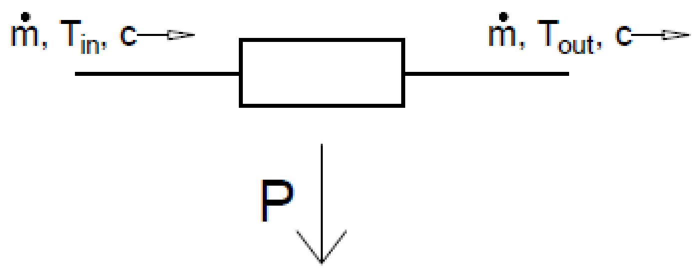
Výměníky: úvod do elementárních základů teorie a použití rekuperačních výměníků

Uvažme situaci podle Obr. 1, kdy tekutina o konstantní měrné tepelné kapacitě $c\ \left(J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}\right)$ a hmotnostním průtoku $\overline{m}\ \left(kg\cdot s^{-1}\right)$ předává tepelný výkon $P\ \left(W\right)$, vstupní teplota je $T_{in}\ \ \left(°C,K\right)$ a výstupní $T_{out}\ \ \left(°C,K\right)$.

Pak (analogicky ke Kirchhoffovu zákonu pro součet proudů v uzlu elektrického obvodu) platí:
$\overline{m}\cdot c\cdot T_{in}=P+\overline{m}\cdot c\cdot T_{out}$, resp. $\overline{m}\cdot c\cdot\left(T_{in}-T_{out}\right)=P$.



Obr. 1: bilance výkonu proudícího média

Uvažme situaci, kdy tekutina předává tepelný výkon do teplosměnné plochy na délce dx, teplotu média na vstupu tedy označme $T\left(x\right)$ a na výstupu $T\left(x+dx\right)$.

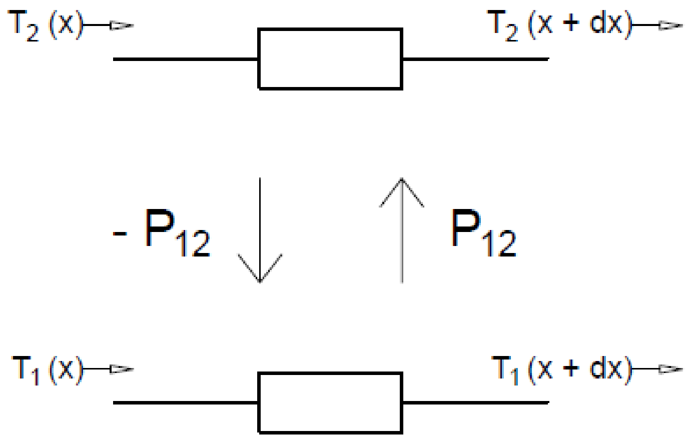
Uvažme první dva členy Taylorova rozvoje, tedy:

$$T\left(x+dx\right)=T\left(x\right)+\frac{dT}{dx}\cdot dx$$

a tedy $\overline{m}\cdot c\cdot\left(T\left(x\right)-T\left(x+dx\right)\right)=-\overline{m}\cdot c\cdot\frac{dT}{dx}=dP$.

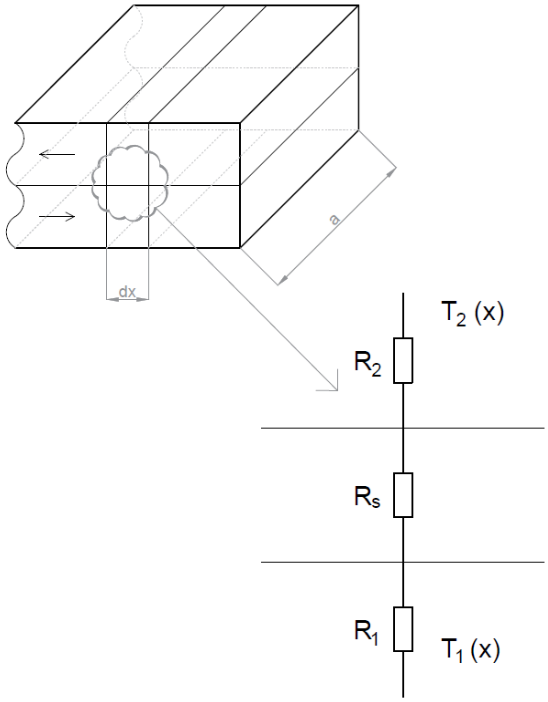
V regeneračním výměníku tepla přestupuje tepelný výkon z tekutiny do teplosměnné plochy konvekcí, vedením prostupuje teplosměnnou plochou vedením tepla a pak opět z druhého povrchu přestupuje konvekcí do tekutiny. Pro ustálené stavy můžeme situaci znázornit pomocí tepelných odporů jako na Obr. 2 a vyjádřit měrný tepelný tok $q\ \left(W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}\right)$:

$q=\frac{T_1-T_2}{R_1+R_S+R_2}\overset{!}{=}k\cdot\left(T_1-T_2\right)$, kde $R_1=\frac{1}{\alpha_1}$, $R_s=\frac{d}{\lambda}$, $R_2=\frac{1}{\alpha_2}$ jsou tepelné odpory odpovídající přetupu konvekcí a vedení tepla, $\alpha_1,\alpha_2\ \left(W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}\right)$ jsou součinitelé přestupu tepla konvekcí, $d\ \left(m\right)$ tloušťka materiálu oddělující tekutiny a $\lambda\ \left(W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}\right)$ je součinitel tepelné vodivosti materiálu a $k\ \left(W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}\right)$ je součinitel prostupu tepla (stavaři jej znají dnes jako *U*).



Obr. 2 Výměna tepelného výkonu mezi dvěma proudícími médii

Uvažme situaci podle Obr. 3:
Poznámka: při podobných odvození je výhodné představit si, že například médium s indexy 1 je teplejší a předává teplo médiu 2. Pak nespleteme znaménka. Ve vzorcích to nikdo nepozná, budou platit i pro obrácený směr tepelného toku.



Obr. 3 Modelová situace deskového výměníku a její tepelný model

Výkon předávaný z tekutiny 1 do tekutiny 2 můžeme vyjádřit:

$$dP_{1\to 2} = q \cdot dS = k \cdot (T_1 - T_2) \cdot dS = k \cdot a \cdot (T_1 - T_2) \cdot dx$$

a rovnice pro teploty tekutin obdržíme:

$$-\overline{m}_1 \cdot c_1 \cdot \frac{dT_1}{dx} \cdot dx = dP_{1\to 2}, \quad -\overline{m}_2 \cdot c_2 \cdot \frac{dT_2}{dx} \cdot dx = -dP_{1\to 2}$$

$$-\overline{m}_1 \cdot c_1 \cdot \frac{dT_1}{dx} = k \cdot a \cdot \left(T_1 - T_2\right), \ -\overline{m}_2 \cdot c_2 \cdot \frac{dT_2}{dx} = -k \cdot a \cdot \left(T_1 - T_2\right)$$

Formální úpravou pak získáme:

$$\frac{dT_1}{dx} = -\frac{k \cdot a}{\overline{m}_1 \cdot c_1} \cdot \left(T_1 - T_2\right), \ \frac{dT_2}{dx} = \frac{k \cdot a}{\overline{m}_2 \cdot c_2} \cdot \left(T_1 - T_2\right)$$

$$\frac{dT_1}{dx} - \frac{dT_2}{dx} = -\left(\frac{k \cdot a}{\overline{m}_1 \cdot c_1} + \frac{k \cdot a}{\overline{m}_2 \cdot c_2}\right) \cdot \left(T_1 - T_2\right) \overset{!}{=} -\psi \cdot \left(T_1 - T_2\right)$$

$$\psi = \left(\frac{k \cdot a}{\overline{m}_1 \cdot c_1} + \frac{k \cdot a}{\overline{m}_2 \cdot c_2}\right)$$

Jelikož platí $\frac{dT_1}{dx} - \frac{dT_2}{dx} = \frac{d}{dx}\left(T_1 - T_2\right)$, přijměme označení $T_1 - T_2 \overset{!}{=} \Delta\left(x\right)$ a získáme separovatelnou obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\psi \cdot \Delta \ \Rightarrow \frac{d\Delta}{\Delta} = -\psi \cdot dx \Rightarrow \ln\frac{\Delta\left(x\right)}{\Delta\left(0\right)} = -\psi \cdot x$$

Obdrželi jsme závislost rozdílu teplot tekutin na souřadnici x.

Naším cílem je ovšem výkon předávaný výměníkem.

Aplikujme poslední vztah pro $x = x_{\max}$:

$\ln\frac{\Delta\left(x_{\max}\right)}{\Delta\left(0\right)} = -\psi \cdot x_{\max}$ a vyjádřeme rozdíl teplot médií:

$\Delta\left(x\right) = \Delta\left(0\right) \cdot e^{-\psi \cdot x}$, pro elementární výkon sdílený na délce dx pak platí:

$dP_{1\to 2} = k \cdot a \cdot \left(T_1 - T_2\right) \cdot dx = k \cdot a \cdot \Delta\left(x\right) \cdot dx$, celkový výkon pak získáme integrací:

$$P_{1\to 2} = \int_{x=0}^{x=x_{\max}} dP_{1\to 2} = \int_{x=0}^{x=x_{\max}} \Delta\left(0\right) \cdot e^{-\psi \cdot x} \cdot k \cdot a \cdot dx = \Delta\left(0\right) \cdot k \cdot a \cdot \left[\frac{-1}{\psi} \cdot e^{-\psi \cdot x}\right]_{x=0}^{x=x_{\max}} =$$

$$= \frac{k \cdot a \cdot \Delta\left(0\right)}{\psi} \cdot \left(e^{-\psi \cdot 0} - e^{-\psi \cdot x_{\max}}\right) = \frac{k \cdot a}{\psi} \cdot \left(\Delta\left(0\right) - \Delta\left(x_{\max}\right)\right)$$

Ze vztahu $\ln\frac{\Delta\left(x_{\max}\right)}{\Delta\left(0\right)} = -\psi \cdot x_{\max}$ vyjádříme ψ a obdržíme:

$$P_{1\to 2} = \frac{k \cdot a}{\frac{1}{x_{\max}} \cdot \ln\frac{\Delta\left(x_{\max}\right)}{\Delta\left(0\right)}} \cdot \left(\Delta\left(0\right) - \Delta\left(x_{\max}\right)\right) = \frac{k \cdot a \cdot x_{\max}}{-\ln\frac{\Delta\left(x_{\max}\right)}{\Delta\left(0\right)}} \cdot \left(\Delta\left(0\right) - \Delta\left(x_{\max}\right)\right) =$$

$$= \frac{k \cdot a \cdot x_{\max}}{\ln\frac{\Delta\left(0\right)}{\Delta\left(x_{\max}\right)}} \cdot \left(\Delta\left(0\right) - \Delta\left(x_{\max}\right)\right)$$

Součin $a \cdot x_{\max}$ je ovšem roven celkové teplosměnné ploše, kterou označíme S a konečně obdržíme:

$P_{1\to 2} = k\cdot S\cdot \dfrac{\Delta(0)-\Delta(x_{\max})}{\ln\dfrac{\Delta(0)}{\Delta(x_{\max})}}$, kde výrazu $\dfrac{\Delta(0)-\Delta(x_{\max})}{\ln\dfrac{\Delta(0)}{\Delta(x_{\max})}}$ říkáme „logaritmický teplotní spád“.

Vzorec dále budu používat s obvyklým značením rozdílů teplot tekutin:

$$P = k\cdot S\cdot \frac{\Delta_1-\Delta_2}{\ln\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}}.$$

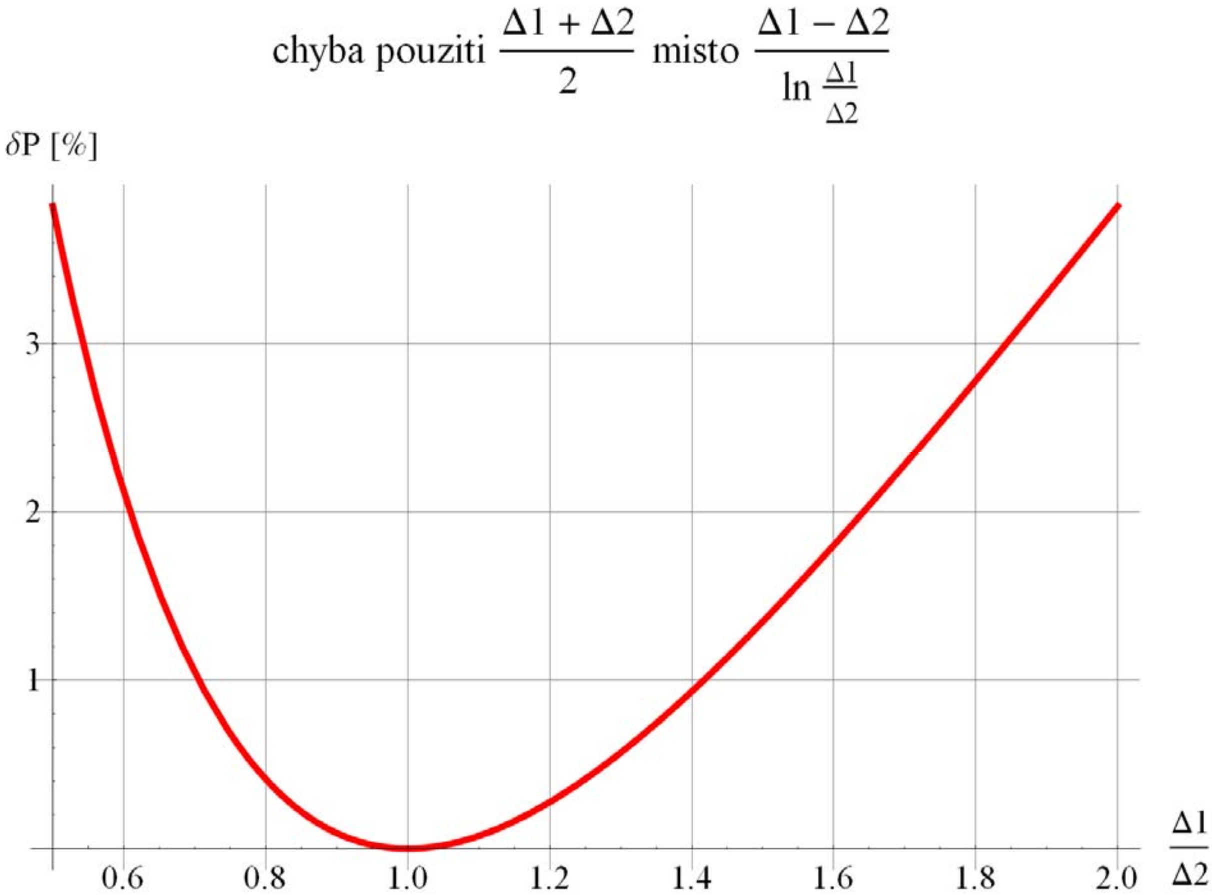
Poznámky k výslednému vzorci:

1. Pro $\Delta_1 = \Delta_2$ sice zdánlivě máme problém s výrazem typu $"\frac{0}{0}"$, ale chceme-li exhibovat, snadno ukážeme, že $\lim\limits_{\Delta_2\to\Delta_1}\dfrac{\Delta_1-\Delta_2}{\ln\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}} = \Delta_1$, ovšem tenhle výsledek je z „teplařského“ hlediska samozřejmý a pro tento případ nebylo vlastně nic třeba odvozovat. Příslušná situace nastává když platí $\overline{m}_1\cdot c_1 = \overline{m}_2\cdot c_2$, což je například situace, kdy při vytápění rekuperujeme teplo z odpadního vzduchu.
2. Logaritmus je svým způsobem pro numerické výpočty „nepříjemná funkce“: pokud při numerickém řešení bude jeho parametr záporný, tak pokud půjde o SW se zabudovanou komplexní aritmetikou, tak výpočet zabloudí a pokud dá výsledek, tak ne z tohoto světa (komplexní teploty, případně průtoky), pokud ne, pak nahlásí chybu a výpočet skončí bez výsledku. Tomu lze zabránit dobrým počátečním odhadem a nebo využitím přibližného vzorce: $\Delta_1\approx\Delta_2 \Rightarrow \dfrac{\Delta_1-\Delta_2}{\ln\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}} \approx \dfrac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$. Chybu způsobenou použitím přibližného vzorce odhadneme pomocí triku, kterým převedeme závislost na funkci jedné proměnné:

$$\delta = 100\cdot\left(1-\frac{\dfrac{\Delta_1-\Delta_2}{\ln\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}}}{\dfrac{\Delta_1+\Delta_2}{2}}\right)\ (\%),\quad \delta = 100\cdot\left(1-\frac{2\cdot(\Delta_1-\Delta_2)}{(\Delta_1+\Delta_2)\cdot\ln\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}}\right) =$$

$$= 100\cdot\left(1-\frac{2\cdot\left(\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}-1\right)}{\left(\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}+1\right)\cdot\ln\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}}\right) = 100\cdot\left(1-\frac{2\cdot(\xi-1)}{(\xi+1)\cdot\ln\xi}\right)$$

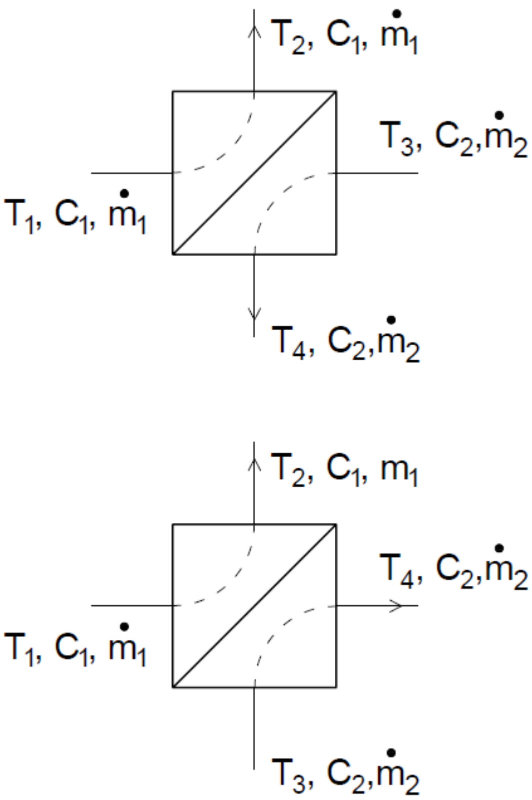
Chybu použití přibližného vzorce ukazuje Obr. 4



Obr. 4 Chyba určení výkonu při použití přibližného vztahu

Další poznámky:

1. Výkon předávaný výměníkem vychází při použití přibližného vztahu *menší* než skutečný.
2. Vzorec pro určení výkonu platí shodně i pro souproud, pokud označíme teploty podle Obr. 5



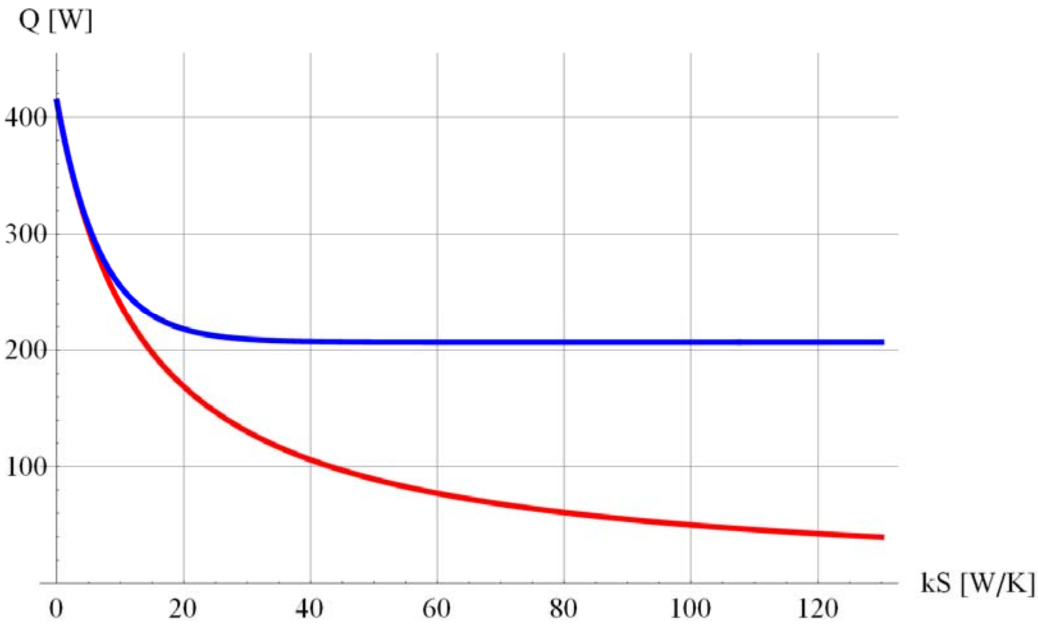
Obr. 5 Označení teplot pro výpočet předávaného výkonu pro souproud a protiproud

<u>Problematika volby souproud kontra protiproud</u>

Řešení rovnic je v notebooku „souproudAProtiproud.nb“.

1. Souproudým výměníkem nikdy (ani při nekonečné hodnotě kS) nemůžeme využít všechno teplo z primárního média, Obr. 6 ukazuje úsporu při rekuperaci tepla

z odpadního vzduchu pro ohřev čerstvého vzduchu při vytápění, červená čára znázorňuje potřebný výkon při použití protiproudu a modrá souproudu.

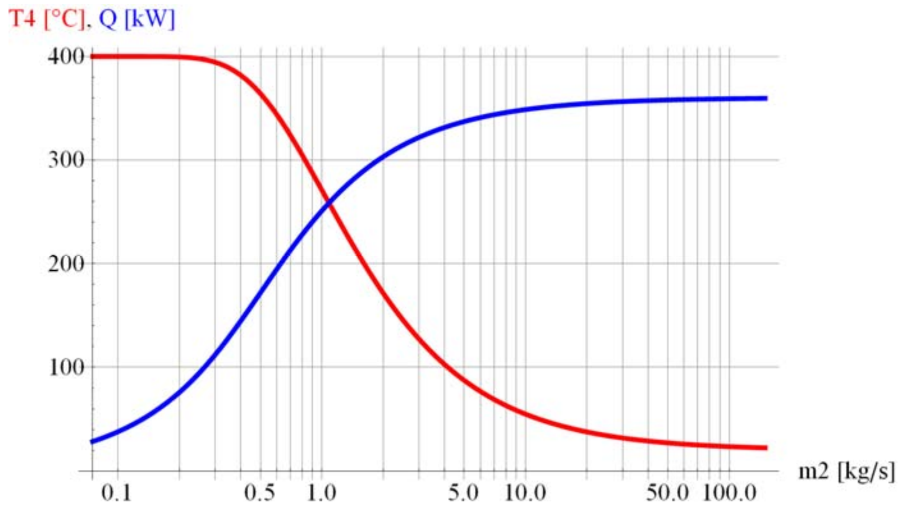


Obr. 6 Úspora tepla při použití souproudu (modře) a protiproudu (červeně)

2. Důvody použití protiproudu mohou být tedy materiálové, případně ekonomické

Problematika „chceme teplo, nebo teplotu?"

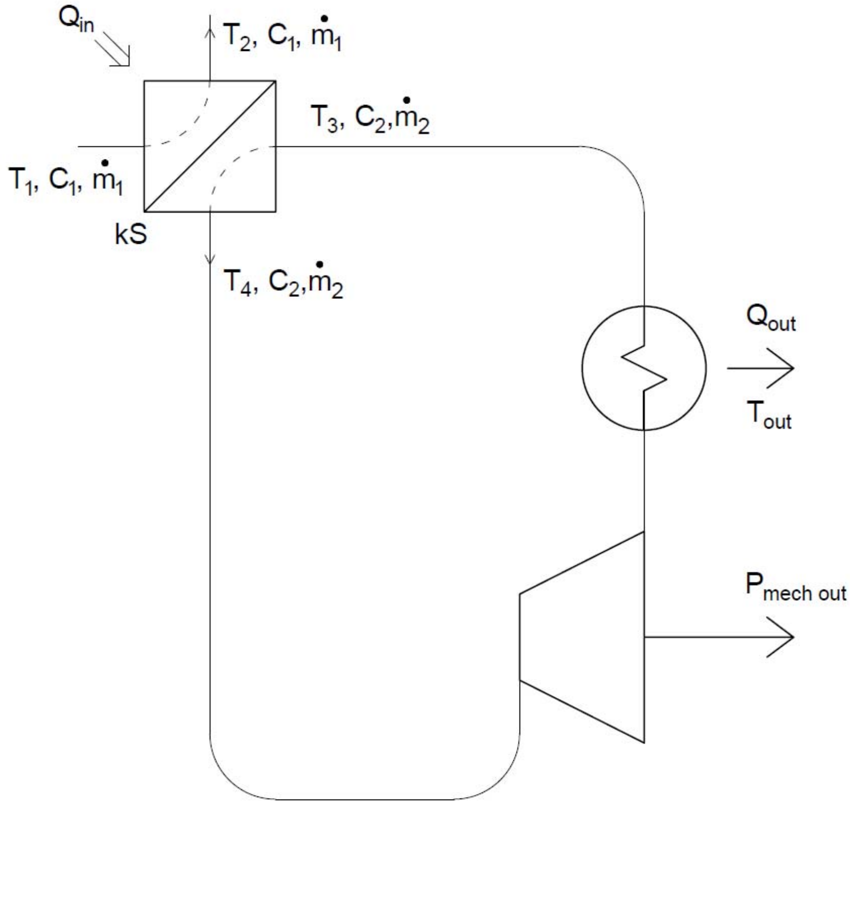
Podívejme se, jak se mění pro jedno zvolené kS, průtok a vstupní teplotu primárního média výstupní teplota sekundárního média, jak ukazuje Obr. 7, podle teploATeplota.nb



Obr. 7 Výkon a výstupní teplota protiproudého výměníku v závislosti na průtoku sekundárního média

Vidíme, že „nemůžeme mít obojí“: vysoký předaný výkon znamená (při konstantních vstupech) nízkou výstupní teplotu.
Podstatné tedy je, jaký je náš cíl: pokud nás teplota příliš nezajímá (přihřívání vratného kondenzátu v případě příhřevu odběrovou parou při zvyšování účinnosti Rankinova cyklu v parní elektrárně), pak volíme velký výkon i za ceny malého nárůstu teploty sekundárního média.
Pokud je pro nás teplota důležitá (například výměník před zařízením ORC), musíme najít kompromis.

Uvažme (modelovou, silně zjednodušenou) situaci, kdy napájíme ORC přes protiproudý výměník tepla, situace podle Obr. 8



Obr. 8 Protiproudý výměník jako zdroj tepla pro tepelný stroj

Rovnice popisující situaci jsou:

$$Qin = \overline{m}_1 \cdot c_1 \cdot (T_1 - T_2)$$
$$Qin = \overline{m}_2 \cdot c_2 \cdot (T_1 - T_2)$$
$$Qin = Pmechout + Qout$$
$$\Delta 1 = T_1 - T_4$$
$$\Delta 2 = T_2 - T_3$$
$$Qin = kS \cdot \frac{\Delta 1 - \Delta 2}{\ln \frac{\Delta 1}{\Delta 2}} \approx \frac{\Delta 1 + \Delta 2}{2}$$
$$Pmechout = \eta_{TD} \cdot \eta_{Carnot} \cdot Qin$$
$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{Tout + 273}{T_4 + 273}$$
$$T_3 = Tout + \Delta out$$

Řešení rovnic je naprogramováno v noteboooku carnotEcoExchanger.nb

Dále můžeme ocenit vyrobenou mechanickou (zpravidla transformovanou na elektrickou) energii a výstupní teplo.
Pokud přepočteme (nějakým korektním ekonomickým modelem) investiční náklady na stejné období, můžeme psát:

$CF = c_{mech} \cdot Pmechout + c_{Qout} \cdot Qout - (A_a + A_b \cdot kS)$, kde poslední závorka znamená přepočtenou cenu výměníku jako linearizaci v závislosti na kS, můžeme snadno najít optimální průtok sekundárního média a kS a toto vzít jako základ pro dimenzování s uvažováním možných výměníků a průtoků.
Poznámka: chceme-li vyrábět mechanickou energii, pak zadáním záporné hodnoty c_{Qout} můžeme respektovat náklady na chlazení ORC zařízení a podobně...

Další poznámky k výměníkům obecně:

1. Než začnete řešit úlohy s výměníky, doporučuji si situace *představit*, tedy jak média proudí, ohřívají se. , chladnou... a teprve poté se dát do popisu systému rovnicemi. Každou rovnici pak konfrontovat, jestli odpovídá naší představě (v mysli měnit parametry, tedy průtoky, teploty, kS).
2. Uvažovat budoucí provoz zařízení, co budou vstupy a výstupy systému.

Z technického hlediska mění:

- nejsnadněji: průtoky médií (změna regulace čerpadel či ventilátorů, případně škrcení (entropicky nevýhodné oproti regulaci čerpadel))
- snadno při realizaci zařízení se mění kS (výběr z vyráběných variant, objednávka na zakázku). Při provozu si sice lze představit výměník s regulovatelnou hodnotou kS, ale z praktického hlediska je to pitomost
- nejhůře se mění výstupní teploty médií a výkon výměníku: prakticky jsou výsledkem změn předchozích parametrů pomocí regulačního či ovládacího systému

Zkušenost: je-li vstupem veličina, která je vstupem v reálném provozu, obvykle je řešení rovnic systému snazší, než zadáváme-li např. výstupní teploty.

3. Dimenzování výměníku by mělo obsahovat ekonomický výpočet: kS a průtoky ovlivňují provozní úspory(využití tepla)/náklady(ventilátory, čerpací práce) a investiční náklady jsou zejména na pořízení výměníku a infrastruktury, bez výpočtu těžko dosáhneme optimálního provozu systému za dobu života.
4. Přepočty parametrů výměníku na jiné průtoky a teploty je možné dělat, nicméně je třeba vědět něco o charaktery proudění uvnitř (hodnota Reynoldsova čísla, parametry médií). Pozor na změnu teploty zejména jde-li o oleje (silně závislá kinematická viskozita na teplotě oleje).