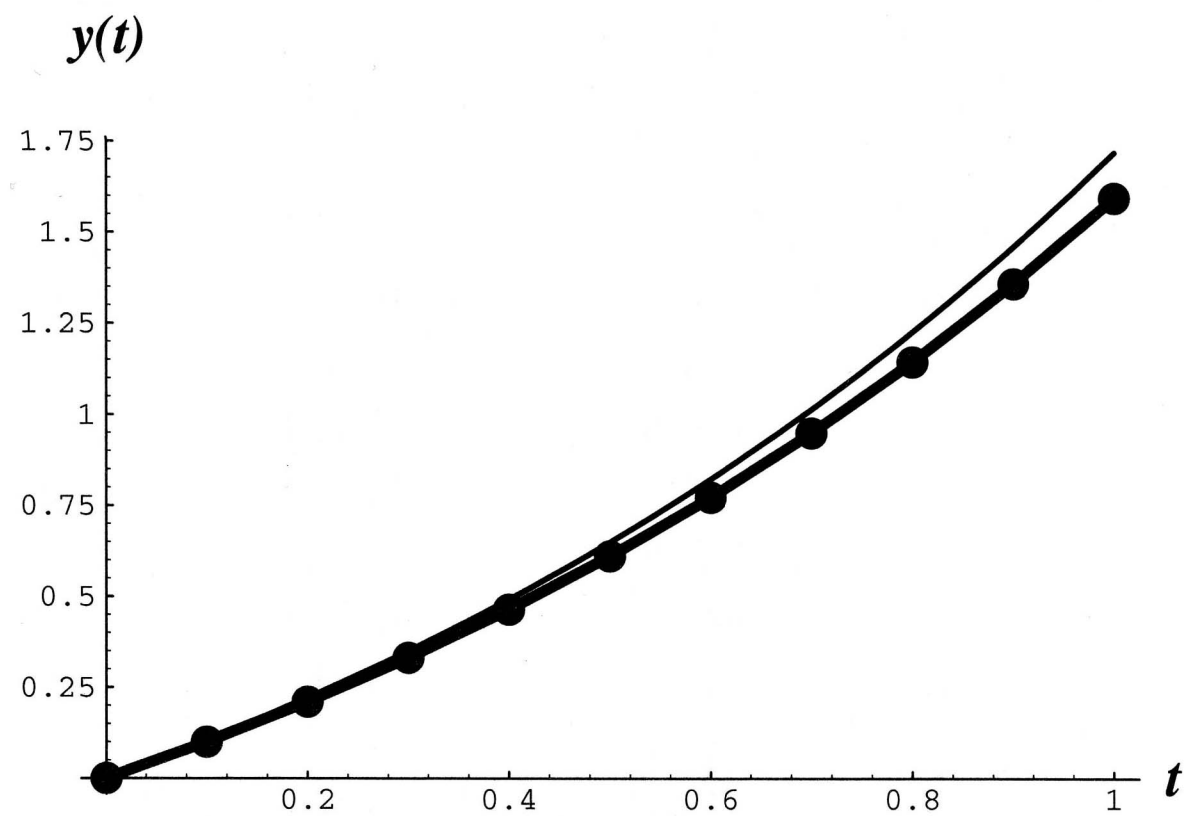
$$\begin{cases} y' = y + 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + 0.1(Y_n + 1),$$

$$Y_1 = Y_0 + 0.1(Y_0 + 1) = 0.1$$

$$Y_2 = Y_1 + 0.1(Y_1 + 1) = 0.1 + 0.1(1.1) = 0.21.$$

$n$	$t_n$	$Y_n$	$y_{\text{exact}}(t_n)$
0	0.0	0.0	0.0
1	0.1	0.1	0.10517
2	0.2	0.21	0.22140
3	0.3	0.331	0.34986
4	0.4	0.4641	0.49182
5	0.5	0.61050	0.64872
6	0.6	0.77156	0.82212
7	0.7	0.94871	1.01375
8	0.8	1.14359	1.22554
9	0.9	1.35795	1.45960
10	1.0	1.59370	1.71828



# Odhad chyby

Taylorův rozvoj funkce  $y$  se středem v  $x_0$  vyhodnotíme v bodě  $x_1$ :

$$y(x_1) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(\xi),$$

kde  $\xi \in \langle x_0, x_1 \rangle$ .

$$y(x_1) = \underbrace{y(x_0) + h f(x_0, y_0)}_{y_1} + \frac{h^2}{2} y''(\xi),$$

$$y(x_1) - y_1 = \frac{h^2}{2} y''(\xi).$$

Chyba na konci prvního kroku je úměrná  $h^2$ .

V dalších krocích vycházíme z počáteční podmínky, která není přesná.

Přesto lze za jistých podmínek odvodit, že chyba je zhruba úměrná  $h^2$  a počtu kroků  $n = \frac{x_n - x_0}{h}$ .

Chyba na konci daného intervalu je úměrná  $\frac{1}{h} h^2 = h \Rightarrow$  metoda 1. řádu.

---

# Rungovy-Kuttovy metody 2: První modifikace

## Eulerovy metody

Je zobecněním obdélníkové metody; funkci  $f(t, y(t))$  v ní nahradíme opět hodnotou v bodě  $\frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_i + \frac{h}{2}$ . Jako druhý argument funkce  $f$  použijeme výsledek pomocného kroku poloviční délky (Eulerovou metodou):

$$\eta_i = y_i + \frac{h}{2} f_i .$$

$$f(t, y(t)) \approx f\left(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i\right)$$

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i\right) dt = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i\right) .$$

Metoda 2. řádu.

---



# Rungovy-Kuttovy metody 3: Druhá modifikace

## Eulerovy metody (Heunova metoda)

Je zobecněním lichoběžníkové metody integrace; funkci  $f(t, y(t))$  nahradíme lineární funkcí, proloženou hodnotami v krajních bodech intervalu:

v  $x_i$ :  $f_i = f(x_i, y_i)$ ,

v  $x_{i+1}$ : neznalost  $y$ -ové souřadnice řešíme pomocným krokem (délky  $h$  Eulerovou metodou):

$$\theta_i = y_i + h f_i .$$

Funkci  $f(t, y(t))$  nahradíme lineární funkcí, jejíž graf prochází body  $(x_i, f(x_i, y_i))$ ,  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}, \theta_i))$ .

$$\Delta y_i = \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \theta_i)) .$$

Metoda 2. řádu.

---

**Příklad:**

$$\begin{cases} y' = 5 - t^2 y^3, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

$$f(t, Y) = 5 - t^2 Y^3$$

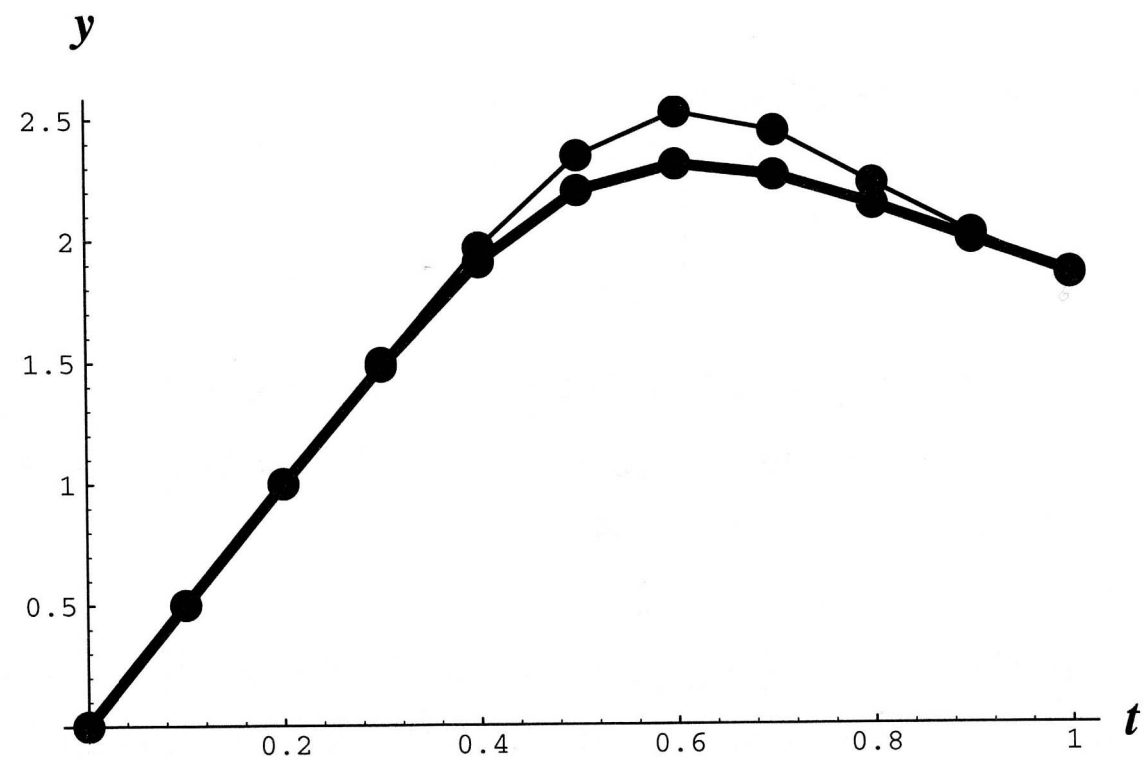
$$f(t_n, Y_n) = Y_n + h(5 - t_n^2 Y_n^3)$$

$$f(t_{n+1}, Y_n + h f(t_n, Y_n)) = f(t_n + h, Y_n + h(5 - t_n^2 Y_n^3))$$

$$= 5 - (t_n + h)^2 (Y_n + h(5 - t_n^2 Y_n^3))^3.$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2} \left( 10 - t_n^2 Y_n^3 - (t_n + h)^2 (Y_n + h(5 - t_n^2 Y_n^3))^3 \right)$$

$t$	$Y_n$ (Euler)	$Y_n$ (Heun)
0.0	0.0	0.0
0.1	0.50000	0.49994
0.2	0.99987	0.99788
0.3	1.49588	1.48089
0.4	1.96575	1.90680
0.5	2.34422	2.20007
0.6	2.52216	2.30745
0.7	2.44457	2.26215
0.8	2.22875	2.14016
0.9	2.02021	1.99622
1.0	1.85236	1.85650



# Rungovy-Kuttovy metody 4: Rungova-Kuttova metoda 4. řádu

Je zobecněním Simpsonovy metody; nejprve vypočteme pomocné body a hodnoty pravé strany v nich,

$$k_{i,1} = f(x_i, y_i),$$

$$k_{i,2} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_{i,1}\right),$$

$$k_{i,3} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_{i,2}\right),$$

$$k_{i,4} = f(x_i + h, y_i + h k_{i,3}).$$

Integrál nahradíme lineární kombinací těchto hodnot:

$$\Delta y_i = \frac{h}{6} (k_{i,1} + 2k_{i,2} + 2k_{i,3} + k_{i,4}).$$

---

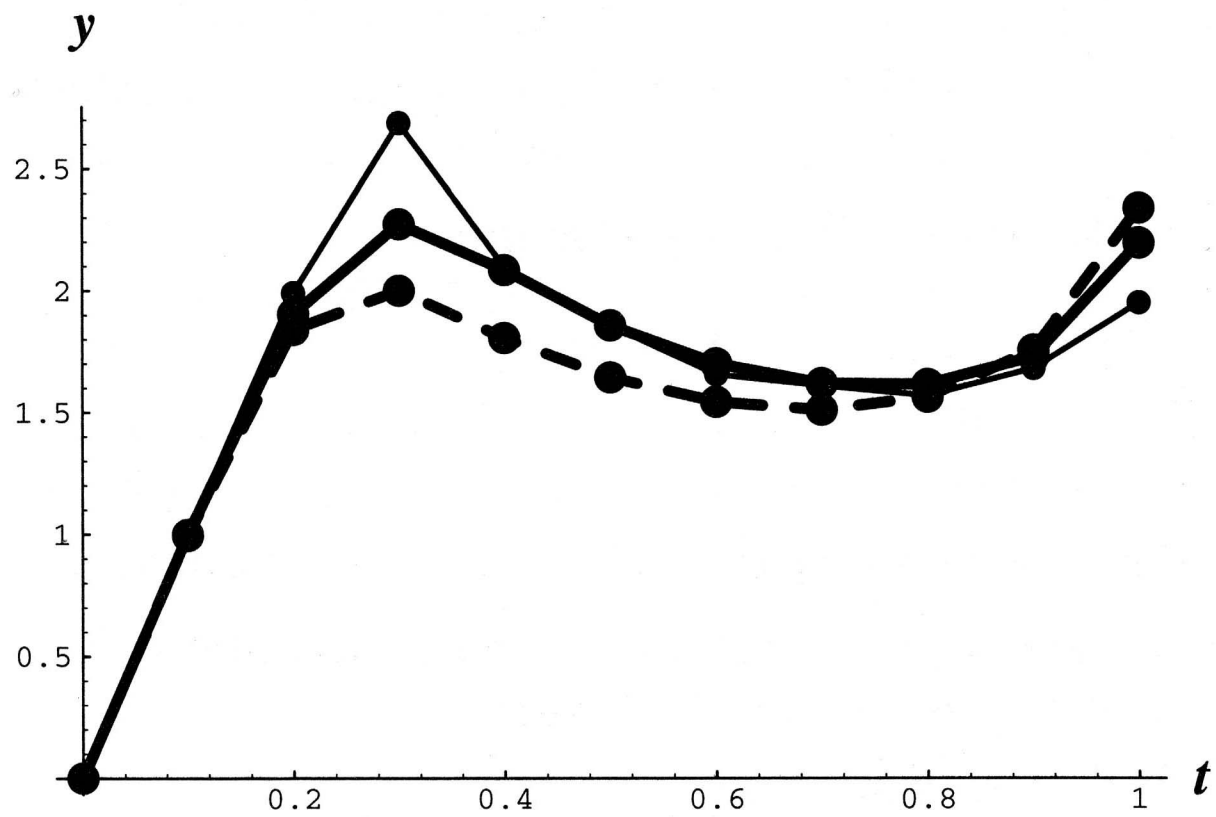
Příklad:

$$\begin{cases} y' = 10(1 - t^2 y^3 + t^4 y^3), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$
$$f(t, y) = 10(1 - t^2 y^3 + t^4 y^3)$$

$$a_{1,0} = f(0, 0) = 10, \quad a_{2,0} = f(0.05, 0.05 \times 10) = 9.99688,$$
$$a_{3,0} = f(0.05, 0.05 \times 9.99688) = 9.99688, \quad a_{4,0} = f(0.1, 0.1 \times 9.99688) = 9.90109.$$

$$Y_1 = 0.0166667(a_{1,0} + 2a_{2,0} + 2a_{3,0} + a_{4,0}) = 0.998144.$$

$n$	$t_n$	$Y_n$ (Euler)	$Y_n$ (Heun)	$Y_n$ (Runge-Kutta)
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.1	1.0	0.99505	0.99814
2	0.2	1.99010	1.83994	1.90323
3	0.3	2.68744	1.99998	2.27305
4	0.4	2.09780	1.80606	2.08513
5	0.5	1.85703	1.64398	1.85736
6	0.6	1.65626	1.54332	1.70104
7	0.7	1.60945	1.50988	1.61893
8	0.8	1.56762	1.56258	1.61459
9	0.9	1.68005	1.75588	1.72850
10	1.0	1.95025	2.33931	2.19565



# Rungovy-Kuttovy metody 5: Obecné

## Rungovy-Kuttovy metody

Odhadují integrál  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt$  z několika hodnot funkce  $f$  v bodech, získaných z výchozích hodnot  $x_i, y_i$  a pomocných kroků. Tyto hodnoty jsou zkombinovány tak, aby se vykompenzovaly chyby nejnižších řádů.

---

# Vícekrokové metody

## Metody

- ◆ jednokrokové: využívají  $x_i, y_i$  a  $f_i = f(x_i, y_i)$   
(např. Rungeovy-Kuttovy),



# Vícekové metody

## Metody

- ♦ jednokrokové: využívají  $x_i, y_i$  a  $f_i = f(x_i, y_i)$  (např. Rungeovy-Kuttovy),
- ♦ vícekové: využívají i výsledky předcházejících kroků, tj.  $x_j, y_j$  a  $f_j = f(x_j, y_j)$ ,  $j = i, i - 1, \dots, i - s + 1$  (pro  $s$ -krokovou metodu).

Vícekové metody dovolují zvýšit řád metody bez pomocných kroků.

Nicméně k nastartování  $s$ -krokové metody potřebujeme  $s$  hodnot  $y_0, y_1, \dots, y_{s-1}$ . Ty získáváme **startovací metodou** (některou z jednokrokových metod).

---

# Adamsovy-Bashforthovy metody (explicitní)

$s$  hodnotami pravé strany  $f_i, f_{i-1}, \dots, f_{i-s+1}$

v uzlových bodech  $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-s+1}$

proložíme interpolační polynom  $\varphi_i$  a ten integrujeme místo  $f(t, y(t))$ :

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(t) dt .$$

Není potřeba počítat  $\varphi_i$ , neboť

$$\Delta y_i = h \sum_{j=0}^{s-1} w_j f_{i-j} ,$$

kde  $w_j$  jsou předem známé koeficienty.

Polynomem nahrazujeme pravou stranu,  $f(t, y(t))$ , nikoli řešení,  $y(t)$  !

---

Pro  $s = 1$ :

$\varphi_i = f_i$  je konstantní  $\Rightarrow$  Eulerova metoda.

Pro  $s = 1$ :

$\varphi_i = f_i$  je konstantní  $\Rightarrow$  Eulerova metoda.

Pro  $s = 2$ :

$\varphi_i$  je lineární polynom proložený body  $(x_i, f_i)$ ,  $(x_{i-1}, f_{i-1})$ ,

$$\varphi_i(t) = f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} (t - x_i)$$
$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(t) dt = h f_i + \frac{h}{2} (f_i - f_{i-1}) = \frac{h}{2} (3f_i - f_{i-1}).$$

Pro  $s = 1$ :

$\varphi_i = f_i$  je konstantní  $\Rightarrow$  Eulerova metoda.

Pro  $s = 2$ :

$\varphi_i$  je lineární polynom proložený body  $(x_i, f_i)$ ,  $(x_{i-1}, f_{i-1})$ ,

$$\varphi_i(t) = f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} (t - x_i)$$
$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(t) dt = h f_i + \frac{h}{2} (f_i - f_{i-1}) = \frac{h}{2} (3f_i - f_{i-1}).$$

Pro  $s = 3$ :

$$\Delta y_i = \frac{h}{12} (23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}),$$

Pro  $s = 1$ :

$\varphi_i = f_i$  je konstantní  $\Rightarrow$  Eulerova metoda.

Pro  $s = 2$ :

$\varphi_i$  je lineární polynom proložený body  $(x_i, f_i)$ ,  $(x_{i-1}, f_{i-1})$ ,

$$\varphi_i(t) = f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} (t - x_i)$$

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(t) dt = h f_i + \frac{h}{2} (f_i - f_{i-1}) = \frac{h}{2} (3f_i - f_{i-1}).$$

Pro  $s = 3$ :

$$\Delta y_i = \frac{h}{12} (23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}),$$

Pro  $s = 4$ :

$$\Delta y_i = \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}).$$


---

Řád metody je  $s$  = počet bodů použitých v aproximaci.

Řád metody je  $s$  = počet bodů použitých v aproximaci.

Výhoda:

- ◆ jednoduchost



Řád metody je  $s$  = počet bodů použitých v aproximaci.

Výhoda:

- ♦ jednoduchost

Nevýhody:

- ♦ různá znaménka koeficientů ( $\Rightarrow$  zaokrouhlovací chyby)
- ♦ chyba metody způsobená extrapolací polynomem

$\Rightarrow$  snaha vyhnout se extrapolaci

---

# Adamsovy-Moultonovy metody (implicitní)

Pravou stranu  $f(t, y(t))$  aproximujeme interpolačním polynomem  $\varphi_i$  proloženým hodnotami  $f_i, f_{i-1}, \dots, f_{i-s+1}$  a hodnotou v bodě  $x_{i+1}$ , tj.  
$$f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) .$$

# Adamsovy-Moultonovy metody (implicitní)

Pravou stranu  $f(t, y(t))$  aproximujeme interpolačním polynomem  $\varphi_i$  proloženým hodnotami  $f_i, f_{i-1}, \dots, f_{i-s+1}$  a hodnotou v bodě  $x_{i+1}$ , tj.  
 $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ .

Opět se redukuje na tvar

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i = h \sum_{j=-1}^{s-1} w_j f_{i-j} ,$$

kde  $w_j$  jsou předem vypočtené koeficienty (zde jiné).

# Adamsovy-Moultonovy metody (implicitní)

Pravou stranu  $f(t, y(t))$  aproximujeme interpolačním polynomem  $\varphi_i$  proloženým hodnotami  $f_i, f_{i-1}, \dots, f_{i-s+1}$  a hodnotou v bodě  $x_{i+1}$ , tj.  $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ .

Opět se redukuje na tvar

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i = h \sum_{j=-1}^{s-1} w_j f_{i-j},$$

kde  $w_j$  jsou předem vypočtené koeficienty (zde jiné).

Dostáváme rovnici

$$y_{i+1} = y_i + h w_{-1} f(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=0}^{s-1} w_j f_{i-j}$$

pro neznámou hodnotu  $y_{i+1}$ , která je tímto určena **implicitně**.

---

Pro  $s = 1$ :  $\varphi_i$  je lineární polynom proložený body  $(x_i, f_i)$ ,  $(x_{i+1}, f_{i+1})$ , tj.

$$\varphi_i(t) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h} (t - x_i) .$$

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(t) dt = \frac{h}{2} (f_{i+1} + f_i) ,$$

po dosazení  $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2} (f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f_i) .$$

Pro  $s = 1$ :  $\varphi_i$  je lineární polynom proložený body  $(x_i, f_i)$ ,  $(x_{i+1}, f_{i+1})$ , tj.

$$\varphi_i(t) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h} (t - x_i) .$$

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(t) dt = \frac{h}{2} (f_{i+1} + f_i) ,$$

po dosazení  $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2} (f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f_i) .$$

Pro  $s = 2$ :

$$\Delta y_i = \frac{h}{12} (5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f_i - f_{i-1}) ,$$

Pro  $s = 1$ :  $\varphi_i$  je lineární polynom proložený body  $(x_i, f_i)$ ,  $(x_{i+1}, f_{i+1})$ , tj.

$$\varphi_i(t) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h} (t - x_i) .$$

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(t) dt = \frac{h}{2} (f_{i+1} + f_i) ,$$

po dosazení  $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2} (f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f_i) .$$

Pro  $s = 2$ :

$$\Delta y_i = \frac{h}{12} (5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f_i - f_{i-1}) ,$$

Pro  $s = 3$ :

$$\Delta y_i = \frac{h}{24} (9f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) .$$

Řád metody je  $s + 1$  = počet bodů použitých v aproximaci.



Řád metody je  $s + 1$  = počet bodů použitých v aproximaci.

Výhoda:

- ♦ vyšší přesnost

Řád metody je  $s + 1$  = počet bodů použitých v aproximaci.

Výhoda:

- ♦ vyšší přesnost

Nevýhody:

- ♦ obtížné řešení implicitní rovnice (zřídka možné exaktně, numerické řešení zvyšuje složitost)
  - ♦ i chyba metody způsobená interpolací polynomem může být značná
-

# Metody prediktor-korektor

Základem je **korektor**, což je některá z implicitních metod, v níž se příslušná rovnice řeší numericky.

V  $j$ -té iteraci z ní vypočítáme odhad  $y_{i+1,j}$  hodnoty  $y_{i+1}$ , přičemž na pravé straně použijeme odhad  $y_{i+1,j-1}$  získaný v předchozí iteraci.

$$y_{i+1,j} = y_i + h \sum_{j=0}^{s-1} w_j f_{i-j} + h w_{-1} f(x_{i+1}, y_{i+1,j-1}).$$

Počáteční odhad  $y_{i+1,0}$  najdeme z výsledků předchozích kroků (event. z počátečních podmínek) jinou metodou, zvanou **prediktor**, např. některou z explicitních metod.

---

# Řídicí mechanismus

P = prediktor (**Predictor**)

C = korektor (**Corrector**)

E = vyhodnocení pravé strany (**Evaluation**)

Nejčastější možnosti:

- ♦ cyklus korektoru provádět tak dlouho, dokud není rozdíl  $y_{i+1,j} - y_{i+1,j-1}$  dostatečně malý,
  - ♦ konstantní počet  $k$  opakování korektoru,  $P(EC)^kE$ ,
  - ♦ jediný průchod korektorem, PECE.
-

# Adamsovy metody

Prediktor: Adamsova-Bashforthova metoda

Korektor: Adamsova-Moultonova metoda

**Příklad:** Nejjednodušší varianta Adamsovy metody,  $s = 1$ :

Prediktor: Eulerova metoda (1. řádu)

$$y_{i+1,0} = y_i + h f_i .$$

Korektor: Adamsova-Moultonova metoda 2. řádu

$$y_{i+1,j+1} = y_i + \frac{h}{2} \left( f_i + f(x_{i+1}, y_{i+1,j}) \right) .$$

# Adamsovy metody

Prediktor: Adamsova-Bashforthova metoda

Korektor: Adamsova-Moultonova metoda

**Příklad:** Nejjednodušší varianta Adamsovy metody,  $s = 1$ :

Prediktor: Eulerova metoda (1. řádu)

$$y_{i+1,0} = y_i + h f_i .$$

Korektor: Adamsova-Moultonova metoda 2. řádu

$$y_{i+1,j+1} = y_i + \frac{h}{2} \left( f_i + f(x_{i+1}, y_{i+1,j}) \right) .$$

Volba startovací metody (jejího řádu)

# Adamsovy metody

Prediktor: Adamsova-Bashforthova metoda

Korektor: Adamsova-Moultonova metoda

**Příklad:** Nejjednodušší varianta Adamsovy metody,  $s = 1$ :

Prediktor: Eulerova metoda (1. řádu)

$$y_{i+1,0} = y_i + h f_i .$$

Korektor: Adamsova-Moultonova metoda 2. řádu

$$y_{i+1,j+1} = y_i + \frac{h}{2} \left( f_i + f(x_{i+1}, y_{i+1,j}) \right) .$$

Volba startovací metody (jejího řádu)

Volba kroku

---

# Richardsonova extrapolace při řešení diferenciálních rovnic

$\tilde{y}(x, h)$  ... numerické řešení v bodě  $x$ , získané s krokem  $h$

$\tilde{y}(x, 2h)$  ... numerické řešení v bodě  $x$ , získané s krokem  $2h$

(zde  $q = 2$ )

Chyba odhadu  $\tilde{y}(x, h)$  bude zhruba  $2^p \times$  menší než chyba odhadu  $\tilde{y}(x, 2h)$

$\Rightarrow$  **odhad chyby výsledku  $\tilde{y}(x, h)$  metodou polovičního kroku:**

$$\tilde{y}(x, h) - y(x) \approx \frac{1}{2^p - 1}(\tilde{y}(x, 2h) - \tilde{y}(x, h)) .$$

Odhad výsledku zpřesněný Richardsonovou extrapolací:

$$y(x) \approx \tilde{y}(x, h) + \frac{1}{2^p - 1}(\tilde{y}(x, h) - \tilde{y}(x, 2h)) .$$



# Richardsonova extrapolace při řešení diferenciálních rovnic

$\tilde{y}(x, h)$  ... numerické řešení v bodě  $x$ , získané s krokem  $h$

$\tilde{y}(x, 2h)$  ... numerické řešení v bodě  $x$ , získané s krokem  $2h$

(zde  $q = 2$ )

Chyba odhadu  $\tilde{y}(x, h)$  bude zhruba  $2^p \times$  menší než chyba odhadu  $\tilde{y}(x, 2h)$

$\Rightarrow$  **odhad chyby výsledku  $\tilde{y}(x, h)$  metodou polovičního kroku:**

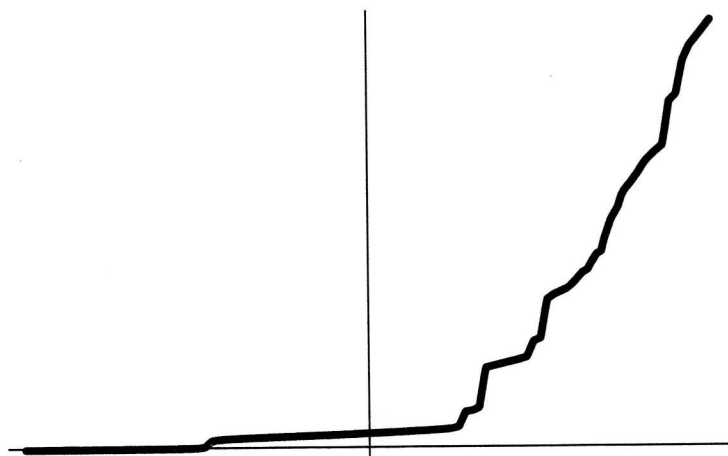
$$\tilde{y}(x, h) - y(x) \approx \frac{1}{2^p - 1}(\tilde{y}(x, 2h) - \tilde{y}(x, h)) .$$

Odhad výsledku zpřesněný Richardsonovou extrapolací:

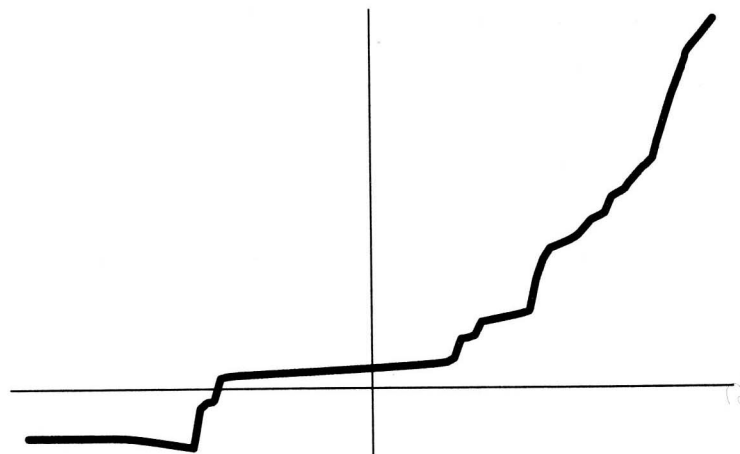
$$y(x) \approx \tilde{y}(x, h) + \frac{1}{2^p - 1}(\tilde{y}(x, h) - \tilde{y}(x, 2h)) .$$

Richardsonova extrapolace

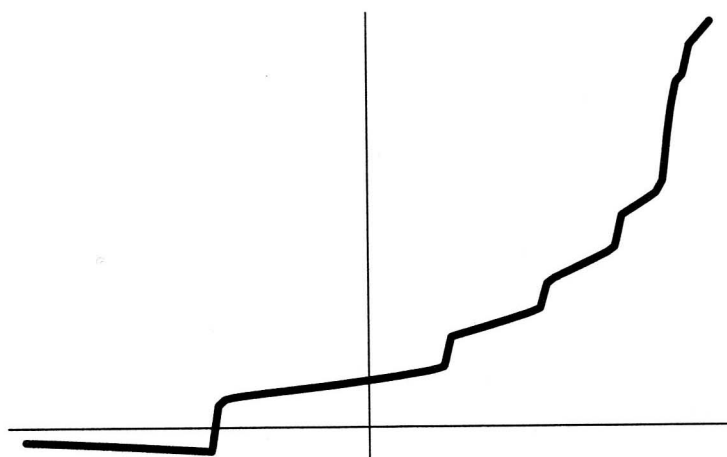
- ◆ pasivní
- ◆ aktivní



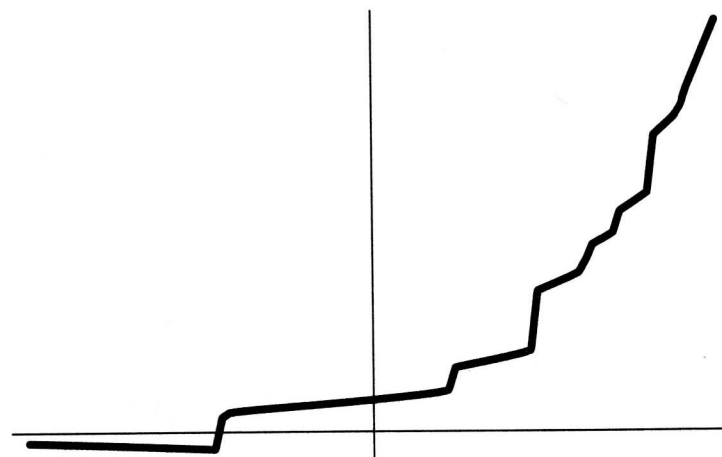
**Euler**



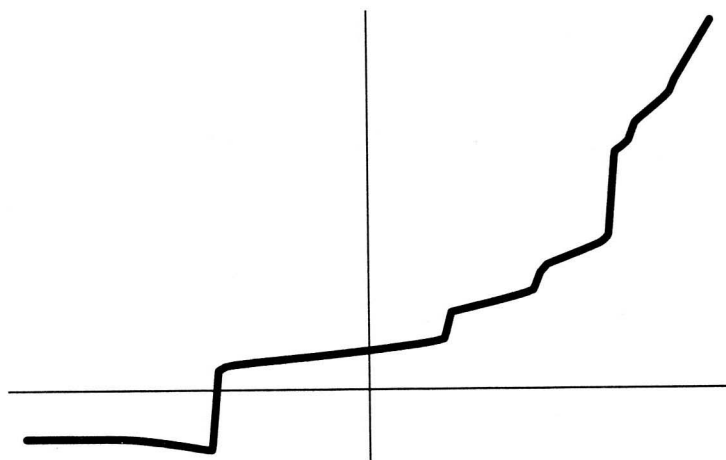
**Heun**



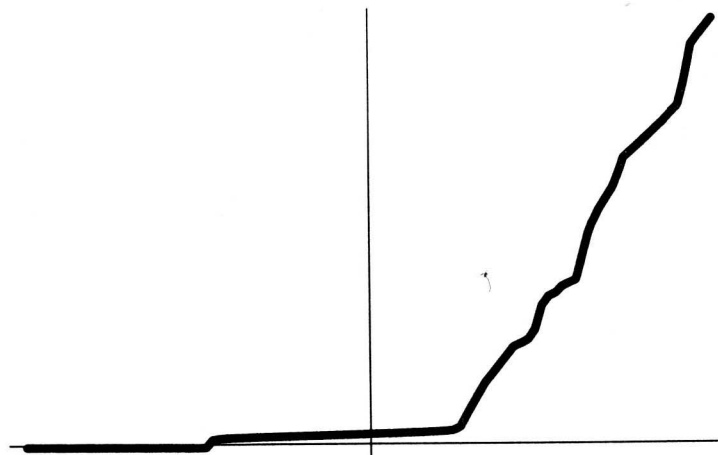
**Runge-Kutta**



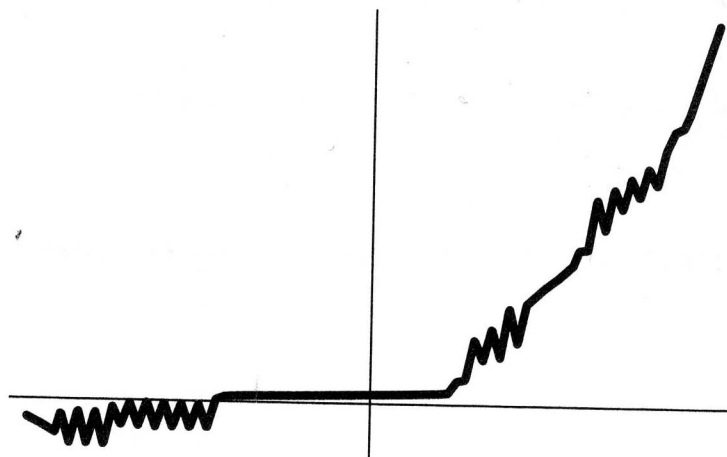
**Runge-Kutta (45)**



**Implicit Runge-Kutta**



**Second-Order Euler**



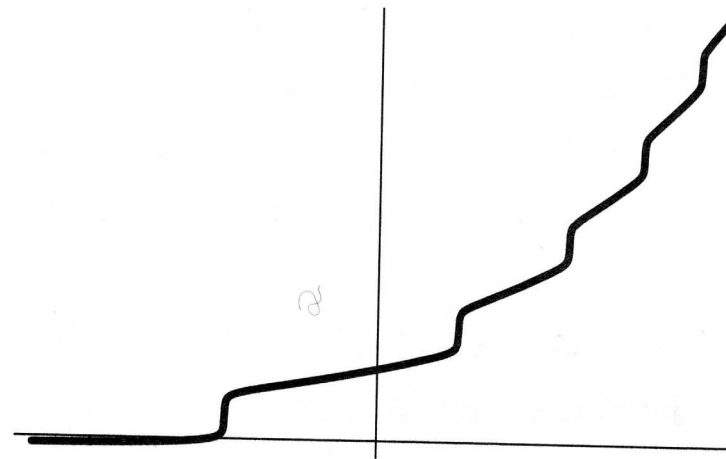
**Milne**



**Adams-Bashforth**



**Bulirsch-Stoer**



**NDSolve**