METODA SNIŽOVÁNÍ ŘÁDU DERIVACE

Převod d.r. (diferenciální rovnice) na soustavu d.r. 1.řádu budeme formalizovat pro 2 (z cca 5-ti) užívané způsoby.

a) d.r. bez derivací vstupů

buď d.r. tvaru (y(t), u(t))

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, y^{(i)} = b_0\, u$$

Definujeme stavové proměnné:

$$\dot{x}_i = x_{i+1} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_n = y^{(n)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, y^{(i)} + b_0\, u$$

Tedy:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
\dot{x}_i &= x_{i+1} \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
\dot{x}_n &= -a_0\, x_1 \;\; -a_1\, x_2 \;\; -a_2\, x_3 \;\; - \ldots - \;\; a_{n-1}\, x_n \;\; +b_0\, u
\end{aligned}$$

$y = x_1$ což výhodně zapíšeme maticově :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & . & . & . & . & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_i \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_0\, u \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{čili : } \dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} + \vec{b}$$

Počáteční podmínky jsou přímo rovny počátečním podmínkám původní rovnice:

$$y(0) = y_0 = x_1(0)$$
$$\dot{y}(0) = \dot{y}_0 = x_2(0)$$
$$\ldots$$
$$y^{(n-1)} = y_0{}^{(n-1)} = x_n(0)$$

Jsou-li na pravé straně derivace vstupů, užijeme princip superpozice.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_j\, n^{(j)}$$

$$m \le n$$

$$\text{definujeme x předpisem} \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^{(i)} = n$$

$$a_0\, x + a_1\, \dot{x} + \ldots + a_n\, x^{(n)} = n \;\Big|\; \frac{d}{dt}$$
$$a_0\, \dot{x} + a_1\, \ddot{x} + \ldots + a_n\, x^{(n+1)} = \dot{n}$$

Vidíme, že je-li x odezvou na u, je $\dot{x}$ odezva na $\dot{u}$ (spodní rovnice, chápeme – li ji jako rovnici pro $\dot{x}$ je shodná s původní rovnicí)

$$\text{tedy}: \; u \to x = x_1$$
$$\dot{u} \to \dot{x} = x_2$$
$$\ldots$$
$$u^{(n)} \to x^{(m)} = x_{m+1}$$

Platí princip superpozice:
je-li:

$$b_0{}^{-1} \sum_{i=0}^{n} y_0{}^{(\dot{n})}\, a_i = n$$

$$b_1{}^{-1} \sum_{i=0}^{n} y_1{}^{(\dot{n})}\, a_i = \dot{n}$$

$$b_m{}^{-1} \sum_{i=0}^{n} y_m{}^{(\dot{n})}\, a_i = n^{(m)}$$

,pak

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{m} y_j\right)^{(i)} = \sum_{b=0}^{m} b_k\, n^{(k)}$$

ale $y_j = b_j\, x_{j+1}$ a

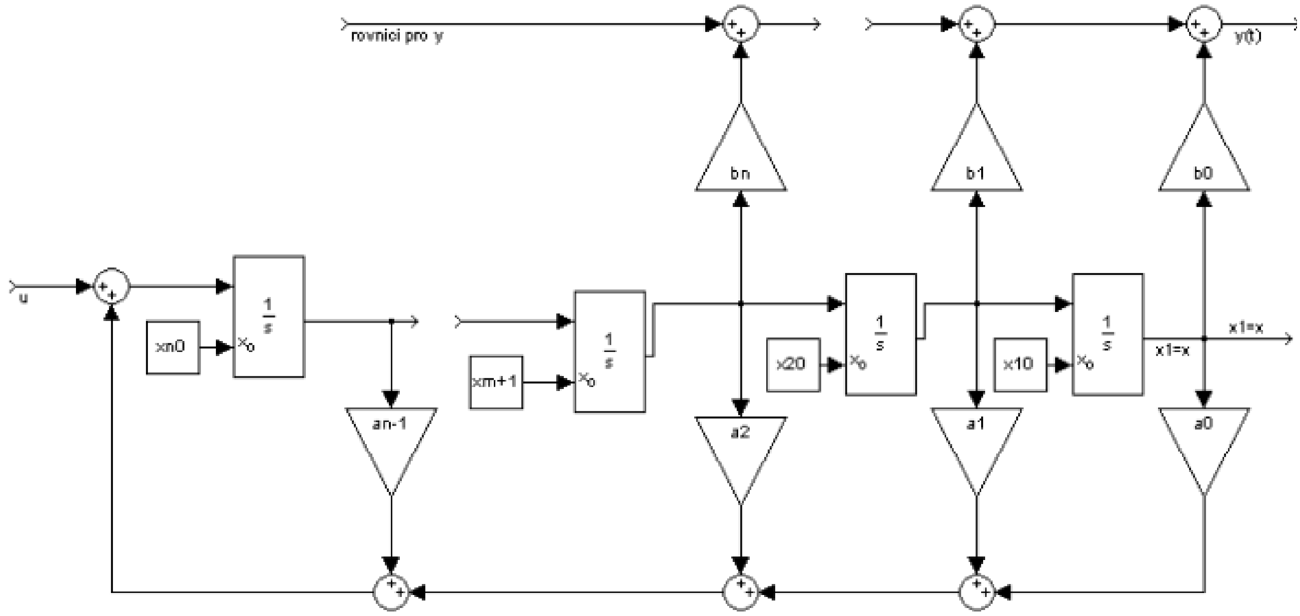
$$y = \sum_{i=0}^{m} y_j = b_0\, x_1 + b_1\, x_2 + \ldots + b_m\, x_{m+1}$$

tedy:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
.
.
$$\dot{x}_i = x_{i+1}$$
.
.
$$\dot{x}_n = -a_0\, x_1 - a_1\, x_2 - a_2\, x_3 - \ldots - a_{n-1}\, x_n + u$$

a přibude

$$y = b_0\, x_1 + b_1\, x_2 + \ldots + b_m\, x_{m+1}$$



Počáteční podmínky

$$y = b_0\, x_1 + b_1\, x_2 + \ldots + b_m\, x_{m+1}$$

$$y_0 = b_0\, x_{10} + b_1\, x_{20} + \ldots + b_m\, x_{(m+1)}$$

dáno y_0 **a hledáme** $x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{(m+1)}$

$$\dot{y} = b_0\, \dot{x}_1 + b_1\, \dot{x}_2 + \ldots + b_m\, \dot{x}_{m+1} = (\text{ale } \dot{x}_i = x_{i+1})$$

v nule:

$$\dot{y}_0 = b_0\, x_{20} + b_1\, x_{30} + \ldots + b_m\, x_{m+2|0}$$
$$\ddot{y}_0 = b_0\, x_{30} + b_1\, x_{40} + \ldots + b_m\, x_{m+3|0}$$

Postup opakujeme n-m krát → n-m lineárních rovnic alg. rovnic.
V poslední rovnici , kterou dosadíme z poslední stavové rovnice, dalším derivováním získáte dalších m rovnic → celkem máme n rovnic pro u počátečních podmínek stavových proměnných.