Eulerova metoda

Iterativní aplikování výsledku funkce jako argumentu do další iterace funkce

In[3644]:=
```
ClearAll["Global`*"]
```

Nejprve si připomeňme, co dělají funkce **Nest** a **NestList**, které budeme používat pro naše výpočty.

In[3645]:=
```
Nest[g, x, 5]
```

Out[3645]=
```
g[g[g[g[g[x]]]]]
```

In[3646]:=
```
Nest[Cos, x, 5]
```

Out[3646]=
```
Cos[Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]
```

In[3647]:=
```
Nest[Cos, x = 0, 5]
```

Out[3647]=
```
Cos[Cos[Cos[Cos[1]]]]
```

In[3648]:=
```
ClearAll[x]
```

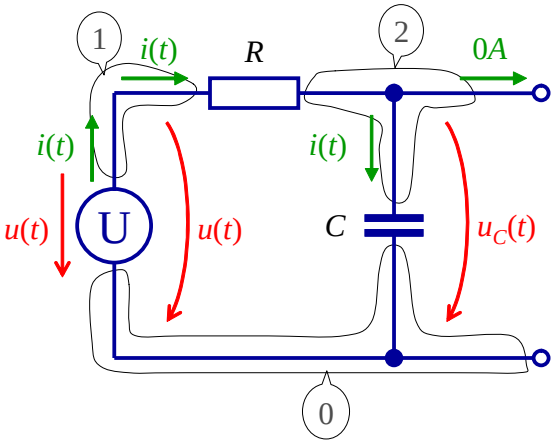
In[3649]:=
```
NestList[g, x, 5]
```

Out[3649]=
```
{x, g[x], g[g[x]], g[g[g[x]]], g[g[g[g[x]]]], g[g[g[g[g[x]]]]]}
```

In[3650]:=
```
NestList[Cos, x = 0, 5]
```

Out[3650]=
```
{0, 1, Cos[1], Cos[Cos[1]], Cos[Cos[Cos[1]]], Cos[Cos[Cos[Cos[1]]]]}
```

Nabíjení kondenzátoru přes rezistor - numerická metoda



Zadání obvodu

In[3651]:=
```
ClearAll["Global`*"]
u = 10.; (*napětí zdroje napětí*)
u0 = 0.; (*počáteční napětí na kondenzátoru*)
R = 100.;(*odpor rezistoru*)
Cap = 10^-6;(*kapacita kondenzátoru*)
tmin = 0.;(*počáteční čas*)
tmax = 0.001;(*konečnýčas*)
```

Řešení obvodu

Použijeme Eulerovu metodu, která počítá průběh funkce podle vzorce:

$$f(t + \Delta t) \approx f(t) + f'(t)\cdot\Delta t$$

V našem případě bude hledanou funkcí napětí *uc* na konenzátoru, tedy:

$$uc(t + \Delta t) \approx uc(t) + uc'(t)\cdot\Delta t$$

Derivaci napětí *uc*' vyjádříme z obvodových rovnic. Použijeme zjednodušený popis z notebooku **CAO-Uzly-Priklad2-Kratsi.nb**.

rezistor R: $u(t) - uc(t) == R\cdot i(t)$

kondenzátor C: $i(t) == Cap\cdot uc'(t)$

Z toho dostáváme

$$u(t) - uc(t) == R\cdot Cap\cdot uc'(t);$$

a tedy

$$uc'(t) == \frac{u(t)-uc(t)}{R\cdot Cap}$$

Dosadíme-li hodnotu derivace do vzorce pro Eulerovu metodu, dostáváme iterativní vzorec pro výpočet napětí v čase $t + \Delta t$ při znalosti napětí v čase t:

$$uc(t + \Delta t) \approx uc(t) + \frac{u(t)-uc(t)}{R\cdot Cap}\cdot\Delta t$$

Interval řešení si rozdělíme na $n = 100$ menších úseků. Každý úsek má velikost Δt.

In[3658]:=
```
n = 100;(*počet kroků mezi počátečním a konečným časem*)
Δt = tmax/n;(*velikost kroku*)
```

V jednom kroku Eulerovy metody z napětí *uc* v čase *t* spočítáme nové napětí *uc* v čase $t + \Delta t$. Tedy v čase postoupíme z *t* do $t + \Delta t$, v napětí postoupíme z *uc* do $uc + \frac{u-uc}{R*Cap} * \triangle t$

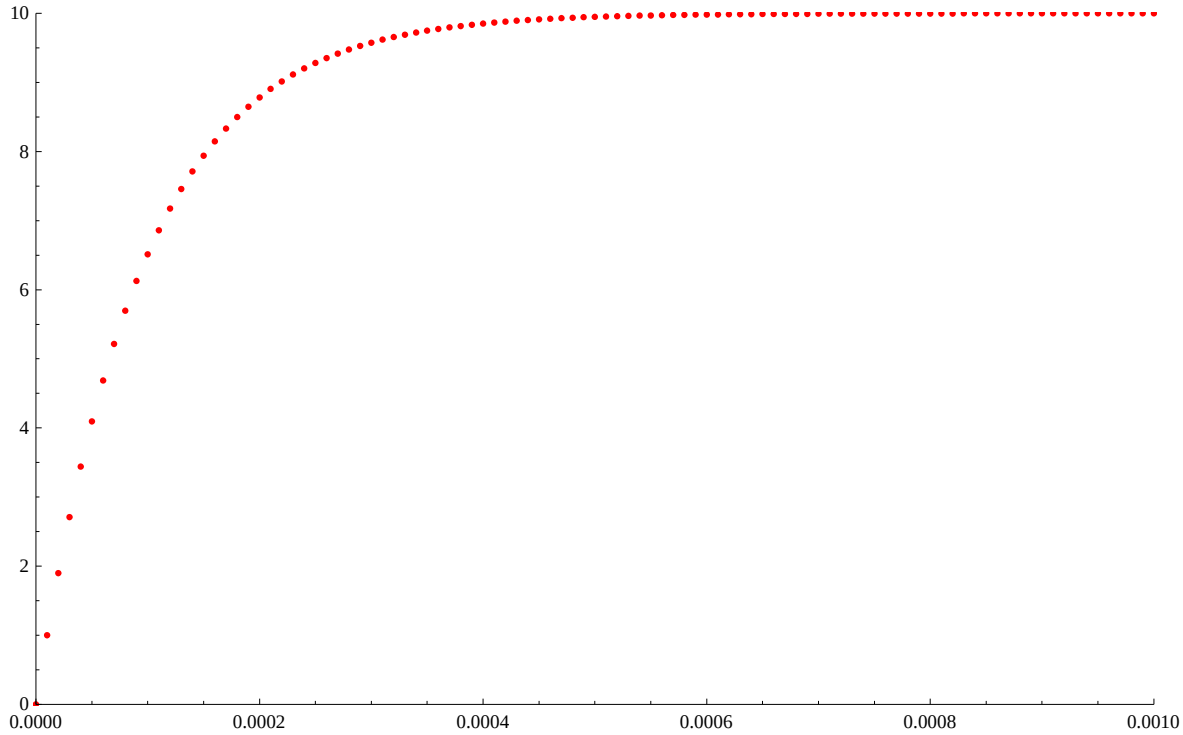
In[3660]:=
```
krok[{t_, uc_}] := {t + Δt, uc + (u - uc)/(R * Cap) * Δt};
NestList[krok, {t = tmin, uc = u0}, n](*Vypíše list (seznam) všech iterací*)
```

Out[3661]=
```
{{0., 0.}, {0.00001, 1.}, {0.00002, 1.9}, {0.00003, 2.71}, {0.00004, 3.439},
 {0.00005, 4.0951}, {0.00006, 4.68559}, {0.00007, 5.21703}, {0.00008, 5.69533},
 {0.00009, 6.1258}, {0.0001, 6.51322}, {0.00011, 6.86189}, {0.00012, 7.1757},
 {0.00013, 7.45813}, {0.00014, 7.71232}, {0.00015, 7.94109}, {0.00016, 8.14698},
 {0.00017, 8.33228}, {0.00018, 8.49905}, {0.00019, 8.64915}, {0.0002, 8.78423},
 {0.00021, 8.90581}, {0.00022, 9.01523}, {0.00023, 9.11371}, {0.00024, 9.20234},
 {0.00025, 9.2821}, {0.00026, 9.35389}, {0.00027, 9.4185}, {0.00028, 9.47665},
 {0.00029, 9.52899}, {0.0003, 9.57609}, {0.00031, 9.61848}, {0.00032, 9.65663},
 {0.00033, 9.69097}, {0.00034, 9.72187}, {0.00035, 9.74968}, {0.00036, 9.77472},
 {0.00037, 9.79724}, {0.00038, 9.81752}, {0.00039, 9.83577}, {0.0004, 9.85219},
 {0.00041, 9.86697}, {0.00042, 9.88027}, {0.00043, 9.89225}, {0.00044, 9.90302},
 {0.00045, 9.91272}, {0.00046, 9.92145}, {0.00047, 9.9293}, {0.00048, 9.93637},
 {0.00049, 9.94274}, {0.0005, 9.94846}, {0.00051, 9.95362}, {0.00052, 9.95825},
 {0.00053, 9.96243}, {0.00054, 9.96619}, {0.00055, 9.96957}, {0.00056, 9.97261},
 {0.00057, 9.97535}, {0.00058, 9.97781}, {0.00059, 9.98003}, {0.0006, 9.98203},
 {0.00061, 9.98383}, {0.00062, 9.98544}, {0.00063, 9.9869}, {0.00064, 9.98821},
 {0.00065, 9.98939}, {0.00066, 9.99045}, {0.00067, 9.9914}, {0.00068, 9.99226},
 {0.00069, 9.99304}, {0.0007, 9.99373}, {0.00071, 9.99436}, {0.00072, 9.99492},
 {0.00073, 9.99543}, {0.00074, 9.99589}, {0.00075, 9.9963}, {0.00076, 9.99667},
 {0.00077, 9.997}, {0.00078, 9.9973}, {0.00079, 9.99757}, {0.0008, 9.99782},
 {0.00081, 9.99803}, {0.00082, 9.99823}, {0.00083, 9.99841}, {0.00084, 9.99857},
 {0.00085, 9.99871}, {0.00086, 9.99884}, {0.00087, 9.99896}, {0.00088, 9.99906},
 {0.00089, 9.99915}, {0.0009, 9.99924}, {0.00091, 9.99931}, {0.00092, 9.99938},
 {0.00093, 9.99944}, {0.00094, 9.9995}, {0.00095, 9.99955}, {0.00096, 9.9996},
 {0.00097, 9.99964}, {0.00098, 9.99967}, {0.00099, 9.9997}, {0.001, 9.99973}}
```

Vykreslení výsledků - numerická metoda

In[3662]:=
```
graf1 = ListPlot[NestList[krok, {t = 0, uc = 0}, n],
  PlotRange → {{tmin, tmax}, {u0, u}}, PlotStyle → {Red, Thick}]
```

Out[3662]=



Nabíjení kondenzátoru přes rezistor - analytická metoda

Zadání obvodu

In[3663]:=
```
ClearAll[u, R, Cap, tmin, tmax, u0, rce1, poc1, reseni, uc, t]
u = 10;
R = 100;
Cap = 10^-6;
tmin = 0;
tmax = 0.001;
u0 = 0;
```

Řešení obvodu

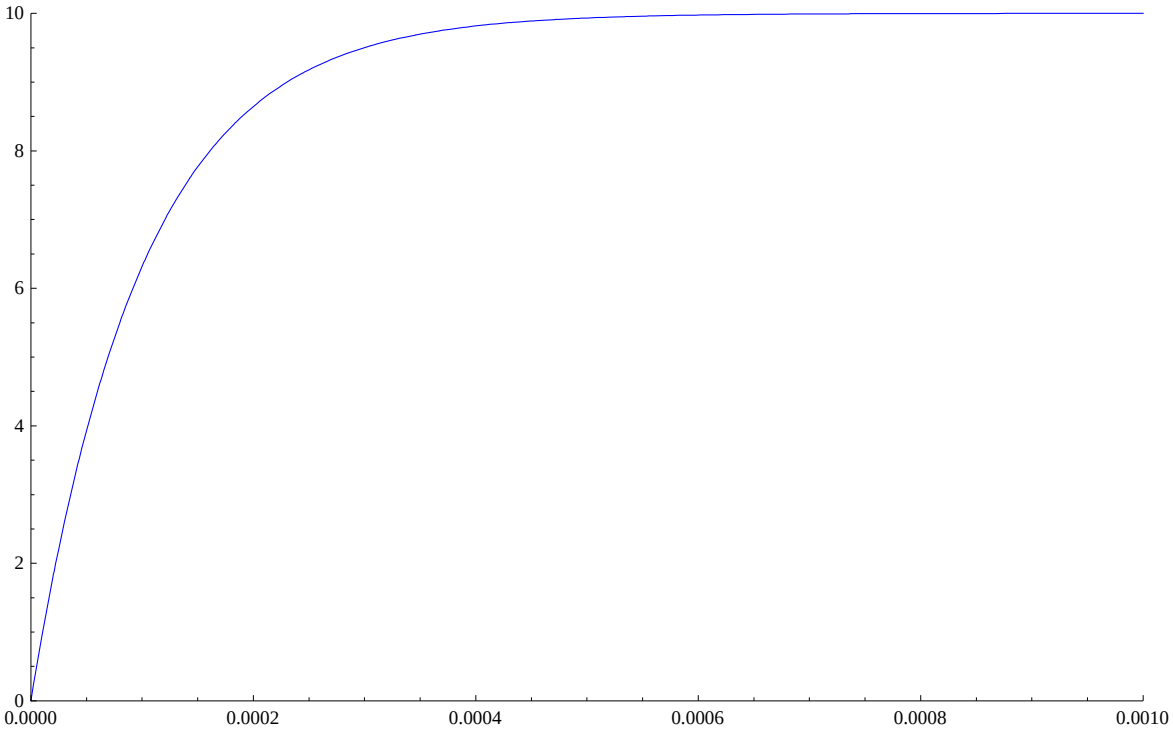
In[3670]:=
```
rce1 = uc[t] == u - R * Cap * uc'[t];
poc1 = uc[0] == u0;
reseni = DSolve[{rce1, poc1}, uc[t], t]
```

Out[3672]=
$$\{\{uc[t] \to 10\, e^{-10\,000\,t}\left(-1 + e^{10\,000\,t}\right)\}\}$$

Vykreslení výsledků - analytická metoda

In[3673]:=
```
graf2 = Plot[uc[t] /. reseni, {t, 0, 0.001},
  PlotRange → {{tmin, tmax}, {u0, u}}, PlotStyle → Blue]
```

Out[3673]=

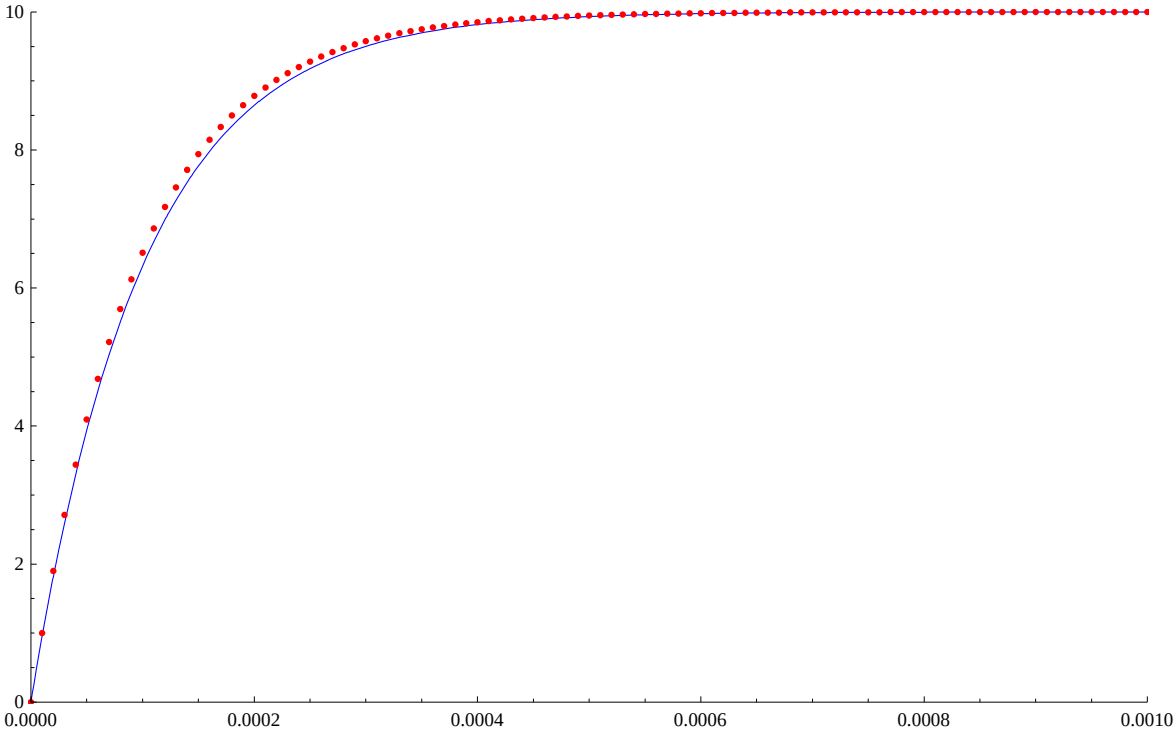


Srovnání přesnosti obou metod

Analytická metoda je přesná, protože řešení diferenciální rovnice je nejprve spočteno analyticky. Výsledkem je matematická funkce, ze které je teprve vykreslen graf.
Numerická metoda je méně přesná a přesnost závisí na velikosti kroku. Jemnější krok znamená vyšší přesnot. Výhodou je, že numerická metoda funguje i tehdy, kdy analytické řešení nelze nalézt.

In[3674]:=
```
Show[graf2, graf1]
```

Out[3674]=



Pozorujte velikost odchylky numerické metody od přesného analytického řešení pro různou velikost kroku. Změna hodnoty proměnné *n* nepřímo úměrně ovlivňuje krok v numerické metodě.
Doporučujeme vyzkoušet *n* = 15,30,50,100 a 200.

Samostatné úlohy

Vykreslete graf proudu **i[t]**, který teče kondenzátorem

Vykreslete graf napětí na rezistoru