Určování součinitele přestupu tepla při vynucené konvekci

Z teorie fyzikální podobnosti aplikované na přestup tepla na rozhraní pevné látky a tekutiny plyne základní kriteriální rovnice pro určení součinitele přestupu tepla, tedy rovnost Nusseltových kriterií dvou geometricky a fyzikálně podobných uspořádání.

Vynucenou konvekcí (anglicky forced convection) rozumíme jev, kdy přechází teplo mezi nepohyblivým povrchem a pohybující se tekutinou, přičemž pohyb tekutiny není vyvolán změnami její teploty.

Proudění tekutiny zintenzívní přestup tepla mezi povrchem a tekutinou oproti případu, kdy se tepelný výkon přenáší z povrchu pouze vedením tepla.

Představíme-li si například horkou stěnu umístěnou v chladnějším vzduchu, ofukovanou ventilátorem: prouděním přitéká chladný vzduch ke stěně, gradient teploty vzduchu u stěny je větší, než při vedení tepla v nepohybujícím se prostředí a přestup tepla následně intenzivnější.

Podrobně pojednávají o sdílení tepla konvekcí například:

[1] John H. Leinhard IV, John H. Leinhard V: A Heat Transfer Textbook, Phlogiston Press, Cambridge, Massachutsetts, Third Edition
[2] M. Sazima a kol. : Sdílení tepla, SNTL 1993
[3] J.P. Holman: Heat Transfer McGraw-Hill, 1963, 1968, 1972 a mnoho pozdějších rozšířených vydání.
[4] Rédr a kol.: Základy tepelné techniky

Pro kvalitní a srozumitelný úvod do problematiky lze doporučit bohužel obtížně dostupnou knihu:

[5] N. A. Michejev: Základy sdílení tepla, Státní technické nakladatelství, Praha 1952.

Existují také výborné dostupné ruskojazyčné publikace, například od autorů Kutatěladze, Borišanský, Šorin atd.
Problematika fyzikálního modelování je přehledně zpracována v monografii

[6] J. Kuneš: Modelování tepelných procesů, SNTL 1989

Pro sdílení tepla konvekcí platí obecně:

$$q = \alpha \cdot (T_s - T_o) \qquad (W \cdot m^{-2}, W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}, K, K)$$

kde α $(W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1})$ je součinitel přestupu tepla konvekcí, q $(W \cdot m^{-2})$ plošná hustota tepelného výkonu vystupujícího ze stěny o povrchové teplotě T_s $(K \; nebo \; °C)$ do tekutiny o teplotě T_o $(K \; nebo \; °C)$, přičemž tato teplota je brána „tak daleko, že je vliv stěny na tuto teplotu zanedbatelný“. Uvozovkami je znázorněno, že je tato definice poněkud vágní, pro některé účely se užívají definice přesnější, zájemcům můžeme doporučit literaturu rozebírající děje v takzvané mezní vrstvě (z autorů např. Schlichting). Platí-li $T_s > T_o$, přechází tepelný výkon za stěny do tekutiny a q je kladný, pokud platí $T_o > T_s$, teče tepelný výkon z tekutiny do stěny a q je při takto zvolené orientaci záporný.

Můžeme-li považovat hustotu tepelného toku za konstantní na povrchu o ploše *S*, celkový tepelný výkon vyjádříme

$$Q = q \cdot S = \alpha \cdot S \cdot (T_s - T_o) \qquad (W, W \cdot m^{-2}, m^2, W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}, m^2, K, K)$$

Pokud můžeme považovat teplotu na povrchu za konstantní a součinitel přestupu tepla na povrchu za proměnlivý, určíme výkon integrací

$$Q = \overline{q} \cdot S = \int_S \alpha \cdot (T_s - T_o) \cdot dS = \overline{\alpha} \cdot S \cdot (T_s - T_o)$$

Kde $\overline{q}$ je střední hodnota plošné hustoty tepelného toku a $\overline{\alpha}$ je střední hodnota součinitele přestupu tepla konvekcí; v literatuře a odborném žargonu „alfa střední“ oproti dříve uvedenému „alfa místnímu“.

Z teorie fyzikální podobnosti aplikované na sdílení tepla na rozhraní povrch-tekutina plyne (aby byl možný přepočet mezi různě velkými objekty v tekutinách s různými tepelnými vodivostmi) podmínka rovnosti Nusseltových čísel:

$$Nu_1 = \frac{\alpha_1 \cdot D_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2 \cdot D_2}{\lambda_1} = Nu_2$$

kde D (m) je takzvaný charakteristický rozměr tělesa, λ $(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$ je tepelná vodivost tekutiny; Nusseltovo číslo má tedy rozměr 1.

Ze znalosti hodnoty Nusseltova čísla určíme tedy součinitel přestupu tepla konvekcí snadno:

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{D}$$

Pokud je uvažována střední hodnota Nusseltova čísla, je výsledkem „alfa střední“, pokud místní hodnota, získáme „alfa místní“.

Hlavní výhodou použití bezrozměrných podobnostních čísel (též se v literatuře setkáváme s termínem podobnostní kritéria) je redukce počtu nezávisle proměnných. Při samovolné konvekci záleží součinitel přestupu tepla na tíhovém zrychlení zemské tíže (v kosmické lodi na měsíci by kolem nás proudil vzduch jinak, v beztížném stavu změna hustoty nevyvolá žádný pohyb tekutiny a podobně), kinematické viskozitě tekutiny (například med klade proudění podél stěny jistě větší odpor, než vzduch), na koeficientu objemové roztažnosti tekutiny (pokud se hustota tekutiny s teplotou nemění, k samovolné konvekci nedojde). Dále intenzita proudění a následně součinitel přestupu tepla závisí na rozdílu teplot T_o a T_s, tepelné vodivosti tekutiny (ve rtuti bude přestup zjevně intenzívnější, než ve vodě či vzduchu), takzvané teplotní vodivosti tekutiny (poměr tepelné vodivosti a součinu hustoty a měrné tepelné kapacity látky), která je látkovou vlastností potřebnou k řešení např. nestacionárního sdílení tepla.
Při vynucené konvekci nezávisí součinitel přestupu tepla na rozdílu teplot a tíhovém zrychlení, ale na rychlosti proudění tekutiny podél stěny (přesněji řečeno, na rychlostním profilu u stěny), závislost na látkových vlastnostech tekutiny pochopitelně zůstává.
Obecně je přijímáno, že vyjma situací extrémně velkých hustot tepelného toku v případě vypařování při varu kapaliny nebo kondenzace syté páry na teplosměnné ploše nezávisí

součinitel přestupu tepla na látkových vlastnostech stěny. Při turbulentním proudění v kanálech součinitel přestupu tepla nezávisí na drsnosti stěny, při laminárním nikoli.

Z výše uvedeného vidíme, tabulky pro určení součinitele přestupu tepla by byly nesmírně rozsáhlé a spíše nerealizovatelné. Naštěstí teorie podobnosti umožňuje snížit počet nezávisle proměnných zavedením Prandtlova čísla a Grashofova čísla podle vztahů:

$$Pr = \frac{\nu}{a} \qquad (1, m^2 \cdot s^{-1}, m^2 \cdot s^{-1})$$

kde ν je kinematická viskozita (anglicky kinematic viscosity) tekutiny, svázaná s dynamickou viskozitou vztahem $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, kde dynamická viskozita η má rozměr a jednotku

$$(\eta) = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot s}{m^2} = \frac{N}{m^2} \cdot s = Pa \cdot s$$

a ρ $(kg \cdot m^{-3})$ je hustota proudící tekutiny.
Teplotní vodivost a (anglicky thermal diffusivity) je definována vztahem

$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$ $(m^2 \cdot s^{-1}, W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}, kg \cdot m^{-3}, J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})$, kde λ tepelná vodivost tekutiny, ρ hustota a c_p měrná tepelná kapacita tekutiny při konstantním tlaku.

Vidíme, že Prandtlovo číslo je podílem dvou látkových vlastností tekutiny a je tedy samo látkovou vlastností, je uvedeno v tabulkách tepelných vlastností tekutin. Zároveň je Prandtlovo číslo podobnostním číslem a tedy bezrozměrnou veličinou (resp. má rozměr 1).

V dalším se omezíme na proudění tekutiny v kanálech, obtékání povrchů je pro naše účely irelevantní.
Při vynuceném proudění je rychlost proudění zohledněna závislostí Nusseltova čísla na Reynoldsově čísle:

$$Re = \frac{w \cdot D}{\nu} \qquad (1, m \cdot s^{-1}, m, m^2 \cdot s^{-1}),$$

kde w je střední rychlost proudění (tj. objemový průtok dělený kolmým průřezem kanálu), D charakteristický rozměr kanálu / objektu a ν kinematická viskozita tekutiny. Reynoldsovo číslo je podobnostním číslem a tedy bezrozměrnou veličinou (resp. má rozměr 1).

Z teorie fyzikální podobnosti plyne, že v nejjednodušším případě, kdy je již bezrozměrný rychlostní a teplotní profil vyvinutý, tedy za tzv. náběhovým úsekem, určíme hodnotu Nusseltova čísla:

$$Nu = Nu\left(Re, Pr\right)$$

Uvažujeme-li značné rozdíly teplot a následné změny Prandtlových čísel, bude Nusseltovo číslo také závislé např. na poměru Prandtlova čísla na stěně a v tekutině, pokud hledáme „místní alfa“ a tedy lokální hodnotu Nusseltova čísla s uvažováním náběhového úseku, přibude také závislost na bezrozměrném vyjádření polohy (například poloha místa na svislé stěně vyjádřená poměrem délek) a podobně. Vztahy pak mají tvar $Nu = Nu\left(Re, Pr, \frac{Pr_s}{Pr}, \frac{x}{D}\right)$, kde x je vzdálenost od vstupu tekutiny do kanálu a Pr_s je hodnota Prandtlova čísla při teplotě stěny, přičemž Re, Pr jsou brány při tzv. definiční teplotě.

Takzvaná *definiční teplota* je určena vztahem:
$T_{def} = \frac{T_s + T_o}{2}$.
Také se tato teplota označuje v literatuře jako *střední teplota mezné vrstvy*.

Všechny látkové vlastnosti uvažujeme při této definiční teplotě, není-li u kriteriálních vztahů z literatury uvedeno jinak (například Prandtlovo čísla na stěně Pr_s uvažujeme při teplotě stěny a podobně). Platí tedy:

$$\lambda = \lambda\left(T_{def}\right), \ \nu = \nu\left(T_{def}\right), \quad Pr = Pr\left(T_{def}\right)$$

Obdobně jako v případě teploty je třeba přijmout úmluvu, která stanoví pro zvolenou geometrii charakteristický rozměr tělesa. Definiční rozměr by měl být vždy uveden u kriteriálních vztahů $Nu = Nu\left(Re, Pr, \frac{Pr_s}{Pr}, \frac{x}{D}\right)$ autory příslušných aproximací naměřených závislostí.

Pro proudění tekutiny v kanálech je obvyklé brát u kanálů kruhového řezu za charakteristický rozměr průměr kanálu, pokud není uvedeno autory aproximací jinak, bere se v případě nekruhových kanálů $D = \frac{4 \cdot S_k}{O_o}$, kde $S_k \quad \left(m^2\right)$ je plocha řezu kanálu kolmého na směr rychosti tekutiny a $O_o \quad \left(m\right)$ je tzv. omočený obvod tohoto řezu, tedy ta část obvodu, kde tekutina omývá stěny kanálu, viz např. [5].

K problematice proudění a sdílení tepla konvekcí vazkých olejů a vody v kanálech odpovídajících situaci v uvažovaných deskových výměnících

Vazké oleje

Při proudění tekutin v kanálech je přijímáno, že ustálený rychlostní profil v případě konstantních látkových vlastností musí být pro hodnoty $Re < 2300$ laminární (a např. v případě kruhového průřezu kanálu parabolický). Pro hodnoty $Re > 2300$ je možné turbulentní i laminární proudění, např. při vhodném hladkém zužování průřezu kanálu je možné udržet laminární proudění i k hodnotám $Re \approx 10^5$. Hodnotu 2300 je ovšem nutné brát s rezervou a zcela opomíjíme vírnaté proudění a celou problematiku turbulence (zájemce odkazujeme např. na skvělá skripta prof. Tesaře z fakulty Strojní ČVUT). Pro proudění oleje v uvažovaných výměnících toto vše však není podstatné, platí v nich $Re < 100 << 2300$ a ustálený teplotní profil bude nutně laminární, nehledě na značné látkové změny (zejména výrazně nižší kinematická viskozita oleje na styku s teplosměnnou plochou).

Pro idealizovaný případ (vstup proudění s homogenním rychlostním profilem do kanálu s takovým průměrem, že uvnitř kanálu platí $Re < 2300$) lze v literatuře [1], [2], [3] korelace ve tvaru racionálních lomených funkcí např. tvaru $Nu = a + \frac{b \cdot Gz^c}{\left(d + Gz^e\right)^2}$, kde $Gz = \frac{Re \cdot Pr \cdot D}{x}$

a x je vzdálenost od vstupu do kanálu, kde také předpokládáme začátek sdílení tepla z tekutiny do stěny kanálu nebo opačně.
[1] uvádí, že chyba této korelace je do 14% a navrhuje korelaci vhodnější, ve tvaru:

$$Nu = 1.302 \cdot Gz^{\frac{1}{3}} - 1 \quad \text{pro } 2 \cdot 10^4 \le Gz$$

$$Nu = 1.302 \cdot Gz^{\frac{1}{3}} - 0.5 \quad \text{pro } 667 \le Gz < 2 \cdot 10^4$$

$$Nu = 4.364 + 0.236 \cdot Gz^{0.506} \cdot e^{\frac{-41}{Gz}} \quad \text{pro } 0 < Gz < 667$$

I kdyby platilo, že chyba korelace je pod 1%, což znamená, že korelace byla získána z numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic sdílení tepla a hybnosti s rovnicí kontinuity a nikoli měřením, taková přesnost měření, že nejistota bude pod 1% je silně nepravděpodobná, v našem případě bude chyba způsobená použitím této korelace větší: situace v kanálech deskového výměníku není identická s výše popsaným idealizovaným případem vstupu tekutiny do kanálu, rozdělení oleje z přívodu do kanálů je ve výměníku složitější, místo začátku sdílení tepla není totožné s místem vstupu tekutiny do kanálu, které také není diskrétně definováno atd.
Z nedostatku lepších možností budeme uvažovat různé hodnoty x podle volby místa kde $x = 0m$
Při uvažované geometrii a průtocích má olej poměrně malé Reynoldsovo číslo (cca jednotky) a velké Prandtlovo číslo (cca stovky, záleží zejména na lokální teplotě oleje v kanálu).

U vazkých olejů je také nezanedbatelný vliv změny Prandtlova čísla (nebo viskozity) v kolmém směru na proudění. Podle [4] uvažujeme tedy $\alpha_{olej} = Nu \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot \left(\frac{Pr\left(T_{def\,olej}\right)}{Pr\left(T_{stena}\right)} \right)^{0.14}$.

Voda

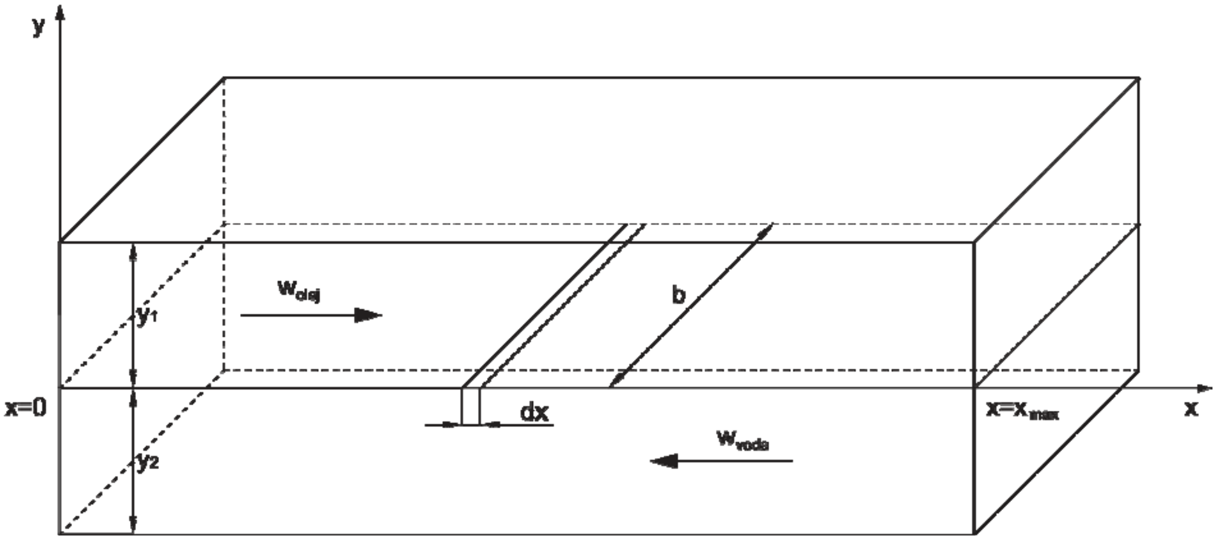
Pro proudění vody platí pochopitelně shodné vztahy jako v případě oleje. Při uvažované geometrii a průtocích má voda poměrně malé Prandtlovo číslo (cca jednotky, záleží zejména na lokální teplotě vody v kanálu) a velké Reynoldsovo číslo (cca stovky). Reynoldsovo číslo však leží spolehlivě v oblasti $Re < 2300$ a můžeme tedy použít uvedenou korelaci $Nu = Nu\left(Gz\right)$ shodně jako v případě oleje.
Teplota vody se mění jen velmi málo, korekci na rozdílnou definiční teplotu vody a teplotu vody na styku s teplosměnným povrchem zanedbáváme.

Sdílení tepla mezi olejem a vodou přes teplosměnnou plochu

Vzhledem k větší měrné tepelné kapacitě a průtoku vody by bylo možno pro přestup tepla použít střední hodnotu součinitele přestupu tepla, parametry oleje (zejména kinematická viskozita a následně Prandtlovo číslo) se však při průchodu kanálem v důsledku změn teploty oleje výrazně mění, byl proto vytvořen matematický model výměníku tepla odpovídající zadané situaci a realizován v prostředí Mathematica.

Poznamenejme, že lepší model výměníku by snad šlo získat pomocí CFD 3D modelování teplotního a rychlostního pole, např. v systémech ANSYS nebo FLUENT. Pro tyto modely by bylo ovšem třeba mít přesnou výkresovou dokumentaci výměníku a šlo by alespoň o dva řády dražší a časově náročnější problém.
Pochopitelně nic nenahradí kvalitně provedené měření teplosměnných vlastností výměníku při různých průtocích médií a teplotách.
Uvedený model je tedy třeba brát jako maximum dosažitelného při nedostatku vstupních údajů (k 1.1. dodavatel výměníků ještě nedodal dvě potřebné hodnoty: charakteristický rozměr kanálu a délku kanálu, natož výkresovou dokumentaci desek). Přesto je uvedený model značným zpřesněním obvykle používaných modelů uvažujících konstantní součinitele přestupu tepla obou médií po celé teplosměnné ploše.

Uvažujme (idealizované, ovšem později přepočtené na energeticky ekvivalentní kruhové kanály) uspořádání podle obrázku:



Pro obě média platí Fourier-Kirchhoffova rovnice:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla T \right) + Q_V ,$$

kde značení veličin je podle popisu výše a Q_V $\left(W \cdot m^{-3} \right)$ je objemová hustota tepelného výkonu odpovídající předávanému teplu do média (je tedy u oleje záporná a u vody kladná) a $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ $\left(m^{-1} \right)$ je Hamiltonův operátor nabla.

Uvažujeme časově ustálené stavy výměníku, tedy $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ a $\vec{w} = (w_x, 0, 0)$, tedy proudění pouze ve směru osy x.
Člen $\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$ zohledňuje (podélné) vedení tepla v médiích a je zcela zanedbatelný, což lze snadno ověřit, když vyřešíme příslušné rovnice s jeho zanedbáním a následně tento člen vyčíslíme. Ostatně, tento člen je zanedbán při všech klasických odvozeních vzorců pro výkon výměníku.

Přísně vzato by měl být brán člen Q_V $(W \cdot m^{-3})$ nulový a tepelný výkon do/z tekutiny by byl zohledněn okrajovou podmínkou: to ovšem není možné bez řešení teplotního pole pomocí parciálních diferenciálních rovnic. Namísto přestupu tepla „okrajovou podmínkou“ s nulovým Q_V tedy řešíme energeticky ekvivalentní problém s nulovým přestupem tepla okrajovou podmínkou a nenulovým členem Q_V.
Ostatně všechna klasická odvození vzorců pro výkon výměníku postupují stejně.
Odvození v podstatě kopíruje odvození klasická, jen uvažuje proměnné látkové vlastnosti a následně součinitele přestupu tepla na straně vody a oleje, což vede k nelineárním diferenciálním rovnicím (vzorec pro předávaný výkon v uzavřeném tvaru neexistuje), navíc jelikož jde o protiproud, nemáme klasické Cauchy-Riemannovy podmínky (zadané hodnoty jsou vstupní hodnoty teplot médií a ty jsou ve dvou různých prostorových souřadnicích, $x = 0\,m$ a $x = x_{\max}$ =délka výměníku) a řešení je tedy nutno hledat pomocí numerických metod řešení soustav diferenciálních rovnic a navíc s použitím metody střelby.
V uvedeném odvození nepoužíváme intuitivní výkonové či energetické bilance (jako např. v odvození podle [5]), postupujeme přísně podle určující Fourier-Kirchhoffovy rovnice s uvedením a zdůvodněním všech použitých zjednodušení. Výsledné rovnice jsou (až na nekonstantnost součinitele přestupu tepla mezi médii) formálně shodné a navíc byl proveden kontrolní výpočet dosazení konstantních tepelně-přestupových vlastností do vytvořeného programu a výsledný výkon předávaný výměníkem porovnán s klasickým vzorcem podle [5], přičemž relativní chyba (nutně zavlečená konečnou přesností numerických metod) numerického výpočtu byla pod $10^{-2}\%$.
Považujeme tedy zvolený program za formálně ověřený; nejistota výsledku souvisí zejména s nejistotou geometrie a korelačních vztahů, méně s nejistotou závislostí látkových vlastností na teplotě a zcela marginálně s nepřesností použitých numerických metod.

<u>Součinitel prostupu tepla mezi olejem a vodou, Q_V</u>

Součinitel prostupu tepla v uspořádání konvekce-vedení tepla-konvekce béřeme obvyklým způsobem:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{olej}} + \frac{d_{plech}}{\lambda_{plech}} + \frac{1}{\alpha_{voda}}} \qquad \left(W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}\right),$$

kde $\frac{d_{plech}}{\lambda_{plech}}$ je podíl tloušťky plechu, přes který tepelný tok prochází a α_{olej} a α_{voda} jsou konvektivní součinitele přestupu tepla mezi příslušným médiem a plechem.

Tloušťka desky byla k dispozici, $d_{plech} = 0.6\,mm$, tepelná vodivost nikoli, nicméně pro pesimistický odhad $\lambda_{plech} \approx 15\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ dostáváme $\dfrac{d_{plech}}{\lambda_{plech}} \approx 4 \cdot 10^{-5}\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, což odpovídá konvektivnímu přestupu tepla s $\alpha = 25000\,W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$. Jelikož součinitel přestupu tepla α_{olej} je velikosti maximálně řádu stovek, je tepelný odpor plechu oproti konvektivnímu tepelnému odporu zanedbatelný a tudíž dále bereme $k = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_{olej}} + \dfrac{1}{\alpha_{voda}}} = \dfrac{\alpha_{olej} \cdot \alpha_{voda}}{\alpha_{olej} + \alpha_{voda}}$.

Uvažme podle obrázku tepelný výkon dP přecházející elementární ploškou plechu dS, zřejmě platí $dS = b \cdot dx$ a také $dP = k \cdot \left(T_{olej} - T_{voda}\right) \cdot dS$.

Veličina $b\ \left(m\right)$ má hodnotu $b = \dfrac{S_{teplosmenna}}{x_{\max}}$, tedy taková délka, která násobena délkou teplosměnného kanálu ve směru $\vec{w} = \left(w_x, 0, 0\right)$ dá teplosměnnou plochu výměníku. Podle Guldinových vět je pro konstantní tvar řezu kanálu kolmého na $\vec{w}$ rovna obvodu tohoto řezu.

Objem elementárního kvádříku je $dV_{olej} = y_1 \cdot dS,\ dV_{voda} = y_2 \cdot dS$.

Odtud $Q_{V\,olej} = \dfrac{-dP}{dV_{olej}} = \dfrac{k \cdot \left(T_{olej} - T_{voda}\right) \cdot dS}{y_1 \cdot dS}$ a ovšem $Q_{V\,voda} = \dfrac{dP}{dV_{voda}} = \dfrac{k \cdot \left(T_{olej} - T_{voda}\right) \cdot dS}{y_2 \cdot dS}$.

Fourier-Kirchhoffova rovnice má při výše uvedených zjednodušeních tvar (pro obě média, jen s příslušnými indexy veličin) tvar: $\rho \cdot c_p \cdot w_x \cdot \dfrac{dT}{dx} = Q_V$.

Pro obě média je třeba vyjádřit rychlost $w_x\ \left(m \cdot s^{-1}\right)$. Jelikož v korelačních vztazích a vztazích pro výpočet výkonu proudícího média $P = \dot{m} \cdot c_p \cdot \left(T_{in} - T_{out}\right)\quad \left(W, kg \cdot s^{-1}, °C, °C\right)$ se bere rychlost střední po ploše, můžeme při použití vztahů $\dot{m} = \rho \cdot \dot{V}$, $\quad \dot{V} = S_k \cdot w_x = y \cdot b \cdot w_x$, kde $\rho\ \left(kg \cdot m^{-3}\right)$ je hustota média, $\dot{V}\ \left(m^3 \cdot s^{-1}\right)$ objemový průtok a $S_k\ \left(m^2\right)$ plocha řezu kanálem, řez kolmý na rychlost proudění $\vec{w} = \left(w_x, 0, 0\right)$, psát:

$$-\dot{m}_{olej} \cdot c_{p\,olej} \cdot \frac{dT_{olej}}{dx} = b \cdot k \cdot (T_{olej} - T_{voda})$$

$$\dot{m}_{voda} \cdot c_{p\,voda} \cdot \frac{dT_{olej}}{dx} = -b \cdot k \cdot (T_{olej} - T_{voda})$$

kde znaménko mínus v první rovnici znamená, že voda teče v našem modelu ve směru poklesu hodnot *x*, tedy na obrázku výše zprava doleva a olej pak zleva doprava ve směru růstu osy *x*.

V rovnici druhé mínus znamená opačný směr kladného tepelného toku z/do média.

Proměnné y_1, y_2 se v rovnicích vyrušily a na řešení nemají vliv.

Poznámka: Hodnoty c_p bereme na teplotě nezávislé, vzniklá chyba je podstatně menší než vliv ostatních zjednodušení. V rovnicích pro přehlednost vynecháváme argumenty proměnných, samozřejmě $T_{olej} = T_{olej}(x)$, $T_{voda} = T_{voda}(x)$, $k = k\left(x, T_{olej}(x), T_{voda}(x), T_{def}\right)$.

Počáteční podmínky, řešení nalezených rovnic

Cauchy-Riemannovy podmínky, v našem případě $T_{voda}(x=0) = T_{in\,voda}$, $T_{olej}(x=0) = T_{in\,olej}$ nejsou totožné s fyzikálními určujícími podmínkami, resp. vstupy systému. Je korektní se ptát, „co dané zařízení provede s přivedenými médii“, úloha „jaká je vstupní teplota vody, je-li výstupní známá“ je obrácená úloha. Numerické metody (např. typu Runge-Kutta) Cauchy-Riemannovy podmínky vyžadují.
Pro řešení funkce výměníku je nutné respektovat fyzikální určující podmínky a tedy musíme diferenciální rovnice řešit metodou střelby.
V podstatě napíšeme funkci, jejímž je parametrem teplota vody pro $x = 0$ a vrací teplotu vody pro $x = x_{\max}$, tedy $T_{voda}(x = x_{\max}) = f\left(T_{voda}(x=0)\right)$ a numerickým řešením najdeme, pro jaká čísla platí $T_{in\,voda} = f\left(T_{olej\;x=0}\right)$. Jejím řešením získáme $T_{olej\;x=0}$, která určuje potřebnou Cauchy-Riemannovskou počáteční podmínku ve tvaru $T_{olej\;x=0}, T_{olej}(x=0) = T_{in\,olej} = T_{olej\;x=0}$.

Definiční teploty médií

Jelikož je $k = k\left(x, T_{olej}(x), T_{voda}(x), T_{def}\right)$ a ovšem $T_{def} = g(k) = g\left(k\left(x, T_{olej}(x), T_{voda}(x), T_{def}\right)\right)$, pro přesné řešení je nutné vyřešit (numericky) tuto rovnici a najít T_{def} pro každý krok numerického řešení.
Pro uvažované výměníky s poměrně velkým průtokem vody oproti průtoku oleje je zřejmé, že bude platit $\alpha_{olej} < \alpha_{voda}$. Navíc se teplota vody mění málo a její látkové vlastnosti následně oproti oleji také málo. Numerické experimenty prokázaly, že podél kanálu je poměrně málo proměnlivý podíl $\frac{\alpha_{olej}}{\alpha_{voda}} \overset{!}{=} \xi$, s typickou hodnotou $\frac{\alpha_{olej}}{\alpha_{voda}} \approx 0.2$. Označíme-li teplotu plechu $T_{pl}(x)$, pak můžeme nalézt řešení rovnice $\alpha_{voda} \cdot (T_{pl} - T_{voda}) = \alpha_{olej} \cdot (T_{olej} - T_{pl})$ a uvážit, že $\alpha_{olej} = \xi \cdot \alpha_{voda}$ a s použitím $\xi = 0.2$ získat teplotu $T_{pl}(x)$ jako lineární kombinaci $T_{voda}(x)$ a $T_{olej}(x)$. Použití hodnoty $\xi = 0.2$ je jen ilustrativní, program vychází z $x = 0.5 \cdot x_{\max}$ a předpokládaných teplot a následně Reynoldsových a Prandtlových čísel a poměru $\frac{D}{x}$ v tomto místě.

V korelaci pro součinitele přestupu tepla béřeme tedy ve smyslu $T_{def} = \frac{T_s + T_o}{2}$

$T_{def\,olej} = \frac{T_{pl} + T_{olej}}{2}$ a $T_{def\,voda} = \frac{T_{pl} + T_{voda}}{2}$ kde všechny teploty jsou lokální teploty, tedy $T_{def\,olej} = T_{def\,olej}(x)$ atd..

Energeticky ekvivalentní geometrie

Logicky volíme energeticky ekvivalentní geometrii nejjednoduššího uspořádání, tedy proudění kanálem obdélníkového řezu. Jelikož v Reynoldsově čísle vystupuje rychlost a není se jí možno zbavit jako *y* ve Fourier-Korchhoffově rovnici, jsou tyto údaje pro správné posouzení funkce výměníku (výkon, výstupní teploty médií) podstatné.

Bereme tedy: $b = \frac{S_{teplosmenna}}{x_{\max}}$, $S_k = b \cdot D$, přičemž vstupy jsou $x_{\max}$, $S_{teplosmenna}$ a *D*. Z látkových vlastností, hmotnostního toku médií a S_k pak počítáme rychlosti médií v kriteriálních vztazích.
Můžeme psát $S_k = b \cdot D$ protože v použitém kriteriálním vztahu $Nu = Nu(Gz)$ literatura uvádí, že pro štěrbinu je charakteristickým rozměrem její tloušťka (nikoli její dvojnásobek, jak také bývá obvyklé).

Štěrbina v deskovém výměníku nemá konstantní tloušťku, výpočet pro *D* rovnou hloubce lisování dává nejmenší charakteristický rozměr a následně největší přestup tepla.

Při vyšších Reynoldsových číslech (voda, větší průtoky teplejšího oleje) mají změny tloušťky štěrbiny pozitivní vliv na přestup tepla, pro uvažované výměníky je ovšem Reynoldsovo číslo tak malé (jednotky), že se tento vliv pravděpodobně neuplatní vůbec.

Vyhodnocení numerických řešení

Pro vstupy $x_{\max}$, $S_{teplosmenna}$ a *D* program vrací následující:

1. Grafické znázornění teplot oleje a vody jako funkcí *x*. Umožňuje vizuální kontrolu pravděpodobnosti správnosti řešení rovnic.
2. Předávané výkony, tedy $P_{olej} = \dot{m}_{olej} \cdot c_{p\,olej} \cdot \left(T_{in\ olej} - T_{out\,olej}\right)$ a $P_{voda} = \dot{m}_{vova} \cdot c_{p\,voda} \cdot \left(T_{out\ voda} - T_{in\,voda}\right)$, kde jednak můžeme výkon porovnat s výkonem udávaným výrobcem a navíc shodnost těchto výkonů je kontrolou přesnosti řešení diferenciálních rovnic.
3. $\frac{\alpha_{olej}}{\alpha_{voda}} \overset{!}{=} \xi$ pro argumentaci proti „problémům na straně vody“.
4. Pro $x = 0.5 \cdot x_{\max}$ některá podobnostní čísla a jejich poměry: pro ověření laminarity proudění a podobně.
5. Vyhodnocuje odchylky výpočtu od měření, je-li toto k dispozici.