ETZ 2. přednes, 6.10.99

Skončili jsme $\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\nabla\cdot\vec{q} + Q_V$,

resp. pro většinu látek

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla T\right) = \nabla\cdot(\lambda\nabla T) + Q_V .$$

Q_V bylo na cvičení

– řešení jednoduchých případů pro ZNÁMÉ $\vec{v}$ (většinou $\vec{v} = \vec{0}$ nebo zadané) na cvičení.

Obecně – obor II. parc. dif. rovnice

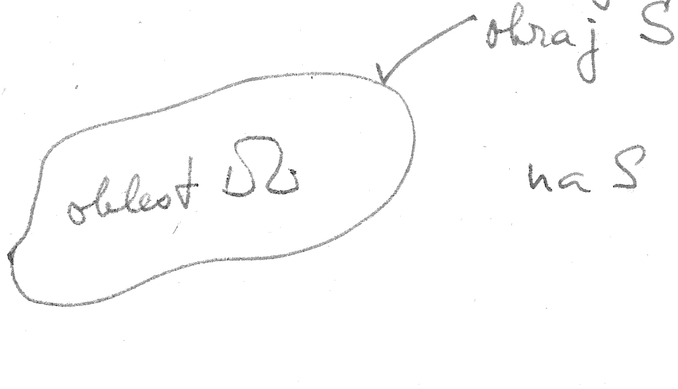
– okrajové (boundary) a počáteční (initial) podmínky (conditions)

$\boxed{\text{počáteční}}$: v libovolném čase (např. často pro jednoduchost v $t=0$) je zadáno rozložení teploty v prostoru

$T(x,y,z,t=0) = \Phi$ známá fce (x,y,z)

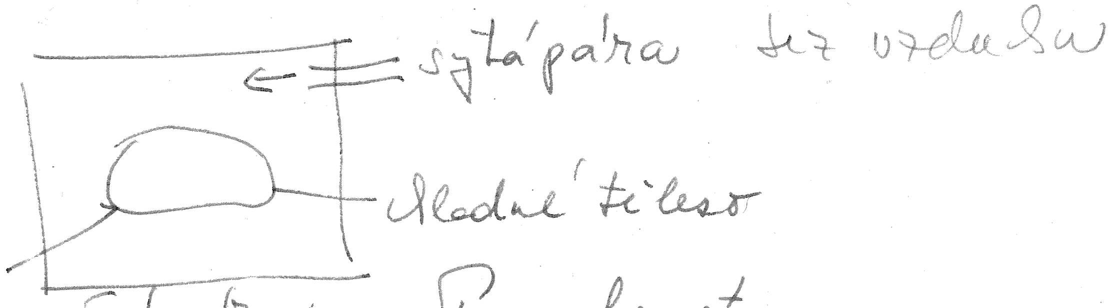
$\boxed{\text{okrajové}}$: 3 druhy (rozdíl 1 parametru: znalost na ploše → znalost v prostoru)

1)



na S je $T_S(\underbrace{x,y,z}_{\in S},t)$ = daná fce(x,y,z,t)

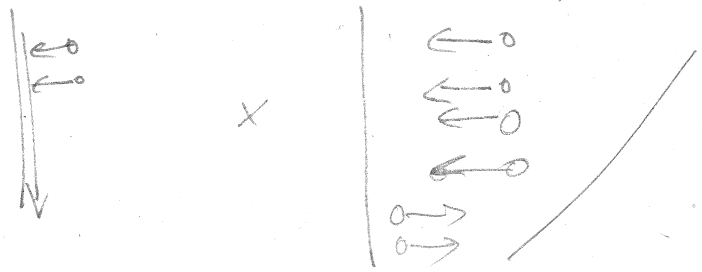
– příklad: fázové přeměny ze života



T_S = konst.

– přístup je tak intenzivní, že mezi povrchem a T_S je malý (ne nulový, ale v technice to tak jde).

proč bez vzduchu? :



2) na S je dáno $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}$:

$$\left(\vec{n}_0 \cdot \nabla T\right)_{\text{na } S} = \text{daná fce}\,(\underbrace{x, y, z}_{\text{na } S}, t)$$

příklad ze života: neentropické ohřevy

– Slunce (neohřívám-li blízko 6000K :-))

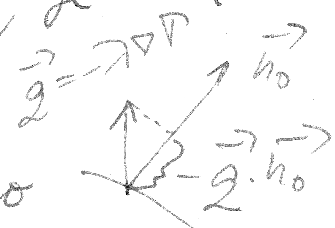
– elektřina

– tření

– chemie

– znamená to vlastně tepelné toky; je-li $\vec{n}_0 \cdot \nabla T$ = daná fce, je též

$(-\lambda \nabla T) \cdot \vec{n}_0$ = daná fce – to, co vyteklo (obrázek)



3) nejčastější případ: směs obého

$$\text{daná fce}(\underbrace{x,y,z}_{\text{na } S}, t) = \left(a\cdot T + b\cdot \vec{n_0}\cdot\nabla T\right)_{\text{na } S}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

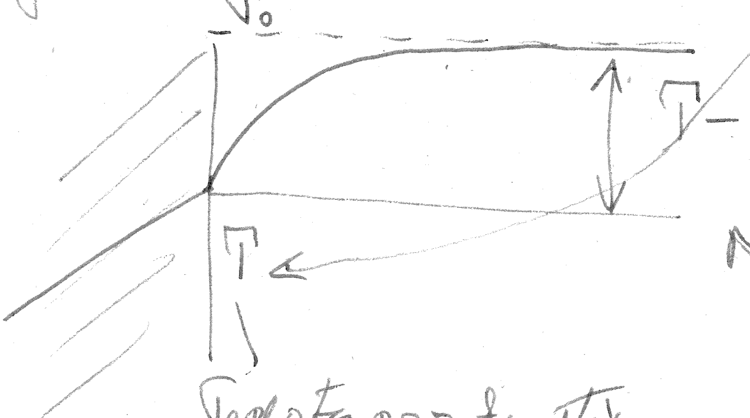
Problém: jak určit ono a a b

Sdílení tepla konvekcí

Newton: $\cancel{|\vec{q_n}|} = q = \vec{q}\cdot\vec{n_0} = \alpha\,(T - T_0)$

$[Wm^{-2}, Wm^{-2}K^{-1}, K]$

α: součinitel přestupu tepla konvekcí
[~~heat~~ convection heat transfer coefficient, v anglosaské literatuře často h]



(co do velikosti)

teplota povrchu stěny

tekutina neovlivněná stěnou odlišné teploty

Na čem to α závisí: – pohyb ~~vzduchu~~ tekutiny
(intuitivně)
– co je to za tekutinu
– fázové přeměny

α : získává se měřením a zobecněním výsledků, v několika málo případech jde vypočítat analyticky, nebo numericky (FLUENT), měření je zatím nejspolehlivější.

Problematika fyzikálního modelování – redukce velikosti zařízení a počtu měření (jinak velké, jiná tekutina)

Modelováním se zabývá TEORIE PODOBNOSTI / (similarity theory)
↑ fyzikálním

Zásady o podobnosti:

1) model je geometricky podobný dílu

$$x_M = k_x x_D$$

2) všechny veličiny jsou „podobné", tj. pro teplotu, rychlost atd. platí

$$v_M = k_v v_D \quad , \quad T_M = k_T T_D \text{ atd.}$$

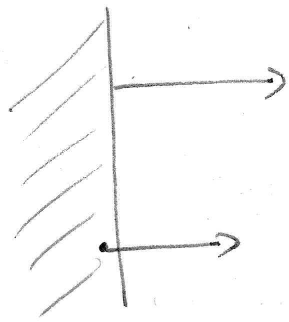
Dále poznamenejme, že platí

$$\frac{\partial}{\partial x_M} = \frac{\partial}{\partial x_D}\cdot\frac{\partial x_D}{\partial x_M} = \frac{\partial}{\partial x_D}\cdot\frac{\partial}{\partial x_M}\left(\frac{1}{k_x}x_M\right) =$$

$$= \underline{\frac{1}{k_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x_D}} \Rightarrow k_{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{1}{k_x}$$

a obdobně: $\underline{k_\nabla = \frac{1}{k_x}}$ (lze to i z fyzikálních rozměrů, tzv. rozměrovou analýzou, ale na to nemáme čas; veličina ∇ má rozměr m^{-1}, tedy se „transformuje" jako m^{-1})

Začněme s Newtonovým vztahem



$$q = \alpha\cdot(T - T_0)$$

$$q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\cdot\vec{n_0}$$

Rozhraní nemá hmotnost ⇒ neakumuluje teplo, to se na něm neztrácí ani nevzniká ⇒

$$\alpha(T - T_0) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\cdot\vec{n_0}$$

a to platí zcela obecně, tedy na malém modelu i na díle tedy

$$\alpha_M (T_M - T_{OM}) = -\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial x_M} \underbrace{\vec{n_0}}$$

nemá index, je BEZROZMĚRNÝ a má velikost 1

$$\alpha_D (T_D - T_{OD}) = -\lambda_D \frac{\partial T_D}{\partial x_D} \cdot \vec{n_0}$$

Ale chci, aby platilo

$$\alpha_M = k_\alpha \alpha_D$$

$$T_M = k_T T_D \quad (\text{pro } T_{OM} \text{ stejné})$$

$$\lambda_M = k_\lambda \lambda_D$$

$$x_M = k_x x_D$$

jdu tam s tím

$$k_\alpha \alpha_D k_T (T_D - T_{OD}) = -k_\lambda \lambda_D k_T \cdot \frac{1}{k_x} \cdot \frac{\partial T_D}{\partial x_D}$$

$$\Big| : k_\lambda \cdot k_T \quad \cdot k_x$$

porovnáme

$$\frac{k_\alpha k_x}{k_\lambda} \cdot \alpha_D (T_D - T_{OD}) = -\lambda_D \frac{\partial T_D}{\partial x_D} \cdot \vec{n_0}$$

$$\boxed{\frac{k_\alpha \cdot k_x}{k_\lambda} = 1} \Rightarrow \frac{\frac{\alpha_M}{\alpha_D} \cdot \frac{D_M}{D_D}}{\frac{\lambda_M}{\lambda_D}} = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha \cdot D}{\lambda}\right)_D = \left(\frac{\alpha D}{\lambda}\right)_M = Nu \quad \text{– Nusseltovo číslo}$$

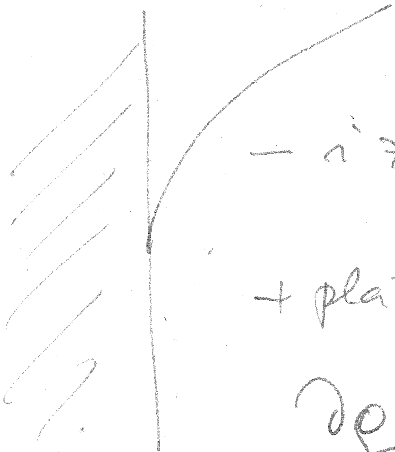
– uhádnám, co se děje s α při změně rychlosti a tepelné vodivosti tekutiny
(snadý experiment – těleso Fe × voda)

⇓

veliké ulehčení práce! (grafy Nu a vzorce a tabulky pro Nu)

Znám-li Nu, spočtu α pro všechny GEOMETRICKY podobné objekty ponořené do čehokoli

Otázka: na čem závisí Nu?



– i zde platí $\rho c_p \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T$

+ platí pohybové rovnice:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \leftarrow \text{kontinuita}$$

opět:
$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t_M} + \nabla_M \cdot (\rho_M \vec{v}_M) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_D}{\partial t_D} + \nabla_D \cdot (\rho_D \vec{v}_D) = 0$$

$$\frac{k_\rho}{k_t} \frac{\partial \rho_D}{\partial t_D} + \frac{1}{k_x} k_\rho k_v \nabla_D \cdot (\rho_D \vec{v}_D) = 0$$

$$\frac{k_x}{k_t k_v} \frac{\partial \rho_D}{\partial t_D} + \nabla_D \cdot (\rho_D \vec{v}_D) = 0$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{k_x}{k_t k_v} = 1 \right\| \cancel{\frac{D}{tv}}$$

$$\left(\frac{tv}{D}\right)_M = \left(\frac{tv}{D}\right)_D = Ho$$

z rovnice kontinuity

---

a platí pohybová rovnice

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} + \vec{f_v} - \nabla p$$

(Navier-Stokesova rovnice, odvození bude na webu)

vysvětlit!

Nejjednodušší případ:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \overset{!}{\equiv} \nu \nabla^2 \vec{v}$$

+víme, že platí

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T \overset{!}{\equiv} a \nabla^2 T$$

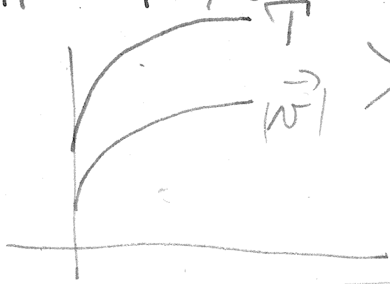
pohovoříto níž

$\Rightarrow$ mírou podobnosti rovnic je

$$\left\| \frac{\nu}{a} = Pr \right\|$$

vztah mezi prouděním (přenos hybnosti) a přenosem tepla

(Pr = 1 nebo Pr ≃ 1 dvojná analogie



> oba na místě stejné)

$$\boxed{\text{Tedy VŽDY platí } Nu = Nu(Pr)}$$

čili Pr dalo vztah s prouděním. Co ale ovlivňuje proudění?

$$\alpha$$

$\downarrow$ – vyloučení velikosti a tep. vodivosti tekutiny

$$\alpha(Nu)$$

$$\downarrow$$

$Nu = Nu(Pr) \leftarrow$ vztah mezi T a v

$\downarrow$ proudění

$$\rho_M\left(\frac{\partial \vec{v}_M}{\partial t_M} + (\vec{v}_M \nabla_M)\cdot \vec{v}_M\right) = \rho_M \vec{g}_M + \eta_M \nabla_M^2 \vec{v}_M - \nabla_M p_M$$

$$\rho_D\left(\frac{\partial \vec{v}_D}{\partial t_D} + (\vec{v}_D \nabla_D)\cdot \vec{v}_D\right) = \rho_D \vec{g}_D + \eta_D \nabla_D^2 \vec{v}_D - \nabla_D p_D$$

ale: $\cancel{p_D}$ $p_M = k_p p_D$, $\rho_M = k_\rho \rho_D$, $t_M = k_t t_D$, $\eta_M = k_\eta \eta_D$

$\nabla_M = \cancel{k} \frac{1}{k_x} \nabla_D$

$$k_\rho k_v \left(\frac{1}{k_t}\frac{\partial v_D}{\partial t_D} + \frac{k_v}{k_x}(\vec{v}_D \nabla_D)\cdot \vec{v}_D\right) =$$

$$k_\rho k_g \rho_D \vec{g}_D + k_\eta \cdot \frac{1}{k_x^2} k_v \eta_D \nabla_D^2 \vec{v}_D - \frac{1}{k_x} k_p \nabla_D p_D$$

$$\frac{\partial v_D}{\partial t_D} + \frac{k_v k_t}{k_x}(\vec{v}_D \nabla_D)\cdot \vec{v}_D =$$

$$= \frac{k_t k_g}{k_v} \rho_D \vec{g}_D + \frac{k_\eta \cancel{k_v} k_t}{k_\rho \cancel{k_v} k_x^2} \eta \nabla_D^2 \vec{v}_D -$$

$$- \frac{k_t}{k_x k_\rho k_v} k_p \nabla_D p_D$$ (a víme, že $\frac{k_v k_t}{k_x} = 1$)

$$k_t = \frac{k_x}{k_v}$$

$\Downarrow$

$$\frac{k_t k_g}{k_v} = \left[\frac{k_x k_g}{k_v^2} = 1\right] \Rightarrow \frac{v^2}{gD} = Fr$$

$$\frac{k_\eta k_t}{k_\rho k_x^2} = \left[\frac{k_\eta}{k_\rho k_v k_x} = 1\right] \Rightarrow \frac{vD\rho}{V} = Re$$

$$\frac{k_t k_p}{k_x k_\rho k_v} = \left[\frac{k_p}{k_\rho k_v^2} = 1\right] \Rightarrow \frac{p}{\rho v^2} = Eu$$

„Vyhučená" konečce :

$$\left[\!\left[Nu = Nu(Re) \right]\!\right]$$

(+ strana 9 starého o hustotě)

Často změnami hustoty : $\rho = \rho(T)$

$$\rho = \rho_0 + \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_0 \Delta T$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{T_0} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{m}{V(T)}\right) =$$

$=$