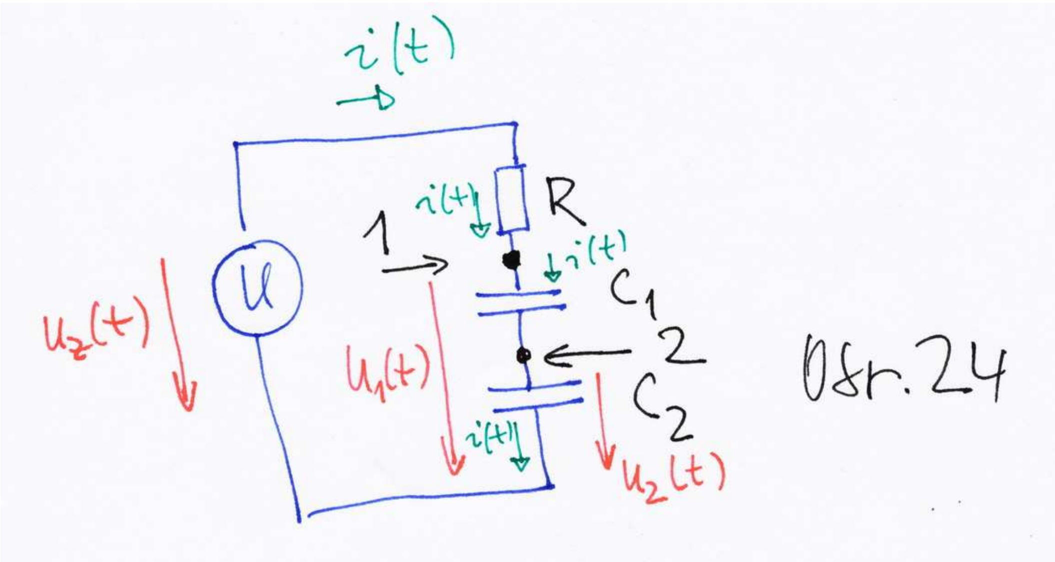
Na pár místech jsme zmínili cosi ve smyslu, že každé schéma nemusí mít řešení a vidět to bylo v případě paralelního řazení zdrojů nestejných napětí a sériového řazení nestejných zdrojů proudu, kde jsme okamžitě obdrželi False, čili pokud se takové kombinace v obvodu vyskytne, obvod je nesmyslný, neužitečný a nerealizovatelný. Ukažme si ještě jeden nesmysl a poukažme na jeden omyl v případě napětí a sériového řazení kondenzátorů. Jasně, úplně duální problém by nastal v případě proudů a paralelního řazení cívek. Ideální rezistor je součástka, která žije vždy jen současností, popis jejího chování neobsahuje derivace, nemá požadavek na spojité změny ani proudu, ani napětí: kolize současnosti s minulostí nemůže nastat a tak problém, na který poukážeme, se ideálních rezistorů i netýká. Reálných ano, ty vykazují kapacitu i indukčnost, ostatně reálné cívky a kondenzátory vykazují vždy i odpor a „tu druhou" vlastnost: ukázaný problém bude tedy ve skutečnosti teoretický, v přírodě nastat nemůže.

Uvažme zapojení podle Obr. 24



V notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` je v poslední buňce tento obvod vyřešen. Vyzkoušíte-li si stav s nulovými počátečními podmínkami, uvidíte, že lze kapacitní nezatížený dělič používat stejně jako dělič odporový, obecně ovšem nikoli. Pro počáteční napětí kondenzátorů splňující podmínku, že jejich součet je v je roven napětí zdroje počátečním čase můžeme snižovat hodnotu odporu, pro podmínky toto nesplňující je velikost počátečního proudu se snižováním odporu stále větší a pro nulový odpor řešení bez zavedení (v přírodě se nevyskytujících) pulsů (v Mathematice pro analytická řešení například funkce DiracDelta) neexistuje.
Vyzkoušejte si změny hodnot počátečních podmínek a zmenšování odporu rezistoru k nule.

9 Další jednoduché případy – stejnosměrné obvody a harmonický ustálený stav

9.1 Stejnosměrné obvody

Pokud se v obvodu vyskytují zdroje proudu a napětí, které mají konstantní velikost (a samozřejmě nemění v čase orientaci) a v počátečním čase jsou hodnoty napětí na kapacitách a proudů tekoucích indukčnostmi obecné, budou se nejprve vlivem neshody velikosti proudů a napětí v obvodu měnit, s časem ovšem méně a méně. Odezní tzv. přechodný děj (transient phenomenon) a hodnoty se ustálí, čímž myslíme, že se mění tak málo, že je v rámci zvolené přesnosti již můžeme za konstantní považovat: přesně stanovená hranice, kdy končí přechodný děj, tedy neexistuje, záleží na naší volbě.
Abychom se podívali na ukázkový případ, nemusíme nic dalšího programovat, v notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` je v poslední buňce. Když si zkusíte kromě odporů a počátečních podmínek také měnit tmax, ustálení obvodu uvidíte.

Podívejme se na rovnice jednotlivých součástek za předpokladu konstantních hodnot všech proudů a napětí:

$$\begin{aligned} u_R(t) &== R \cdot i_R(t) \quad \rightarrow u_R == R \cdot i_R \\ i_c(t) &== C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \quad \rightarrow i_c == 0A \\ u_L(t) &== L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad \rightarrow u_L == 0V \end{aligned} \tag{33}$$

Odebráním argumentu ukazujeme, že místo konstantní funkce můžeme myslet konstantu.

Je-li na nějakém prvku (stále) nulové napětí, má stejnou rovnici jako kus vodiče nebo zdroj nulového napětí.

Teče-li nějakým prvkem (stále) nulový proud (jasně, žádný proud neteče), můžeme tento prvek z obvodu vypustit.

Stejnosměrné obvody samozřejmě můžeme řešit obecně se všemi součástkami, vyřešit diferenciální rovnice, přičemž si dáme pozor, abychom čas řešení zvolili dostatečně dlouhý, aby se průběhy ustálily a odečíst výsledné hodnoty na konci řešení.

Často se jeví jednoduší na základě vztahů (33) „kondenzátory rozpojit a cívky a zkratovat“, tedy kondenzátory zcela vyřadit ze schématu a cívky nahradit vodiči.

Rovnice popisující obvody však byly diferenciálními rovnicemi z důvodu, že vztahy mezi napětím a proudem obsahují v případě cívek a kondenzátorů derivace. Nejsou-li v obvodu cívky a kondenzátory, nejsou v jeho popisu derivace a vzniklé rovnice jsou algebraické.
Máme-li již rovnice napsané v odstranění derivací, provedeme to z rovnic snadno například takto: rovnice/._‘[t]:>0.

V Mathematice, v případech obvodů složených z námi dosud uvažovaných obvodových prvků jde o zjednodušení značné, navíc věty o řešitelnosti soustav lineárních rovnic jsou všeobecně známé a pokud řešení nalezneme, můžeme se i dosazením přesvědčit, jestli naše řešení původní rovnice splňuje.

V případech obvodů obsahujících tzv. nelineární prvky (jako jsou například diody, tranzistory, cívky a transformátorky s feromagnetickými magnetickými obvody a podobně) je často výhodnější řešit diferenciální rovnice s vyjádřitelnými derivacemi, než hledat ustálené stavy řešením soustav nelineárních algebraických rovnic.

9.2 Harmonický ustálený stav

Ukázky pro tuto část textu jsou v notebooku `CAORLCNDSolveaHUS.nb`
Pro vysvětlení použijeme stejné schéma, jako je na Obr. 15.
Pro lepší názornost jsme si vyjádřili derivace a eliminovali zbytečné algebraické rovnice.
Nejprve se podívejme na výsledné grafy, vidíme, že zpočátku není průběh napětí na kondenzátoru sinusový, po odeznění tzv. přechodného děje se ovšem stane sinusovým, se stejnou frekvencí, jako má zdroj napětí a obecnou amplitudou a fázovým posunem.
Počáteční přechodný děj je vyvolán počátečními hodnotami, v některých případech lze volit takové, že přechodný děj nenastává, případně alespoň není výrazný, což se někdy využívá k omezení zapínacích proudů v případě spínání velkých spotřebičů.

Harmonickým nazýváme stav proto, že všechny průběhu lze vyjádřit jako lineární kombinace funkcí sinus a kosinus, což jsou takzvané harmonické funkce; lineární kombinaci funkcí sinus a kosinus můžeme ovšem vyjádřit pomocí vhodně fázově posunuté harmonické funkce s vhodnou amplitudou.
Je-li frekvence uvažovaného průběhu $f\left(Hz\right)$, jednotkou frekvence je hertz (čti „herc“), perioda je $T=\frac{1}{f} \quad \left(s\right)$, říkáme veličině $\omega=2\cdot\pi\cdot f=2\cdot\pi\cdot\frac{1}{T} \quad \left(s^{-1}\right)$ kruhová frekvence.
Perioda funkcí sinus a kosinus je $2\cdot\pi$, takže funkce $\sin\left(\omega\cdot t\right)=\sin\left(2\cdot\pi\cdot f\cdot t\right)=\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{T}\right)$ má skutečně periodu T: pro $t=T$ má argument hodnotu $2\cdot\pi\cdot\frac{t=T}{T}=2\cdot\pi$.
Je-li například časový průběh napětí popsán vztahem $u\left(t\right)=U_M\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right),\ \ U_M\geq 0,\ \ \varphi\in(-\pi,\pi>.$, říkáme, že má amplitudu U_M a fázi (fázový posun) φ. Perioda, frekvence, kruhová frekvence, amplituda a fáze jsou reálná čísla, přičemž z podstaty vztahu mezi periodou a frekvencí a obvyklým chápáním harmonických funkcí přijmeme navíc pro účely ČAO omezení: $f>0Hz,\ f\neq\infty Hz,\ \Rightarrow T>0s,\ T\neq\infty s,\ \omega>0s^{-1},\ \omega\neq\infty s^{-1}$.

I když je nám to jasné, není špatné si pohrát s Manipulate v `CAORLCNDSolveaHUS.nb` a osvěžit si vliv amplitudy a fáze.
Souvislost fázově posunuté funkce sinus s vyjádřením pomocí sinu a kosinu s nulovým fázovým posunem plyne ze známého vzorečku:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow U_M\sin(\omega\cdot t+\varphi)=U_M\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\omega\cdot t)+U_M\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

Více o harmonických funkcích naleznete například zde.

Proč nás harmonické funkce tolik zajímají? Zatím řešíme lineární obvody a harmonické funkce mají výsadní postavení právě jen v případě lineárních obvodů.
Hlavní důvod je v tom, že derivace harmonické funkce o frekvenci ω je harmonická funkce o frekvenci ω, obecně může mít jinou amplitudu a fázový posuv, ale to jsou vlastně detaily: tvar jejího průběhu se nijak (zásadně) nezměnil.

Harmonické funkce nás také zajímají proto, že jsou „informačně úsporné“: podíváte-li se v `CAORLCNDSolveaHUS.nb` na FullForm[res], dostanete odpověď „výstup je příliš rozsáhlý“.
Numerickou metodou bylo získáno poměrně hodně bodů, tolik, aby nám dobře popsaly řešené průběhy.
Pokud víme, nebo věříme, že výsledkem je harmonická funkce o zadané frekvenci ω, stačí nám k jejímu úplnému určení dvě čísla: amplituda U_M a fáze φ.
Podobně hledání harmonických funkcí, které jsou řešením obvodu, bude jednodušší, než hledání obecných průběhů, například namísto NDSolve budeme používat Solve.

V notebooku `CAORLCNDSolveaHUS.nb` je ukázka nalezení řešení „hrubou silou“ (a bez znalosti dalšího teoretického aparátu), kdy do obvodových rovnic dosadíme za hledaný proud a napětí harmonické funkce s neznámou amplitudou a fází. Každou rovnici nahradíme druhou mocninou rozdílu pravé a levé strany: druhá mocnina má v oboru reálných čísel minimum v nule, když tedy výsledné kvadráty rozdílů příslušných pravých a levých stran sečteme a vyčíslíme pro větší množství hodnot nezávislých časů a najdeme minimum blízké nule, jsme dostatečně blízko cíle. Berte tento postup jako ukázku, že problémy lze často řešit více způsoby a koneckonců záleží na výsledku. Pokud vám někdo říká, že jen jedna cesta k řešení je správná, velmi pravděpodobně v případě elektrických obvodů nemá pravdu.

Řešení „hrubou silou“ ovšem vyžaduje dostatečně mocný nástroj a pro složitější obvody také výrazně delší výpočetní čas. Naučíme se tedy obvyklým metodám řešení HUS, využívajících vlastností komplexních čísel a řešení soustav lineárních rovnic. Znalost základních pravidel počítání s komplexními čísly předpokládáme, imaginární jednotku budeme pro lepší odlišení od označení proudů značit — na rozdíl od matematiků — j a platí $j^2 == -1$.
Je-li $z = a + j\cdot b,\quad a,b\in R$, kde R je označení množiny reálných čísel, pak *imaginární část* komplexního čísla z je $\mathrm{Im}(z)=b$ a *reálná část* komplexního čísla z je $\mathrm{Re}(z)=a$. Pro *absolutní hodnotu* (též zvanou modul, velikost) platí $\mathrm{Abs}(z)=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.
Množinu komplexních čísel budeme značit *C*.

Pro komplexní čísla platí slavný Eulerův vztah, který si zaslouží očíslovat:
$$\forall\psi\in\mathbf{R}:\quad e^{j\cdot\psi}==\cos(\psi)+j\cdot\sin(\psi)\tag{34}$$

Poznamenejme, že tento vztah platí pouze pro ψ „brané v radiánech“. Ostatně na počítání „ve stupních“ je dobré na vysoké škole zapomenout. V dalším textu všechny veličiny, které mohou mít v nějakém smyslu význam úhlu, budou mít jednotku radián.
Ze vztahu (34) vidíme, že platí

$$\sin(\psi) == \operatorname{Im}\left(e^{j\cdot\psi}\right) \tag{35}$$

Pro funkci „imaginární část“, tedy zobrazení z **C** do **R**, ovšem platí:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \geq 0\ \forall z \in \mathbf{C}: \quad \operatorname{Im}(\alpha \cdot z) == \alpha \cdot \operatorname{Im}(z) \tag{36}$$

A tedy položíme-li $\psi -> \omega \cdot t + \varphi, \quad \alpha -> U_M$, obdržíme vyjádření obecného harmonického průběhu:

$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) == \operatorname{Im}\left(U_M \cdot e^{j\cdot(\omega t+\varphi)}\right) \tag{37}$$

Podle vět o počítání s mocninami ale platí $e^{j\cdot(\omega t+\varphi)} == e^{j\cdot\omega t} \cdot e^{j\cdot\varphi}$ a můžeme tedy přepsat rovnost (37) jako:

$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) == \operatorname{Im}\left(U_M \cdot e^{j\cdot\varphi} \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) == \operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right) \tag{38}$$

Přijali jsme přitom označení

$$\hat{U}_M = U_M \cdot e^{j\cdot\varphi} \tag{39}$$

Veličině $\hat{U}_M$ budeme říkat „fázor v měřítku maximálních hodnot“: jelikož jsme se omezili na $U_M \geq 0$, může funkce $u(t)$ podle (37) nabývat hodnot jen $u(t) \in \langle -U_M, U_M \rangle$, U_M je tedy maximální hodnotou funkce $u(t)$.

Proč „fázor“? Omezíme-li se na hodnoty $U_M \geq 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi >$, obsahuje komplexní číslo $\hat{U}_M = U_M \cdot e^{j\cdot\varphi}$ jednoznačnou informaci nejen o maximální hodnotě U_M, ale i o fázi φ.

Omezení $U_M \geq 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi >$ volíme z pohodlnosti, neboť získáváme jednoznačný vztah mezi fázorem (tedy komplexním číslem) a analytickým vyjádřením průběhu podle $u(t)$ podle (37). Jelikož ve fyzikálně zjistitelných důsledcích chování elektrického obvodu nejde o formální vyjádření časových průběhů proudů a napětí, ale o tyto průběhy, jsou vlastně požadavky $U_M \geq 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi >$ nadbytečné: změna $\varphi \to \varphi + 2 \cdot k \cdot \pi$, k celé číslo, průběh nezmění a změnu $U_M -> -U_M$ lze kompenzovat změnou $\varphi \to \varphi + (2 \cdot k + 1) \cdot \pi$, k celé číslo. V dalším se uvedeného omezení ovšem budeme držet.

Z časového průběhu tedy získáme fázor snadno podle (39), vypočteme prostě $\hat{U}_M = U_M \cdot e^{j\cdot\varphi}$.
Z fázoru získáme časový průběh opět snadno, vypočteme podle (38) $u(t) = \operatorname{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega t}\right)$, což je pro zadané ω a $\hat{U}_M$ reálná funkce reálné proměnné a v Matematice stačí o výpočet prostě požádat s tím, že imaginární část je funkce a tudíž musíme použít hranaté závorky.
Fázi získáme funkcí Arg a amplitudu funkcí Abs, tedy $\varphi = \operatorname{Arg}\left[\hat{U}_M\right], \quad U_M = \operatorname{Abs}\left[\hat{U}_M\right]$.
Druhý vztah plyne přímo z faktu, že $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}: \operatorname{Abs}(z_1 \cdot z_2) == \operatorname{Abs}(z_1) \cdot \operatorname{Abs}(z_2)$ a $\forall \psi \in \mathbf{R}: \quad \operatorname{Abs}\left(e^{j\cdot\psi}\right) == \sqrt{\cos(\psi)^2 + \sin(\psi)^2} == 1$.
Některé vlastnosti funkce Arg jsou ukázány v `CAORLCNDSolveaHUS.nb`.

Musíme-li realizovat výpočet v nějakém prostředí, ve kterém nejsou v dostatečné míře implementovány operace s komplexními čísly, použijeme v (38) vztah (35) a násobení komplexních čísel si naprogramujeme.

Proč to všechno děláme? Všechny proudy a napětí v případě HUS budou vyjádřeny jako $v_i(t)=\operatorname{Im}\left(\hat{V}_i\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$. Uvidíme, že lze převést vztahy dané popisem obvodu diferenciálními rovnicemi na vztahy mezi hodnotami odporů rezistorů, kapacit kondenzátorů, indukčností cívek, fázorů $\hat{V}_i$, $i=1,2,..,n$ a výrazu $j\cdot\omega$. Tyto veličiny neobsahují čas a příslušné rovnice tedy nemohou být diferenciální, budou lineární a algebraické a tedy snadno řešitelné, při správně popsaném realizovatelném obvodu dokonce řešitelné *vždy* a *jednoznačně*. Zpět do světa časových průběhů se pak dostaneme snadno podle $v_i(t)=\operatorname{Im}\left(\hat{V}_i\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$.

Upozorněme, že dále následující odvozování a dokazování není pro řešení obvodů potřebné a nebudeme jej při praktickém řešení používat, je uvedeno pro porozumění a úplnost a abychom odlišili vzdělání vysokoškolské od školy střední.

Poznamenejme ještě, že v odvozování jsme nikde nepoužili chápání $u(t)$ jako napětí: i nadále budeme při odvozování používat označení $u_1(t)$, $u_2(t)$, jako by šlo o napětí, výsledné vztahy ovšem platí BUNO pro proudy a ostatně pro všechny harmonicky proměnné veličiny.

Dokážeme, že platí následující věta:

Buďtež $u_1(t)$, $u_2(t)$ harmonické funkce definované vztahy

$u_1(t)=U_{M1}\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_1)$, $u_2(t)=U_{M2}\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_2)$.

Pak platí: $u_1(t)==u_2(t)\ \ \forall t\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\hat{U}_{M1}==\hat{U}_{M2}$.

Důkaz:

Přepíšeme vztahy podle příslušných definic a obdržíme:

a) Dokážeme, že $\hat{U}_{M1}==\hat{U}_{M2}\ \Rightarrow\ u_1(t)==u_2(t)\ \ \forall t\in\mathbf{R}$; důkaz je triviální,

$$\hat{U}_{M1}==\hat{U}_{M2},\ \hat{U}_{M1}\overset{!}{=}\hat{U}_M,\hat{U}_{M1}\overset{!}{=}\hat{U}_M\ \Rightarrow\ u_1(t)=\operatorname{Im}\left(\hat{U}_M\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)==u_2(t)=\operatorname{Im}\left(\hat{U}_M\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)\quad\forall t\in\mathbf{R}$$

b) Dokážeme, že $u_1(t)==u_2(t)\ \ \forall t\in R\Rightarrow\hat{U}_{M1}==\hat{U}_{M2}$

Zde bychom mohli použít omezení možných hodnot φ_2 a φ_2, jelikož ovšem stran měřitelných důsledků záleží na rovnosti průběhů $u_1(t)$ a $u_2(t)$ a nikoli na shodě jejich analytických vyjádření, nebylo by to nesprávné, ale trochu metodicky nefér. Přepišme předpoklad tvrzení b) podle definice:

$$\operatorname{Im}\left(U_{M1}\cdot e^{j\cdot(\omega t+\varphi_1)}\right)==\operatorname{Im}\left(U_{M1}\cdot e^{j\cdot\varphi_1}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)==\operatorname{Im}\left((a_1+j\cdot b_1)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)==$$

$$==\operatorname{Im}\left(U_{M2}\cdot e^{j\cdot(\omega t+\varphi_2)}\right)==\operatorname{Im}\left(U_{M2}\cdot e^{j\cdot\varphi_2}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)==\operatorname{Im}\left((a_2+j\cdot b_2)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$$

$\forall t\in\mathbf{R}$.

Tedy ovšem platí:

$\mathrm{Im}\left(\left(a_1 + j \cdot b_1\right) \cdot e^{j \cdot \omega t}\right) == \mathrm{Im}\left(\left(a_2 + j \cdot b_2\right) \cdot e^{j \cdot \omega t}\right) \quad \forall t \in R$, kde ovšem všude $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$.

Ovšem pro $\omega > 0s^{-1}$, $\omega \neq \infty s^{-1}$ $\exists t_1 \in \mathbf{R}$: $e^{j \cdot \omega t_1} == 1$; pak ovšem platí $\mathrm{Im}\left(\left(a_1 + j \cdot b_1\right) \cdot 1\right) == \mathrm{Im}\left(\left(a_2 + j \cdot b_2\right) \cdot 1\right) \Rightarrow b_1 == b_2$.

Ovšem rovněž pro $\omega > 0s^{-1}$, $\omega \neq \infty s^{-1}$ $\exists t_1 \in \mathbf{R}$: $e^{j \cdot \omega t_2} == j$; pak ovšem platí $\mathrm{Im}\left(\left(a_1 + j \cdot b_1\right) \cdot j\right) == \mathrm{Im}\left(\left(a_2 + j \cdot b_2\right) \cdot j\right) \Rightarrow a_1 == a_2$.
Označíme-li ovšem $a = a_1 == a_2$ a $b = b_1 == b_2$, obdržíme po dosazení pravdivý výrok $\mathrm{Im}\left(\left(a + j \cdot b\right) \cdot e^{j \cdot \omega t}\right) == \mathrm{Im}\left(\left(a + j \cdot b\right) \cdot e^{j \cdot \omega t}\right) \quad \forall t \in \mathbf{R}$.
Dvě harmonické funkce se tedy rovnají $\forall t \in \mathbf{R}$ právě tehdy, když se rovnají jim odpovídající fázory.
Nyní už bude snadné odvodit jednoduchá pravidla pro použití fázorů pro řešení elektrických obvodů pomocí fázorů. Postupy a předpoklady použité v důkazu jsou ovšem limitujícími faktory použití fázorů. Ve skutečnosti můžeme „s rozumnou mírou nepřesnosti“ použít fázory i v jiných případech (například je-li změna parametrů použitých součástek podstatně pomalejší, než perioda harmonických funkcí); pak ovšem jen s patřičnou dávkou opatrnosti: mimo linearitu jistota obvykle mizí.

9.2.1 Vztahy mezi fázory proudu a napětí pro rezistory, cívky a kapacitory

a) Rezistor
Pro napětí a proud na rezistoru (pro dříve zavedené orientace proudu a napětí, tedy napěťová šipka má stejný směr jako šipka proudová) platí Ohmův zákon, tedy je-li odpor rezistoru *R*, pak platí $u(t) == R \cdot i(t)$. Předpokládejme, že napětí a proud jsou harmonické funkce času a můžeme tedy psát: $u(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j \cdot \omega t}\right)$, $i(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j \cdot \omega t}\right)$ a Ohmův zákon má tedy tvar: $\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j \cdot \omega t}\right) == R \cdot \mathrm{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j \cdot \omega t}\right)$. Jelikož ovšem platí $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall z \in \mathbf{C} : a \cdot \mathrm{Im}(z) == \mathrm{Im}(a \cdot z)$, můžeme „vtáhnout“ *R* do argumentu funkce Im a tedy $\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j \cdot \omega t}\right) == \mathrm{Im}\left(R \cdot \hat{I}_M \cdot e^{j \cdot \omega t}\right)$, kde rovnost samozřejmě platí $\forall t \in \mathbf{R}$. Ve smyslu výše uvedeného důkazu tedy platí:

$$\hat{U}_M == R \cdot \hat{I}_M \tag{40}$$

Ohmův zákon platí tedy formálně shodně pro fázory i pro okamžité hodnoty proudů a napětí; je to způsobeno tím, že vztah mezi proudem a napětím na rezistoru neobsahuje derivace.

b) Cívka
Pro napětí a proud na rezistoru (pro dříve zavedené orientace proudu a napětí, tedy napěťová šipka má stejný směr jako šipka proudová) platí $u(t) == L \cdot \frac{di(t)}{dt}$, předpokládejme harmonické průběhy a postupujme obdobně jako u rezistoru; obdržíme:

$$\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == L \cdot \frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left(\hat{I}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right).$$

Chápejme dále komplexní funkci jedné reálné proměnné, tedy zobrazení $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ jako takovou funkci, kterou lze zapsat pomocí dvou reálných funkcí g a h jedné reálné proměnné, tedy $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad h:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(t)=g(t)+j\cdot h(t),\quad t\in\mathbf{R}$. Existují-li derivace funkcí g a h, je zřejmě nejlogičtějším způsobem, jak chápat derivaci funkce f, vztah $f'(t)=g'(t)+j\cdot h'(t)$.

Odtud snadno vidíme, že platí (položíme $f(t)=\hat{I}_M\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$)

$$\mathrm{Im}\left(f(t)\right) == h(t),\ \frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left(f(t)\right) == h'(t) == \mathrm{Im}\left(f'(t)\right).$$

S použitím také $\forall a\in\mathbf{R},\ \forall z\in\mathbf{C}: a\cdot\mathrm{Im}(z) == \mathrm{Im}(a\cdot z)$ můžeme psát

$\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == \mathrm{Im}\left(L\cdot\frac{d}{dt}\hat{I}_M\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == \mathrm{Im}\left(L\cdot\hat{I}_M\cdot\frac{d}{dt}e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$, neboť fázor (každý, tedy i $\hat{I}_M$) je na čase nezávislý; koneckonců je to jeden z hlavních důvodů jeho zavedení. Provedeme derivaci a konečně získáme:

$\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == \mathrm{Im}\left(L\cdot\hat{I}_M\cdot j\cdot\omega\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$. Zcela analogicky jako v případě rezistoru obdržíme:

$$\hat{U}_M == j\cdot\omega\cdot L\cdot\hat{I}_M \tag{41}$$

c) Kondenzátor

Podceňovali bychom inteligenci čtenáře, kdybychom při odvozování uváděli všechny předpoklady; postup je zcela obdobný jako v případě cívky. Platí:

$i(t) == C\cdot u'(t)$, tedy $\mathrm{Im}\left(\hat{I}_M\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) == C\cdot\frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left(\hat{U}_M\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$ a konečně

$$\begin{aligned}\hat{I}_M &== j\cdot\omega\cdot C\cdot\hat{U}_M\\ \hat{U}_M &== \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}\cdot\hat{I}_M\end{aligned} \tag{42}$$

9.2.2 Shrnutí vztahů, jednotky fázorů, pojem impedance, použití a řazení impedancí

V dalším vynecháme dolní index *M*, ostatně později, až se budeme zabývat výkony, uvidíme, že fázory nemusejí být jen „v měřítku maximálních hodnot“; změnu měřítka ovšem vždy budeme uvažovat lineární a měřítko všech fázorů (a tedy každého fázoru proudu i napětí) musí být stejné. Změna měřítka tedy znamená násobení rovnic (40), (41) a (42) konstantou, v námi zkoumaných případech zřejmě nutně reálnou a kladnou; násobení takovou konstantou ovšem platnost rovnic nemění. Nechceme zabřednout do mnoha indexů a chceme odlišit případy odporu, cívky a kondenzátoru indexy *R*, *L* a *C*. Přehledně tedy:

$$\begin{aligned}\hat{U}_R &== R\cdot\hat{I}_R\\ \hat{U}_L &== j\cdot\omega\cdot L\cdot\hat{I}_L\\ \hat{U}_C &== \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}\cdot\hat{I}_C\end{aligned} \tag{43}$$

Vztahy (43) nám vždy dávají fázor napětí na příslušné součástce (budeme se opakovat, ale opět jen vždy pro orientaci napětí shodnou s orientací proudu) jako násobek fázoru proudu tekoucího příslušnou součástkou. Odpor zůstal odporem a jeho jednotkou je tedy stále ohm (Ω); ať již z jednotek indukčnosti a kapacity, nebo z faktu, že jednotka fázoru je shodná s jednotkou veličiny, jejíž harmonický časový průběh fázor popisuje, mají zřejmě výrazy $j \cdot \omega \cdot L$ a $\dfrac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$ také jednotku ohm (Ω). Neuškodí tedy chápat vztahy (43) jako Ohmův zákon pro harmonický ustálený stav.

Poznámka pro zvídavé čtenáře: *Jednotky a fyzikální rozměry* (fyzikálním rozměrem jednotky rozumíme v tomto textu její vyjádření pomocí základních rozměrů SI, rozdíl mezi jednotkou a fyzikálním rozměrem je jen v tom, že si výraz vyjadřující jednotku, který často používáme, *pojmenujeme*, aby naše vyjadřování bylo stručnější: tak používáme N (newton) místo $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ a podobně) *jsou — pokud zkoumáme měřitelné veličiny z fyzikálního světa — důležité. Velmi důležité*. Koho by to zajímalo, ať si vyhledá pojmy jako „dimenzionální analýza“ a „fyzikální podobnost“. „Jak veliký je otvor“ musí mít jednotku a fyzikální rozměr, nicméně řešení problému „vejde se předmět do otvoru“ záleží na poměru velikosti otvoru a předmětu (ať již velikostí rozumíme cokoli). Fázory jsme zavedli podle vztahu $v_i(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{V}_i \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right)$. Funkce $\mathrm{Im} : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ fyzikální rozměr měnit nemůže a imaginární jednotce nelze fyzikální rozměr smysluplně přiřadit, naopak popření zvoleného smyslu je obvykle elementární, není ani v metrech, ani v ampérech, kilogramech atd. Výraz $j \cdot \omega \cdot t$ je bezrozměrný (tj. má stejný rozměr jako číslo 1), rozměr kruhové frekvence a času se vyruší. Výraz $e^{j \cdot \omega \cdot t}$ je také bezrozměrný: číslu *e* nelze fyzikální rozměr smysluplně přiřadit také a tudíž jeho mocnině na bezrozměrný výraz také nikoli. Suma sumárum, fázor veličiny má shodný fyzikální rozměr jako veličina, kterou popisuje.

V harmonickém ustáleném stavu (a v jiných případech nikoli!) můžeme tedy zavést pojem *impedance* jako „to, čím musíme násobit fázor proudu, abychom získali fázor napětí“. Impedance má jednotku ohm (Ω).

Impedance na rozdíl od zvyklostí na některých vysokých školách a fakultách nebudeme odlišovat stříškou, tu si ponecháme pro fázory. Impedance je komplexní číslo s jednotku ohm (Ω): komplexní no a co. Rozdíl mezi reálným číslem a komplexním číslem je mnohem menší, než mezi číslem a fázorem.

Přepišme tedy (43) pomocí impedancí:

$$\begin{aligned} &\hat{U}_R == R \cdot \hat{I}_R == Z_R \cdot \hat{I}_R && Z_R = R \\ &\hat{U}_L == j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I}_L == Z_L \cdot \hat{I}_L && Z_L = j \cdot \omega \cdot L \\ &\hat{U}_C == \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I}_C == Z_C \cdot \hat{I}_C && Z_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \end{aligned} \qquad (44)$$