EPZ 1. přednes, 29. 9. 1999

Elektro – tepelná zařízení, zachceme ovšem teplem

TEPLO – energie, popsat u čem zvláštní

TEPLOTA – vyjadřuje onu zvláštnost

↳ poznámky : – definována jen v rovnováze
– lokální rovnováha
– složité

jako jsme nepitvali náboj, nebudeme pitvat ani onu teplotu

Zákony sdílení (přikázání tepla)

[Sdílení tepla, SNTL, Heat Transfer J.P.Holman, Основы теплообмена Кутателадзе]

Fourierův zákon

– řada zákonů vyjadřuje lin. závislost mezi toky a gradienty skalárních intenzivních veličin :

$$\vec{J} = -\gamma \nabla \varphi \qquad [Am^{-2}, Sm^{-1}, m^{-1}, V]$$

?

$$\vec{q}_m = -D \cdot \nabla C$$

$V \cdot S = A$ ✓

$m^{-2} = m^{-1} \cdot m^{-1}$

$$[\nabla] = m^{-1}$$

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T$$

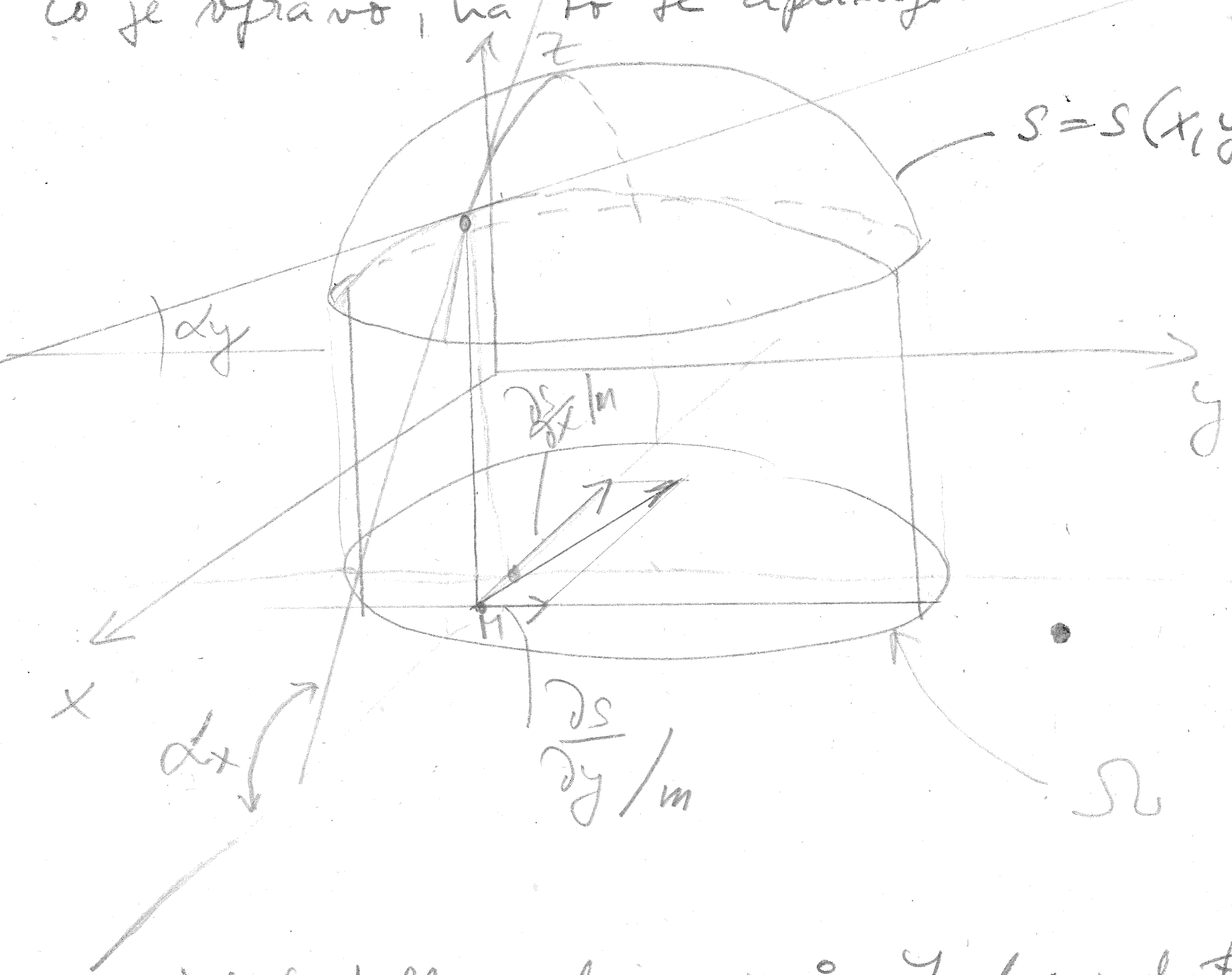
Než dále, prozkoumáme trochu ten gradient

$$\operatorname{grad} s \equiv \nabla s = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) s = \left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial z}\right)$$

∇ – „nabla" (z fénického nabla = harfa)

operátor, říká nám, že x, y, z jsou myšlené a tudíž rovnocenné.

∇ je operátor, co je vlevo, tím se násobí, co je vpravo, na to se aplikuje.



– jako sytá voda – průmět do podstavy.

Nabla budu také někdy zapisovat

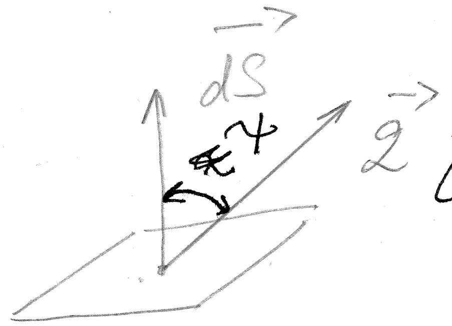
$$\nabla = \sum_i \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Vraťme se k

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T$$

tepelný tok, vektor měrného tepelného toku.

Význam $\vec{q}$



obecnější, než F.Z.:

$$dQ = \vec{q}\cdot\vec{dS} = |\vec{q}|\cdot|\vec{dS}|\cdot\cos\varphi$$

odtud zjistíme rozměr : $W = \cancel{m^2}\ ?\ \cdot m^2$

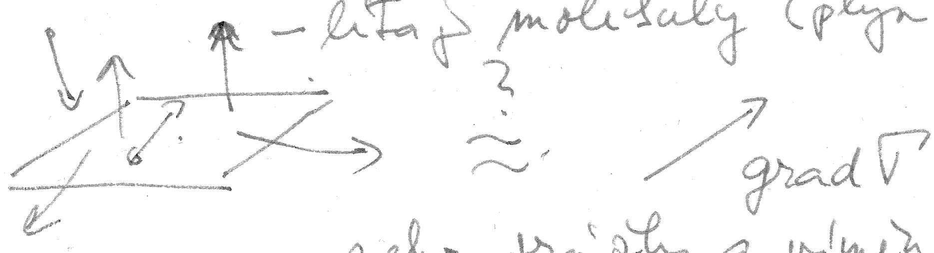
$$\Rightarrow [\vec{q}] = Wm^{-2}$$

λ – tepelná vodivost

$Wm^{-2} = [\lambda]\cdot m^{-1}\cdot K \Rightarrow [\lambda] = Wm^{-1}K^{-1}$

thermal conductivity; své jednotky na cvičení

Než půjdeme dál ... jak vypadá F.Z. ?



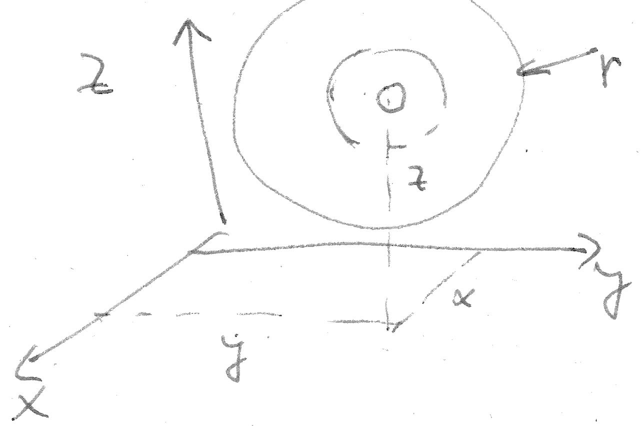
nebo srážky a výměna kin. energie

extrém :

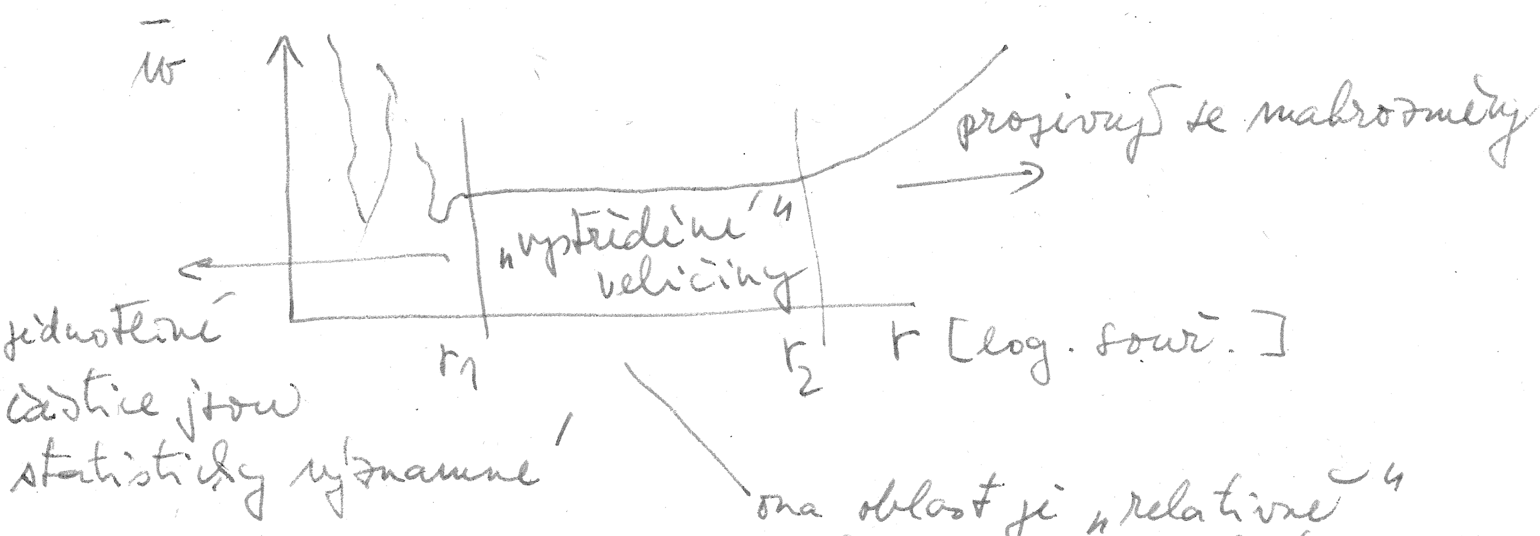
tak malá plocha, že se v ní neděje NIC.

Kudy z toho ven? — tzv. kontinuální teorie (continuum theory)

Buď např. $\overline{w} = E(w) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i$ stř. kinetická energie částic např. v kuličce



Pozorováním se zjistilo, že platí zajímavá věc:



a derivace podle x znamená posun středu koule o x a podíl změn:

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\overline{w}(\text{střed}(x+\Delta x, y, z)) - \overline{w}(\text{střed}(x, y, z))\right)$$

podobně $\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}$ (koule o chvíli později)

Promluvit o tom kdy to platí a kdy ne, o střední
volné dráze u plynů. (Maxwelly jsou taky tak míněny)

Matematický aparát fyz. kontinua

– zajímavé, zde jen něco málo

α) substanciální derivace
[substantia, ae f. podstata, bytnost, úhrn majetku, jmění]

úplný diferenciál

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{dt}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy + \frac{\partial s}{\partial z}dz\right) =$$

diferenciál času

(s – skalár, $s(x,y,z,t)$)

$$= \frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial s}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}v_x + \frac{\partial s}{\partial y}v_y + \frac{\partial s}{\partial z}v_z = \frac{\partial s}{\partial t} + (v_x, v_y, v_z)\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla s = \frac{d}{dt} \quad \|$$

← popovídat o rybách !

β) Leibnitzův teorém o derivaci $\iiint_{V(t)}$

(dávám k zírání)

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_S \rho\, \vec{v}_S \cdot \vec{dS}$$

změna celkem

změna uvnitř

přítoky a odtoky

hranice V se pohybuje rychlostí $\vec{v}_s$

Rovnice kontinuity

Budiž ρ [$kg\,m^{-3}$] hustota [density] látky v objemu V. Nechť se hranice tekutiny pohybuje stejně jako tekutina $\Rightarrow$ do V nic nevtéká ani nevytéká, $V(t)$ jen mění tvar jako preservativ (zavázaný) v potoce.

$\Downarrow$

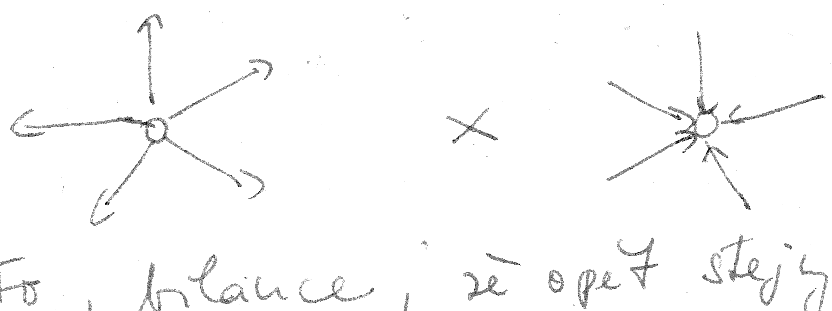
$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0 \overset{L.T.}{=} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

$\Rightarrow$ (V je libovolný objem) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$

rovnice kontinuity, ZZEM
(continuity equation, mass conserving law)

Co je divergence? Známe z (např.)
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0^+$



– Vyjadřuje tyto bilance, že opět stejný význam
co „v kódě" zaniká $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, co odteklo: $\nabla \cdot (\rho \vec{v})$

+ GAUSSOVA VĚTA!

~~ZZ~~ SD Skalární veličiny vázané na látku

(veličiny, v nichž je „m"

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow W_k = \int_V \frac{1}{2} v^2 \cdot \rho \, dV$$

$$\vec{P} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{P} = \int_V \vec{v} \rho \, dV$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s \, dV \overset{\text{L.T.}}{=} \int_{V(t)} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{S}(t)} s\rho\vec{v} \, d\vec{S} =$$

$$= \int_{V(t)} \left(\rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (s\rho\vec{v}) \right) dV = \left| \begin{array}{l} \nabla \cdot (a\vec{b}) = \\ a\nabla \cdot \vec{b} + \\ + \vec{b} \cdot \nabla a \end{array} \right| =$$

$$a = s, \ \vec{b} = \rho\vec{v}$$

$$= \int_{V(t)} \left(\rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} + s\nabla \cdot (\rho\vec{v}) + \rho\vec{v} \cdot (\nabla s) \right) dV =$$

$$= \int_{V(t)} \Big[s \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) \right)}_{0 \text{ (kontinuita!)}} + \rho \underbrace{\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s \right)}_{\frac{ds}{dt}} \Big] dV \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s \, dV = \int_{V(t)} \rho \frac{ds}{dt} dV \quad \|$$

~~dt ρ~~ působí jen s, hmota zůstává

Jak je to u tepelné energie?

$$W_T = m c_p T \longrightarrow W_T = \int_V c_p T \rho \, dV$$

pro konst. c_{p_T}

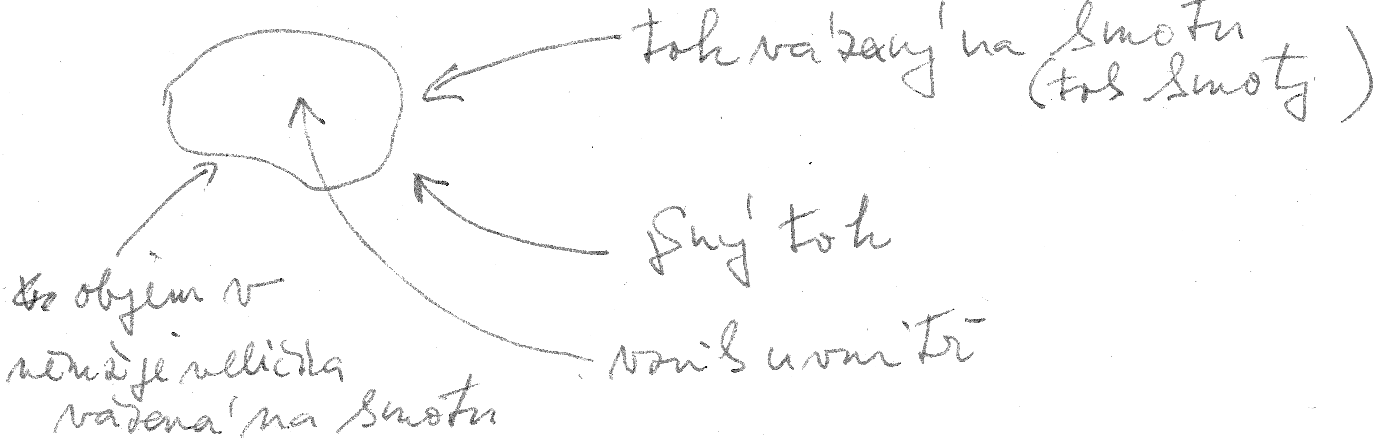
$$W_T = m \cdot \int_0^T c_p(T)\, dT \longrightarrow W_T = \int_V \left(\int_0^T c_p(T)\, dT \right) \rho \, dV$$

Tedy u naše s'' je $\int_0^T c_p(T)\, dT$

$$\frac{dW_T}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \int_0^T c_p(T)\, dT \, dV = \int_{V(t)} \left(\rho \frac{d}{dt} \int_0^T c_p(T)\, dT \right) dV =$$

$$= \underbrace{\int_{V(t)} \left(\rho \frac{dT}{dt} \cdot \underbrace{\frac{d}{dT} \int_0^T c_p(T)\, dT}_{\text{derivace podle horní meze}} \right)}_{\text{derivace složené funkce}} dV = \int_{V(t)} \rho c_p \frac{dT}{dt} \, dV$$

ZZ skalární veličiny vázané na hmotu

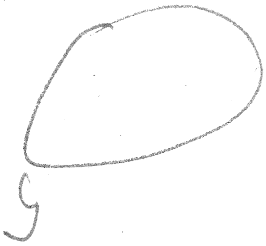


1) tok vázaný na hmotu: hranice $V(t)$ se pohybuje stejně (v tekutině!) jako tekutina

$\Downarrow$

tento tok (u energie: tok = výkon) = 0

2) jiný tok dovnitř:



$$\int_S \vec{q}\cdot d\vec{S} = \text{tok ven (orientace } S) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_S \vec{q}\cdot d\vec{S} \text{ je tok dovnitř [W]}$$

3) Vznik uvnitř: $\int_V Q_V \, dV$

objemová hustota vznikajícího tepelného výkonu $[\mathrm{W\,m^{-3}}]$

Dáme to dohromady:

$$\frac{d}{dt}\int_V w_T = -\int_S \vec{q}\, d\vec{S} + \int_V Q_V \, dV$$

$$\int_V \rho c_p \frac{dT}{dt} = -\int_V (\nabla\cdot\vec{q} + Q_V)\, dV \Rightarrow$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \nabla\cdot\vec{q} - Q_V = 0 \quad \| \quad \text{F.K.R}$$

spec. pro $\vec{q} = -\lambda \nabla T$:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + Q_V$$

Dál pokud – viz papír 5 přednášky