Lineární algebra : Vlastní čísla, vektory a diagonalizace

(14. přednáška)

František Štampach, Karel Klouda

LS 2013/2014

vytvořeno: 21. dubna 2014, 19:37

14.1 Vlastní čísla a vlastní vektory

Geometrická motivace 1/2

- Nechť je dán lineární operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a jeho matice ve standardní bázi $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}_2}A$.
- Pokusme se najít všechny přímky p v $\mathbb{R}^2$ procházející počátkem takové, že $Ap = p$.
- Označíme-li $u \in \mathbb{R}^2$ směrový vektor přímky p, platí $p = \langle u \rangle$ a $u \neq \theta$.
- Podmínka $Ap = p$ je splněna tehdy a jenom tehdy, existuje-li $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že
$$\mathbb{A}u = \lambda u.$$
- K zadané matici $\mathbb{A}$ tedy hledáme dvojici (λ, u), kde λ je číslo a u je *nenulový* vektor tak, aby platilo
$$\mathbb{A}u = \lambda u.$$
- Má-li aspoň jedna hledaná přímka p existovat, musí mít homogenní soustava s maticí $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}$ nenulové řešení. Tedy matice $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}$ musí být singulární, tzn.
$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0.$$

Geometrická motivace 2/2

- $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E})$ je polynom 2. stupně v proměnné λ. Pokud má dva různé reálné kořeny λ_1 a λ_2, existují i dvě nenulová řešení u_1 a u_2 homogenních soustav s maticemi $\mathbb{A} - \lambda_1\mathbb{E}$ a $\mathbb{A} - \lambda_2\mathbb{E}$.
- Nalezneme tak dvě přímky $p_i = \langle u_i \rangle$ takové, že $Ap_i = p_i$, $i \in \{1, 2\}$.
- Ilustrujte si tento případ na příkladě, kde A je operátor zrcadlení podle nějaké přímky v $\mathbb{R}^2$. (Přímky nejprve uhádněte, potom spočítejte!)

- Polynom $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E})$ ale nemusí mít vůbec žádné realné kořeny. V takovém případě neexistuje žádná přímka p v $\mathbb{R}^2$ taková, že $Ap = p$.
- Ilustrujte si tento případ na příkladě, kde A je operátor rotace o úhel $\varphi \in (0, \pi)$ v $\mathbb{R}^2$.

Vlastní čísla a vektory operátoru

V celé této kapitole budeme pracovat v tělese **komplexních čísel** $T = \mathbb{C}$.

Definice 1. *Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo operátoru $A \in \mathcal{L}(V)$ právě když existuje $x \in V$, $x \neq \theta$, takový, že $Ax = \lambda x$. Vektor x pak nazýváme vlastním vektorem operátoru A příslušejícím vlastnímu číslu λ. Množinu všech vlastních čísel A nazýváme spektrem A a značíme $\sigma(A)$.*

Poznámka 2. *Víme, že na matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ se můžeme dívat také jako na lineární zobrazení*

$$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : \mathbb{x} \mapsto \mathbb{A} \cdot \mathbb{x}.$$

Zcela analogicky bychom proto definovali vlastní čísla, vektory a spektrum matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. (Definici si napište!)

Také následující věty vyslovené pro operátory platí ve stejném znění i pro matice (je to speciálním případ).

Invariatní podprostor

Definice 3. *Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$ a $P \subset\subset V$. Říkáme, že P je invariatní podprostor vzhledem k operátoru A právě když $A(P) \subset P$.*

Pro vlastní číslo λ operátoru A s vlastním vektorem x platí:

$$Ax = \lambda x \;\Leftrightarrow\; Ax - \lambda x = \theta \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda E)x = \theta.$$

Odtud vidíme, že

$\{$vlastní vektory operátoru A příslušející vlastnímu číslu $\lambda\} = \ker(A-\lambda E)\setminus\{\theta\}$

Prostor $\ker(A - \lambda E)$ nazýváme vlastní podprostor operátoru A příslušející vlastnímu číslu λ.

Věta 4. *Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \sigma(A)$. Vlastní podprostor operátoru A příslušející vlastnímu číslu λ je invariatním podprostorem vzhledem k A.*

Důkaz. Buď $x \in \ker(A - \lambda E)$, potom $Ax = \lambda x$, a tedy $Ax \in \ker(A - \lambda E)$. $\square$

Soubor vlastních vektorů k různým vlastním číslům je LN

Věta 5. *Nechť* $A \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *jsou navzájem různá vlastní čísla* A, x_i *je vlastní vektor* A *příslušející vlastnímu číslu* λ_i, $i \in \hat{k}$. *Potom soubor* $(x_1, \dots, x_k)$ *je LN.*

Důkaz. Pro $k = 1$ je tvrzení triviální. Pro $k \geq 2$ provedeme důkaz sporem. Předpokládejme soubor $(x_1, \dots, x_k)$ je LZ. Potom $\exists \ell \in \hat{k}$ takový, že

$$x_\ell \in \langle x_1, \dots, x_{\ell-1} \rangle \text{ a současně } (x_1, \dots, x_\ell) \text{ je LN.}$$

(Rozmyslete!) Existují tedy $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1} \in \mathbb{C}$ tak, že

$$x_\ell = \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i x_i.$$

Platí:

$$Ax_\ell = A \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i A x_i = \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i \lambda_i x_i.$$

Současně také

$$Ax_\ell = \lambda_\ell x_\ell = \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i \lambda_\ell x_i.$$

Dostáváme tedy

$$\theta = \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_\ell) x_i.$$

Protože $x_\ell \neq \theta$, musí $\exists j \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ tak, že $\alpha_j \neq 0$ a navíc podle předpokladu je $\lambda_\ell \neq \lambda_i$ pro $\forall i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$. Našli jsme tedy netriviální lineární kombinaci LN souboru $(x_1, \dots, x_{\ell-1})$ rovnající se nulovému vektoru, což je spor. $\square$

Charakteristický polynom

Pozorování: Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Označme

$$p_A(\lambda) := \det {}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E).$$

Potom p_A je polynom stupně n a nezávisí na volbě báze $\mathcal{X}$.

Důkaz. Označme $({}^{\mathcal{X}}A)_{ij} = a_{ij}$. Protože ${}^{\mathcal{X}}E = \mathbb{E}$ máme

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Potom z definice determinantu vyplývá, že $p_A(\lambda)$ je polynom v proměnné λ stupně n, neboť koeficient u λ^n je $(-1)^n$ (a vyšší mocnina λ se ve výrazu vyskytovat nemůže).

Buď $\mathcal{Y}$ nějaká další báze V_n, potom víme, že

$$^{\mathcal{X}}(A-\lambda E) = {}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}}^{-1} \cdot {}^{\mathcal{Y}}(A-\lambda E) \cdot {}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}}.$$

Aplikujeme-li determinant na obě strany rovnosti dostaneme

$$\det {}^{\mathcal{X}}(A-\lambda E) = \det {}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}}^{-1} \cdot \det {}^{\mathcal{Y}}(A-\lambda E) \cdot \det {}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}},$$

a protože $\det {}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}}^{-1} = 1/\det {}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}}$ je

$$\det {}^{\mathcal{X}}(A-\lambda E) = \det {}^{\mathcal{Y}}(A-\lambda E).$$

Tedy definice polynomu p_A nezávisí na volbě báze V_n. □

Definice 6. *Polynom p_A z předchozího pozorování nazýváme charakteristickým polynomem operátoru A.*

Věta 7. *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom $\sigma(A) \neq \emptyset$ a platí*

$$\sigma(A) = p_A^{-1}(\{0\}) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} \mid p_A(\lambda) = 0\}.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme rovnost mezi $\sigma(A)$ a $p_A^{-1}(\{0\})$:

1. $\subseteq$: Nechť $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Potom $(\exists x \in V_n)(x \neq \theta)(Ax = \lambda_0 x)$. Tedy $Ax - \lambda_0 x = \theta$, nebo-li $(A-\lambda_0 E)x = \theta \Rightarrow x \in \ker(A-\lambda_0 E) \Rightarrow (A-\lambda_0 E)$ není prosté $\Rightarrow (A-\lambda_0 E)$ není bijekce $\Rightarrow {}^{\mathcal{X}}(A-\lambda_0 E)$ není regulární $\Rightarrow p_A(\lambda_0) = \det {}^{\mathcal{X}}(A-\lambda_0 E) = 0$.

2. $\supseteq$: Nechť $\lambda_0 \in p_A^{-1}(\{0\}) \Rightarrow \det {}^{\mathcal{X}}(A-\lambda_0 E) = 0 \Rightarrow {}^{\mathcal{X}}(A-\lambda_0 E)$ není regulární $\Rightarrow (A-\lambda_0 E)$ není bijekce $\Rightarrow (A-\lambda_0 E)$ není prosté. Proto existuje $\theta \neq \ker(A-\lambda_0 E)$, nebo-li $Ax = \lambda_0 x \Rightarrow \lambda_0 \in \sigma(A)$.

Neprázdnost množiny $\sigma(A)$ nyní vyplývá ze základní věty algebry, protože stupeň polynomu p_A je $n \geq 1$. □

Důsledek 8. *Spektrum operátoru $A \in \mathcal{L}(V_n)$ je rovno spektru matice zobrazení A v libovolné bázi $\mathcal{X}$ prostoru V_n, tj. $\sigma(A) = \sigma({}^{\mathcal{X}}A)$.*

- Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(nebo operátoru, kde $\mathbb{A}$ je jeho matice vzhledem k nějaké bázi).

- Spočítáme charateristický polynom:

$$p_A(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2.$$

- Kořeny p_A jsou $\lambda_1 = 2$ (jednoduchý) a $\lambda_2 = 3$ (dvojnásobný).
- Dostáváme tedy

$$\sigma(\mathbb{A}) = \{2, 3\}.$$

Příklad 2/2

- Vlastní vektory $\mathbb{A}$ k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ jsou všechna nenulová řešení soustavy $(\mathbb{A} - 2\mathbb{E})x = \theta$. Po výpočtu dostaneme množinu řešení jako $\langle(-2, 1, 4)\rangle$, což je vlastní podprostor $\mathbb{A}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$. Příslušný vlastní vektor je libovolné $\theta \neq x_1 \in \langle(-2, 1, 4)\rangle$.
- Podobně pro nalezení vlastních vektorů $\mathbb{A}$ k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ řešíme homogenní soustavu s maticí $\mathbb{A}-3\mathbb{E}$ a vyjde nám $\langle(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$. Vlastní podprostor A příslušející vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ má tedy dimenzi 2 a vlastní vektor je libovolné $\theta \neq x_2 \in \langle(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$.
- Ověřte, že pro vlastní vektory skutečně platí:

$$\mathbb{A}x_1 = 2x_1 \quad \text{a} \quad \mathbb{A}x_2 = 3x_2.$$

Ještě jeden příklad

- Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

- Postupujeme stejně jako v předchozím příkladě a dostáváme

$$p_B(\lambda) = \det(\mathbb{B} - \lambda\mathbb{E}) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2.$$

- Proto $\sigma(\mathbb{B}) = \{2, 3\}$, ale vlastní podprostory nám nyní vyjdou:

$$\lambda_1 = 2: \quad \ker(\mathbb{B} - 2\mathbb{E}) = \langle(0, 3, 4)\rangle,$$

$$\lambda_2 = 3: \quad \ker(\mathbb{B} - 3\mathbb{E}) = \langle(1, 1, 1)\rangle.$$

- Tedy matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ mají stejná spektra a charakteristické polynomy, ale různé vlastní podprostory.

Dvě různé násobnosti vlastních čísel

Definice 9. *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Násobnost čísla λ_0 jako kořene charakteristického polynomu p_A operátoru A nazýváme algebaickou násobností vlastního čísla λ_0 a značíme ji $\nu_a(\lambda_0)$.*

Číslo $d(A - \lambda_0 E)$ nazýváme geometrickou násobností vlastního čísla λ_0 a značíme ji $\nu_g(\lambda_0)$.

Poznámka 10. *Číslo $\nu_g(\lambda_0)$ je tedy počet LN vlastních vektorů k vlastnímu číslu λ_0.*

Věta 11. *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Potom*

$$\nu_g(\lambda_0) \leq \nu_a(\lambda_0).$$

Důkaz. Označme $\nu_g(\lambda_0) = k$. Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je báze vlastního podprostoru $\ker(A - \lambda_0 E)$. Doplňme soubor $(x_1, \ldots, x_k)$ na bázi V_n, tedy $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ je báze V_n. Potom platí

$$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & a_{k,k+1} & \ldots & a_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

a proto

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) = \det {}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E) &= \det({}^{\mathcal{X}}A - \lambda \mathbb{E}) \\
&= \begin{vmatrix}
\lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\
0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} - \lambda
\end{vmatrix} \\
&= (\lambda_0 - \lambda)^k \cdot q(\lambda),
\end{aligned}
$$

kde q je polynom. Dostali jsme tedy

$$p_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k \cdot q(\lambda),$$

z čehož vyplývá, že λ_0 je alespoň k-násobný kořen p_A. Proto $\nu_g(\lambda_0) = k \leq \nu_a(\lambda_0)$.

$\square$

14.2 Diagonalizace operátoru

Podobné matice

Idea: Chtěli bychom říct, že dvě matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ jsou podobné, jsou-li to matice *téhož operátoru* A na nějakém LP v různých bázích.

Definice 12. *Matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazveme podobné, právě když existuje $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$ regulární tak, že platí*

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P}.$$

*Značíme $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$. (**Cvičení:** Ověřte, že $\sim$ je relace ekvivalence na prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$.)*

Věta 13. *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$ právě tehdy, když existuje operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a dvě báze $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ takové, že*

$${}^{\mathcal{X}}A = \mathbb{A} \quad \text{a} \quad {}^{\mathcal{Y}}A = \mathbb{B}.$$

Důkaz.

1. $(\Rightarrow)$: Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$. Položme $V_n := \mathbb{C}^n$ a definujme $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ takové, že

$$(\forall i \in \hat{n})(Ae_i := \mathbb{A}_{\bullet,i}),$$

kde opět e_i, $i \in \hat{n}$, značí vektory standardní báze $\mathbb{C}^n$. Potom ${}^{\mathcal{E}_n}A = \mathbb{A}$, tedy v tvrzení věty je $\mathcal{X} := \mathcal{E}_n$.

Definujme bázi $\mathcal{Y}$ jako soubor sloupců matice $\mathbb{P}^{-1}$ z relace podobnosti: $\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P}$. Potom $\mathbb{P}^{-1} = {}_{\mathcal{X}}P_{\mathcal{Y}}$ a platí

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^{-1} = {}_{\mathcal{X}}P_{\mathcal{Y}}^{-1} \cdot {}^{\mathcal{X}}A \cdot {}_{\mathcal{X}}P_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{Y}}A.$$

2. $(\Leftarrow)$: Nechť naopak existuje operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a dvě báze $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ prostoru V_n takové, že ${}^{\mathcal{X}}A = \mathbb{A}$ a ${}^{\mathcal{Y}}A = \mathbb{B}$. Potom stačí položit $\mathbb{P} := {}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}}$ a platí

$$\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}A = {}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}}^{-1} \cdot {}^{\mathcal{Y}}A \cdot {}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P},$$

tedy $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$.

□

Diagonalizace operátoru

Definice 14. *Operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ nazveme diagonalizovatelný, jestliže existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru V_n taková, že matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je diagonalní.*

Věta 15 (o diagonalizovatelnosti)**.** *Operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ je diagonalizovatelný právě když*

$$(\,\forall \lambda_0 \in \sigma(A)\,)(\,\nu_a(\lambda_0) = \nu_g(\lambda_0)\,).$$

Důkaz.

1. $(\Rightarrow)$: Nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n taková, že ${}^{\mathcal{X}}A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Potom

$$p_A(\lambda) = \det({}^{\mathcal{X}}A - \lambda\mathbb{E}) = \det\operatorname{diag}(\alpha_1 - \lambda, \ldots, \alpha_n - \lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - \lambda),$$

tedy $\sigma(A) = \{\alpha_i \mid i \in \hat{n}\}$.

Nechť $\nu_a(\lambda_0) = k$ pro nějaké $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Potom

$$(\exists i_1, \ldots i_k \in \hat{n})(\alpha_{i_1} = \cdots = \alpha_{i_k} = \lambda_0).$$

Pro geometrickou násobnost platí podle 2. věty o dimenzi

$$\nu_g(\lambda_0) = d(A - \lambda_0 E) = n - h(A - \lambda_0 E) = n - h({}^{\mathcal{X}}A - \lambda_0 \mathbb{E}).$$

Matice ${}^{\mathcal{X}}A - \lambda_0\mathbb{E}$ je diagonalní a právě na k místech na diagonále (s indexy $i_1, \dots i_k$) má nuly. Hodnost této matice je tedy $n-k$ a $\nu_g(\lambda_0) = k$.

2. $(\Leftarrow)$: Hledanou bázi $\mathcal{X}$, v níž je ${}^{\mathcal{X}}A$ diagonální, zkonstruujeme. Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ navzájem různá vlastní čísla operátoru A. Jejich algebaické násobnosti označme $l_1, \dots, l_k$, potom

$$\sum_{i=1}^{k} l_i = n.$$

Nechť $(x_1^{(i)}, \dots, x_{l_i}^{(i)})$ je LN soubor vlastních vektorů příslušející vlastnímu číslu λ_i, $i \in \hat{k}$. Jejich počet je skutečně l_i, neboť podle předpokladu $\dim(\ker(A - \lambda_i E)) \equiv \nu_g(\lambda_i) = \nu_a(\lambda_i) = l_i$. Sestavme ze všech vektorů $\{(x_1^{(i)}, \dots, x_{l_i}^{(i)}) \mid i \in \hat{k}\}$ soubor

$$\mathcal{X} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{l_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_{l_2}^{(2)}, \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_{l_k}^{(k)}).$$

Z konstrukce je zřejmé, že je-li soubor $\mathcal{X}$ báze V_n, je matice ${}^{\mathcal{X}}A$ diagonalní. Přesněji,

$${}^{\mathcal{X}}A = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{l_1-\text{krát}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{l_2-\text{krát}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{l_k-\text{krát}}).$$

Zbývá nám tedy dokázat, že $\mathcal{X}$ je báze V_n. Protože je $\mathcal{X}$ n-členný soubor, stačí ukázat, že $\mathcal{X}$ je LN. Nechť

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i^{(1)} x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{l_2} \alpha_i^{(2)} x_i^{(2)} + \dots + \sum_{i=1}^{l_k} \alpha_i^{(k)} x_i^{(k)} = \theta.$$

Všimněme si, že každá ze sum v předchozí rovnici představuje vlastní vektor příslušející jednomu vlastnímu číslu, nebo nulový vektor (neboť lineární kombinace vlastních vektorů příslušejících jednomu vlastnímu číslu je vlastní vektor příslušející tomuto číslu nebo nulový vektor). Předpokládejme, že alespoň jedna ze sum je nenulová. Pak ale rovnice představuje netriviální lineární kombinaci vlastních vektorů příslušejících různým vlastním číslům rovnající se nulovému vektoru. Soubor těchto vlastních vektorů je, jak už víme, LN, a tedy dostáváme spor. Proto

$$(\forall j \in \hat{k})\left(\sum_{i=1}^{l_j} \alpha_i^{(j)} x_i^{(j)} = \theta\right).$$

Protože je soubor $(x_1^{(i)}, \dots, x_{l_i}^{(i)})$ LN, všechny koeficienty lineární kombinace výš musejí být nulové. Celkem tedy máme

$$(\forall j \in \hat{k})(\forall i \in \hat{l_j})(\alpha_i^{(j)} = 0),$$

a proto je $\mathcal{X}$ LN.

□

Důsledek 16. *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a $(\forall \lambda_0 \in \sigma(A))(\nu_a(\lambda_0) = 1)$, potom je A diagonalizovatelný.*

Důkaz. Protože pro všechny $\lambda_0 \in \sigma(A)$ platí

$$1 \leq \nu_g(\lambda_0) \leq \nu_a(\lambda_0) = 1,$$

je $\nu_g(\lambda_0) = \nu_a(\lambda_0)$ a tvrzení plyne z věty o diagonalizovatelnosti. □

Poznámka 17. *Geometricky znamená rovnost ${}^{\mathcal{X}}A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, že A působí jako operátor změny měřítka ve směrech, které udávají vlastní vektory $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$. (Škálovací koeficient ve směru x_i by byl vlastní číslo λ_i.)*

Příklad – diagonalizovatelnost matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$

Poznámka 18. *Matice $\mathbb{A}$ chápaná jako operátor A na $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}_n}A$, je podle předchozí definice diagonalizovatelná právě když je podobná diagonální matici. Matice $\mathbb{P}$ z relace podobnosti je rovna ${}_{\mathcal{E}_n}P_{\mathcal{X}}$, kde $\mathcal{X}$ je báze diagonalizující A.*

Jak jsme viděli v důkazu Věty o diagonalizovatelnosti matice $\mathbb{P}$ má ve sloupcích souřadnice vlastních vektorů a diagonální matice $\mathbb{D} \equiv {}^{\mathcal{X}}A$ má na digonále vlastní čísla $\mathbb{A}$ (v příslušném pořadí). Potom skutečně platí

$$\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathbb{P}\mathbb{D}, \qquad \textit{nebo-li} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}.$$

Příklad: Uvažujme matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ z příkladů uvedených na začátku kapitoly.

- V případě matice $\mathbb{A}$ nám vyšlo $\nu_a(2) = \nu_g(2) = 1$ a $\nu_a(3) = \nu_g(3) = 2$. Proto je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.

- V případě matice $\mathbb{B}$ nám vyšlo $\nu_a(2) = \nu_g(2) = 1$, ale $\nu_a(3) = 2 \neq 1 = \nu_g(3)$. Proto $\mathbb{B}$ diagonalizovatelná není.
- Z toho plyne, že $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ nejsou podobné matice ($\sim$ je tranzitivní), ačkoliv měli stejný charateristický polynom a spektrum.

Příklad – pokračování

- Jak vypadá diagonální matice $\mathbb{D}$ a regulární matice $\mathbb{P}$ z relace podobnosti pro diagonalizovatelnou matici $\mathbb{A}$? Do sloupců matice $\mathbb{P}$ stačí napsat vlastní vektory $\mathbb{A}$ a na diagonálu matice $\mathbb{D}$ vlastní čísla. V našem případě

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Potom platí

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}.$$

  (Ověřte!)

- Kdybychom chtěli udělat podobnou konstrukci matice $\mathbb{P}$ pro matici $\mathbb{B}$, zjistíme, že “nemáme dost vlastních vektorů”. Tj. vlastní vektory netvoří bázi $\mathbb{C}^n$.

Cvičení

Cvičení: Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

1. Vysvětlete, proč je $\det(\mathbb{A})$ roven součinu vlastních čísel matice $\mathbb{A}$.
2. Vysvětlete, proč je $\det(\mathbb{A})$ roven absolutnímu členu charakteristického polynomu p_A matice $\mathbb{A}$.
3. Buď $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná a nechť

$$p_A(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda^i.$$

   Vysvětlete, proč platí

$$p_A(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{A}^i = \Theta.$$

   (Matice je kořenem svého charakteristického polynomu.)

Poznámka 19. *Tvrzení 3. platí i bez předpokladu diagonalizovatelnosti matice* $\mathbb{A}$.

14.3 Funkce diagonalizovatelné matice

Funkce matice

- Je-li matice $\mathbb{A}$ podobná diagonální matici $\mathbb{D}$,

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{D}\mathbb{P}$$

  můžeme definovat funkci matice (zatím umíme jenom polynomiální funkci matice).

- Skutečně, je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, a $\mathbb{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Definujeme nejprve funkci diagonální matice

$$f(\mathbb{D}) := \mathrm{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)).$$

- Pro definici $f(\mathbb{A})$ využijeme vztahu $\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{D}\mathbb{P}$ a klademe

$$f(\mathbb{A}) := \mathbb{P}^{-1} f(\mathbb{D})\mathbb{P}.$$

- Nyní (teoreticky) umíme počítat $\sin(\mathbb{A})$, $\cos(\mathbb{A})$, $\exp(\mathbb{A})$, ...

Maticová exponenciála – motivace

- Nyní již víte, že řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = ay, \quad y(0) = c$$

  je funkce $y(t) = ce^{at}$.

- Podobně to funguje i v obecnějčím případě soustavy obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\mathbb{y}' = \mathbb{A} \cdot \mathbb{y}, \quad \mathbb{y}(0) = \mathbb{c},$$

  kde $\mathbb{y}' = (y_1', \dots, y_n')^T$ je sloupcový vektor derivací neznámých funkcí. Řešením je funkce

$$\mathbb{y}(t) = \exp(t\mathbb{A}) \cdot \mathbb{c},$$

  kde $\exp(t\mathbb{A})$ je matice, kterou umíme spočítat, je-li $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.

Maticová exponenciála – příklad 1/2

- Vyřešíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$x' = 2x + y$$
$$y' = x + 2y$$

s počáteční podmínkou $x(0) = 1$ a $y(0) = 2$.

- Soustavu můžeme přepat do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathbb{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Spočítáme $\sigma(\mathbb{A}) = \{1, 3\}$, vlastní vektror k 3 je $(1, 1)$ a vlastní vektor k 1 je $(-1, 1)$. Potom dopočítáme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticová exponenciála – příklad 2/2

- Z posledního vztahu dostáváme předpis pro exponenciálu matice $t\mathbb{A}$:

$$\exp(t\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Hledané řešení je potom

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(t\mathbb{A}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{3t} - e^{t} \\ 3e^{3t} + e^{t} \end{pmatrix},$$

nebo-li dostáváme

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t},$$
$$y(t) = \frac{3}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t}.$$

- Dosazením ověřte, že jsme skutečně nalezli řešení zadané soustavy.