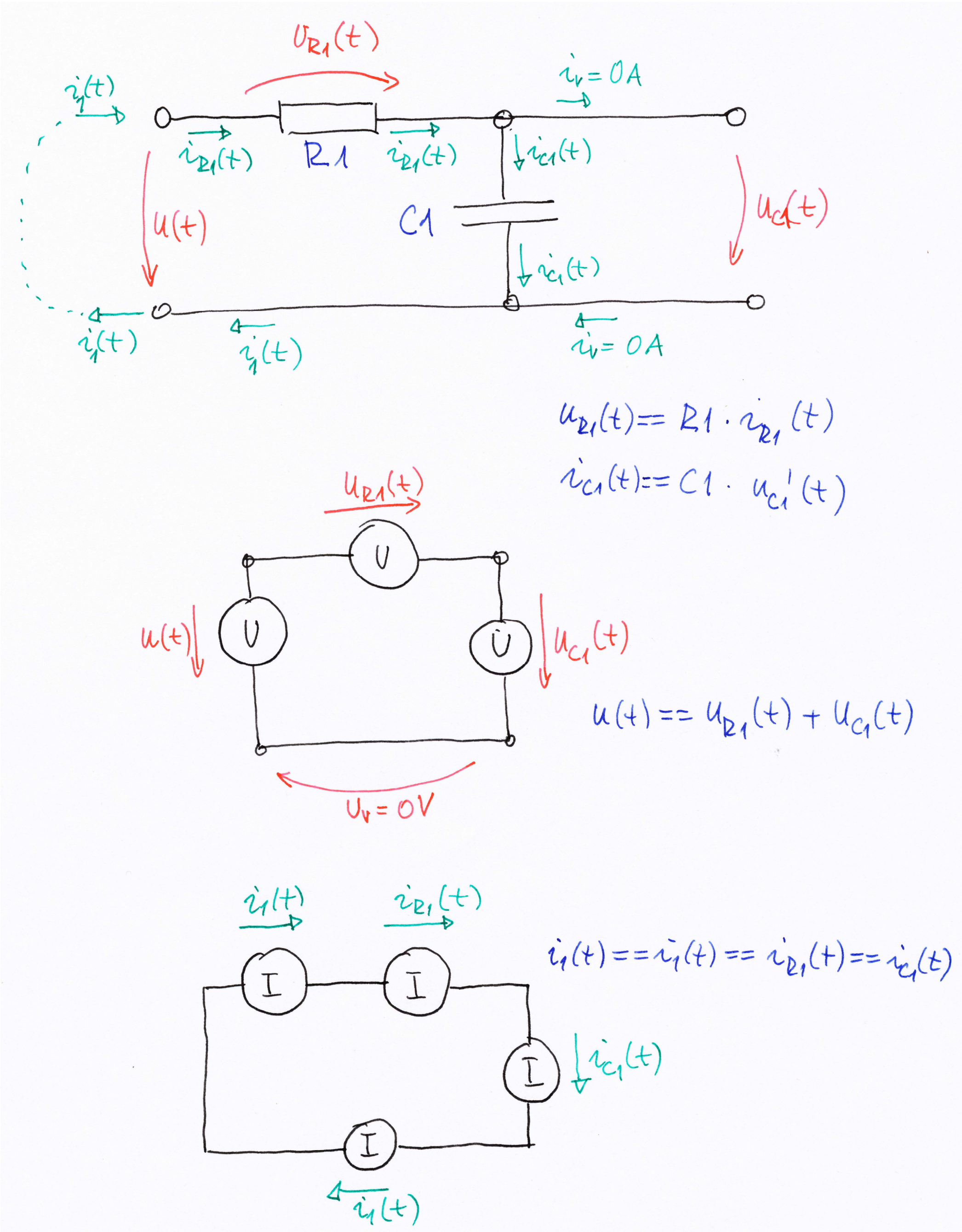
5. Příklady jednoduchých obvodů

5.1. Kondenzátor nabíjený přes rezistor

Ukažme si, že to, co už víme (z teorie obvodů, matematiku teď s důvěrou svěříme strojům), stačí k vyřešení jednoduchého obvodu. Uvažme obvod podle Obr. 14:



Obr. 14

Napišme rovnice, které platí pro rezistor a kondenzátor:

$$u_R == R \cdot i_R(t), \quad i_C == C \cdot u_C'(t) \qquad (12)$$

Dále použijeme fakt, ža co platí pro napětí, platí i pro (ideální) zdroje napětí a uvažme prostřední schémátko na Obr. 14.

Zřejmě, pokud nemá být řešení „False“, musí platit rovnice odpovídající tomu, jak jsou rezistor, zdroj napětí a kondenzátor zapojeny:

$$u(t) == u_R(t) + u_C(t) \qquad (13)$$

Co platí pro proudy, platí ovšem i pro zdroje proudů, uvažme dolní schémátko na Obr. 14.

Aby řešení nebylo „False“, musí platit:

$$i(t) == i_R(t) == i_C(t) \qquad (14)$$

Obdržíme dosazením z (12) do (13) a (14)

$$u(t) == u_C(t) + R \cdot C \cdot u_C'(t) \qquad (15)$$

Získali jsme tzv. diferenciální rovnici pro napětí $u_C(t)$, které je zároveň rovno výstupnímu napětí.

Rovnice (15) určuje časový vývoj napětí $u_C(t)$ v závislosti na vstupu $u(t)$ a pro dané spojení na hodnotě součinu $R \cdot C$.
Mimochodem, je zajímavé, že jde o hodnotu součinu $R \cdot C$, nikoli o obě hodnoty, *R* a *C*, $1\mu F \; a \; 1000\Omega$ dá co se týče $u_C(t)$ stejný výsledek jako $10\mu F \; a \; 100\Omega$, proudy ovšem budou jiné, součin $R \cdot C$ značíme někdy τ (tau) a $\tau = R \cdot C$ říkáme časová konstanta obvodu.

Jak tuto rovnici řešit? Na to je ještě brzy, musíme si nejprve uvědomit, co ještě musíme znát pro nalezení konkrétního řešení rovnice (15).

Představme si představitelnější časový vývoj: jaká bude teplota piva za deset minut záleží nejen na tom, jak na něj působí okolí (je v lednici a chladí se, stojí na stole a teplá), ale také na tom, jakou má teplotu teď.

Napětí v čase *t* na kondenzátoru tedy také záleží na tom, jaké je napětí na kondenzátoru teď.

Známe-li hodnotu napětí na kondenzátoru v čase t_0, tedy $u_C(t = t0) == u_{C0}$, de u_{C0}je známá hodnota a je –li známa rovnice (15) –tedy známe-li hodnotu $\tau = R \cdot C$ a známe-li, jak na obvod působí okolí, tedy známe-li časový průběh $u(t)$, můžeme rovnici vyřešit.

Řešitelný je tedy systém

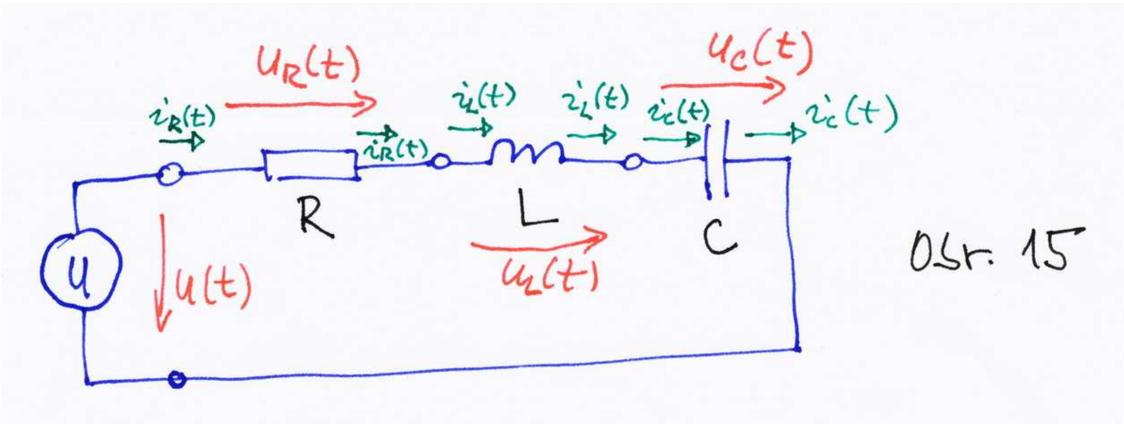
$$u(t) == u_C(t) + R \cdot C \cdot u_C{}'(t)$$

$$u_C(t = t0) == u_{C0}$$

Kde rovnici obsahující derivaci říkáme diferenciální rovnice s neznámou funkcí $u_C(t)$ a rovnici obsahující zadání hodnoty neznámé funkce $u_C(t)$ v nějaké konkrétní hodnotě parametru říkáme počáteční podmínka.

5.2. Další ukázka: sériový RLC obvod

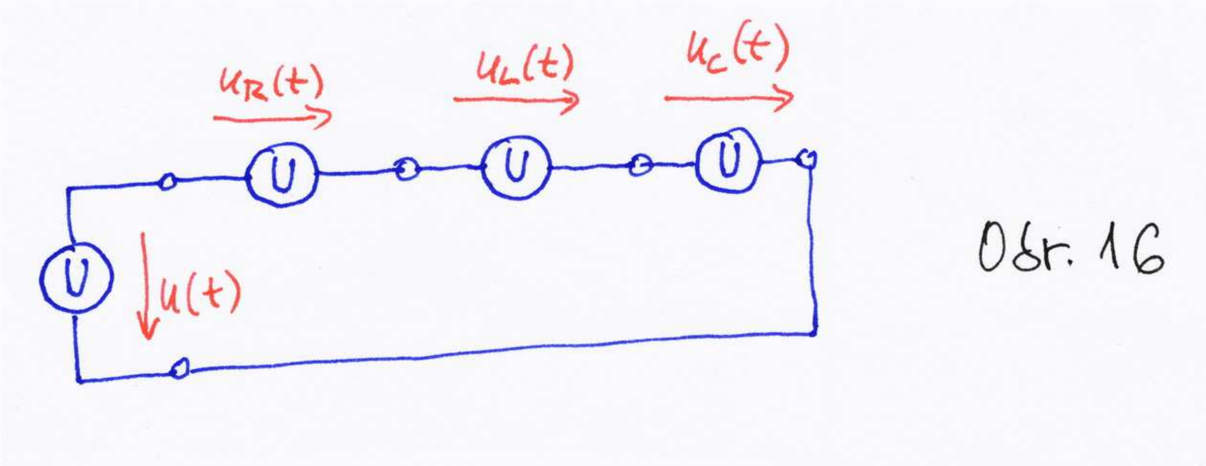
Ukažme si postup sestavení rovnic na dalším příkladu: na Obr. 15 je schéma zapojení rezistoru R, cívky L a kondenzátoru C v sérii.



Vyznačili jsme si zvolené orientace napětí na R, L, C a směry proudů jsme zvolili tak, aby byla zvolená orientace proudu na R, L, C ve stejném směru jako orientace napětí. Pak můžeme mechanicky napsat rovnice jednotlivých prvků:

$$\begin{aligned} u_R(t) &== R \cdot i_R(t) \\ u_L(t) &== L \cdot i_L{}'(t) \\ i_C(t) &== C \cdot u_C{}'(t) \end{aligned} \qquad (16)$$

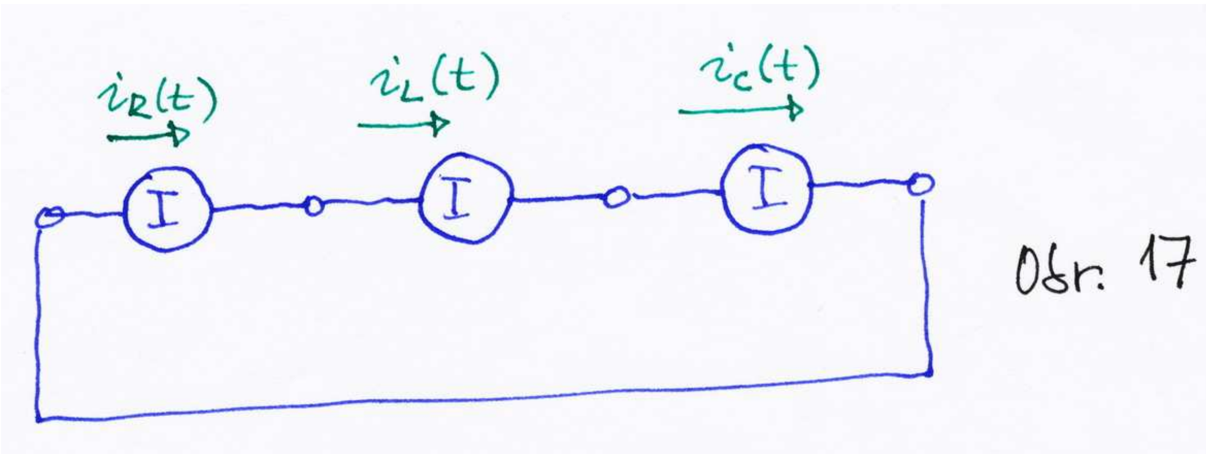
Překreslíme si Obr. 15 tak, že uvažovaná napětí nahradíme (ideálními) zdroji napětí a získáme Obr. 16.



Z pravidel pro řazení zdrojů napětí plyne rovnice:

$$0 == u(t) - u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) \tag{17}$$

Překresleme si schéma na Obr. 15, kde místo tekoucích proudů zakreslíme (ideální) zdroje proudů, získáme Obr. 17:



Spojení zdrojů proudu odpovídají rovnice:

$$\begin{aligned} i_R(t) &== i_L(t) \\ i_L(t) &== i_C(t) \end{aligned} \tag{18}$$

Rovnic (16), (17), (18) je celkem šest a máme šest neznámých: tři neznámé proudy a tři neznámá napětí.
Veličiny, které se v rovnicích vyskytují v derivacích (tedy napětí která jsou na kondenzátorech a proudy tekoucí cívkami), vyžadují ještě počáteční podmínky, tedy

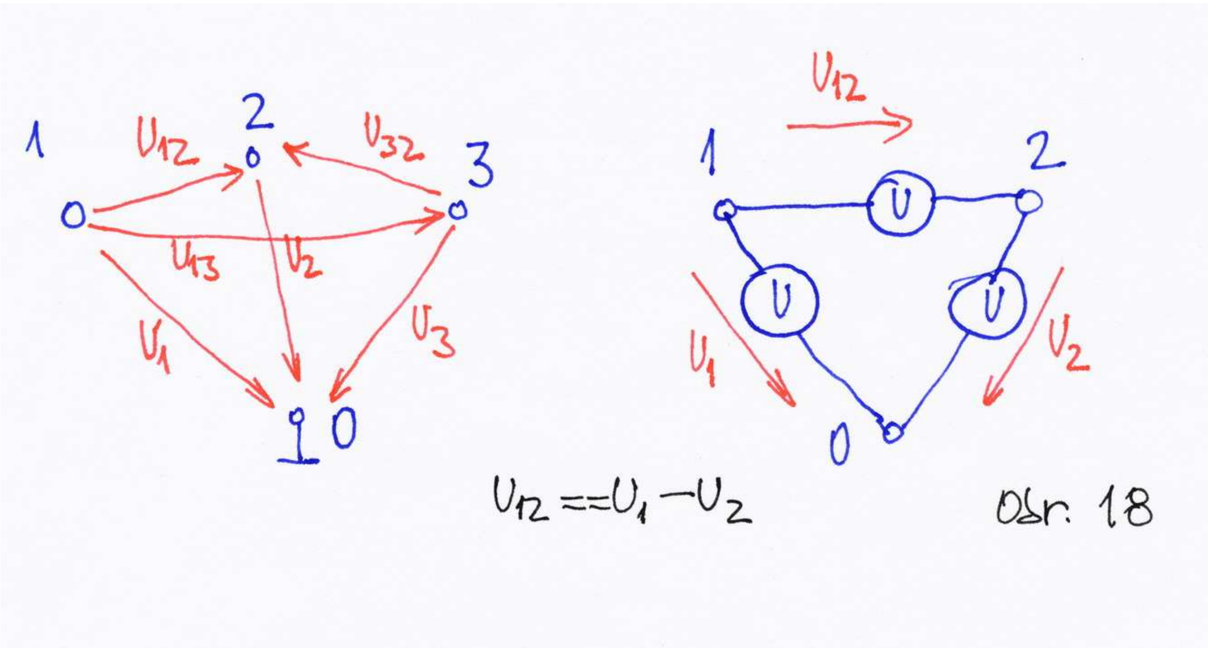
$$
\begin{aligned}
&u_C\left(t=t_0\right)==u_{C0}, \quad u_{C0} \text{ je zadané} \\
&i_L\left(t=t_0\right)==i_{L0}, \quad i_{L0} \text{ je zadané}
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

Systém rovnic (16), (17), (18), (19) je pro zadané hodnoty R ,L, C snadno řešitelný, viz Notebook `CAORLCNDSolve.nb`

Získali jsme úplné řešení: máme k dispozici časové průběhy všech obvodových veličin. Ovšem je zřejmé, že některé rovnice jsou velmi jednoduché, kdybychom si již na začátku označili, že obvodem teče jeden proud (to je nám ostatně zřejmé téměř od počátku),
ušetřili bychom si dvě neznámé a dvě rovnice.
Navíc v našem velice jednoduchém obvodu bylo jasné, jak rovnice týkající se řazení napětí napsat, to nemusí být vždy jednoznačné. Ukážeme si nyní spolehlivý postup, jak každý korektně zapojený (například neporušíme pravidla řazení zdrojů proudu a napětí) popsat rovnicemi a to pomocí tzv. metody uzlových napětí.

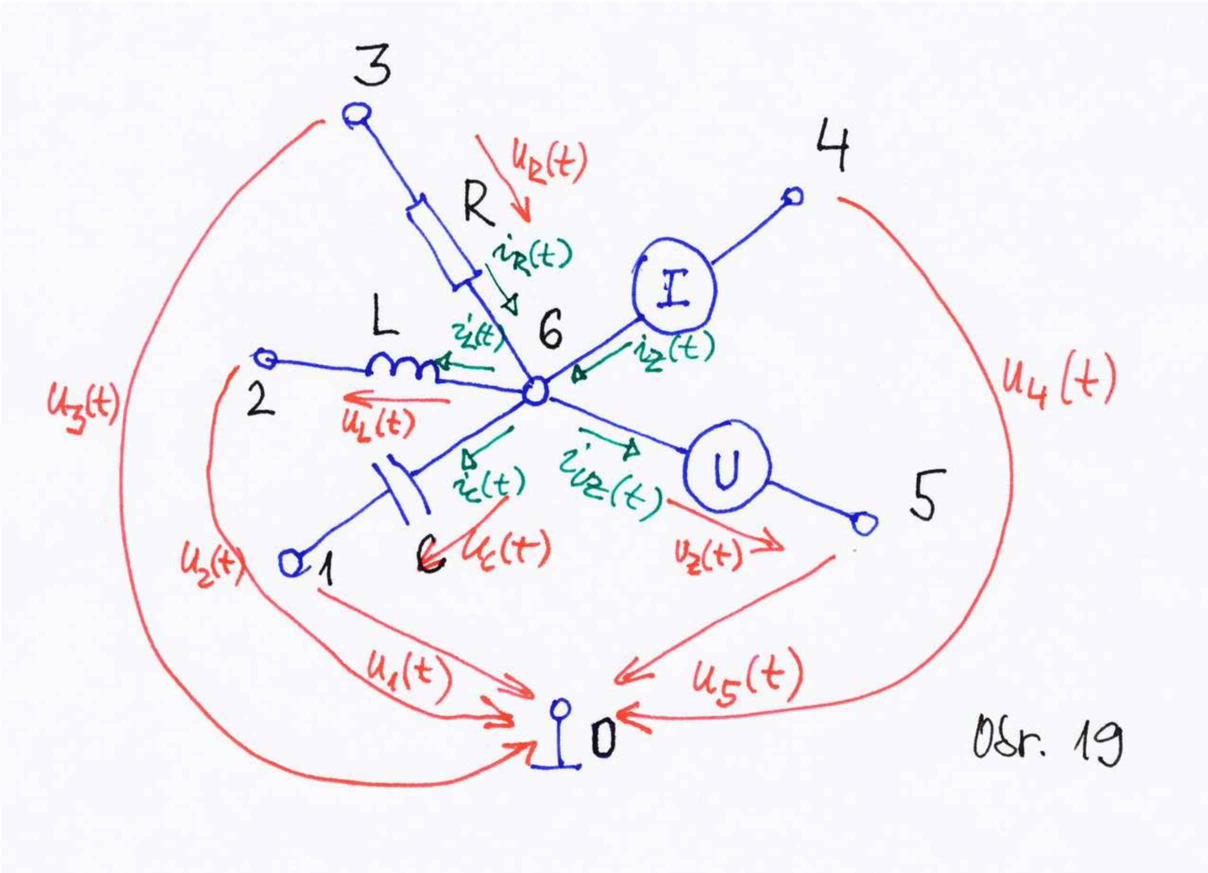
6. Metoda uzlových napětí

Metoda uzlových napětí využívá zachování proudů, proudy však vyjadřujeme pomocí napětí☺.



Na Obr. 18 jsou zakresleny tzv. uzly 1, 2, 3 a uzel 0 označený značkou pro společný vodič. Známe-li napětí uzlů 1, 2 a 3 proti uzlu 0, tedy napětí U_1, U_2, U_3, pak můžeme určit napětí mezi kterýmikoli dvěma uzly, například platí:

$U_1 == U_{12} + U_2 \Rightarrow U_{12} == U_1 - U_2$. Ke znalosti napětí mezi kterýmikoli dvěma body stačí, abychom znali napětí bodů vůči společnému vodiči. Budeme-li napětí na prvku mezi dvěma uzly počítat z rozdílu napětí těchto uzlů proti (libovolně zvolenému) společnému uzlu, splníme vlastně automaticky rovnice plynoucí z řazení napětí (a tedy i zdrojů napětí).



S prvky, se kterými jsme se zatím z teorie obvodů seznámili, přichází v úvahu pro každý uzel situace podle Obr. 19: uvažovaný uzel může být spojen s dalšími uzly rezistorem, kondenzátorem, cívkou, zdrojem napětí a zdrojem proudu, na obrázku jsou vyznačeny také (libovolně zvolené) orientace napětí mezi uzly a shodně s orientací napětí orientace proudů (aby platily rovnice (8), (9) a (11) popisující vztahy mezi proudem a napětím na rezistoru, cívce a kondenzátoru).
Vyjádříme všechny proudy tekoucí do a nebo z uzlu 6 a uvedeme, jestli dotyčný proud vtéká nebo vytéká: abychom správně dosadili do rovnice (7).

Uzly 3 a 6:

$$u_R(t) == R \cdot i_R(t),\ u_R(t) == u_3(t) - u_6(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i_R(t) = \frac{u_3(t) - u_6(t)}{R} \qquad \textit{vtéká} \tag{20}$$

Uzly 1 a 6:

$$i_C(t) == C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}, \quad u_C(t) == u_6(t) - u_1(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt}\left(u_6(t) - u_1(t)\right), \qquad vytéká \tag{21}$$

Ke kondenzátoru ještě vždy patří počáteční podmínka s napětím:

$u_C(t = t_0) = u_6(t = t_0) - u_1(t = t_0) == u_{C0}, \qquad u_{C0}$ zadané

Uzly 4 a 6:

Zde je situace nejjednodušší, daný definicí zdroje proudu:

$i_Z(t), \qquad vtéká$.

Zatím jsme tedy získali proudy, které budeme dosazovat do rovnice (7), bylo to jednoduché, protože z rovnic pro rezistor a kondenzátor jde při známém napětí vyjádřit snadno proud pomocí dělení nebo pomocí derivace napětí a proud ze zdroje proudu je zadaný z definice zdroje proudu. V rovnici pro ideální zdroj napětí se proud nevyskytuje, nelze z ní tedy vyjádřit. Pomůžeme si tak, že tento proud pojmenujeme, čímž získáme novou neznámou. Pro další neznámou ale potřebujeme další rovnici: bude to rovnice zdroje napětí.

Uzly 5 a 6

$i_{UZ}(t), \qquad vytéká$

Nová rovnice:

$$u_Z(t) == u_6(t) - u_5(t) \tag{22}$$

Obdobně naložíme s cívkou, proud jí tekoucí označíme jako novou proměnnou a rovnici pro cívku přidáme k systému rovnic.

Uzly 2 a 6

$i_L(t), \qquad vytéká$

$$u_L(t) == L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}, \; u_L(t) == u_6(t) - u_2(t)$$

Nová rovnice

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} == u_6(t) - u_2(t) \tag{23}$$

K cívce ještě vždy patří počáteční podmínka s proudem:

$i_L(t = t_0) == i_{L0}, \qquad i_{L0}$ zadané

Dosaďme za proudy do bilance (7)

$$\Sigma I_{vtékající} = \frac{u_3(t)-u_6(t)}{R} + i_Z(t)$$

$$\Sigma I_{vytékající} = i_L(t) + i_{UZ}(t) + C \cdot \frac{d}{dt}\big(u_6(t)-u_1(t)\big)$$

Rovnice popisující zachování proudu v uzlu:

$$\Sigma I_{vtékající} - \Sigma I_{vytékající} = \frac{u_3(t)-u_6(t)}{R} + i_Z - \left(i_L(t) + i_{UZ}(t) + C \cdot \frac{d}{dt}\big(u_6(t)-u_1(t)\big) \right) == 0 \qquad (24)$$

Další rovnice vzniklé z důvodu nově zavedených neznámých:

$$u_Z(t) == u_6(t) - u_5(t)$$

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} == u_6(t) - u_2(t) \qquad (25)$$

Počáteční podmínky pro kondenzátory a indukčnosti:

$u_C(t=t_0) = u_6(t=t_0) - u_1(t=t_0) == u_{C0}, \qquad u_{C0}$ zadané

$i_L(t=t_0) == i_{L0}, \qquad i_{L0}$ zadané .

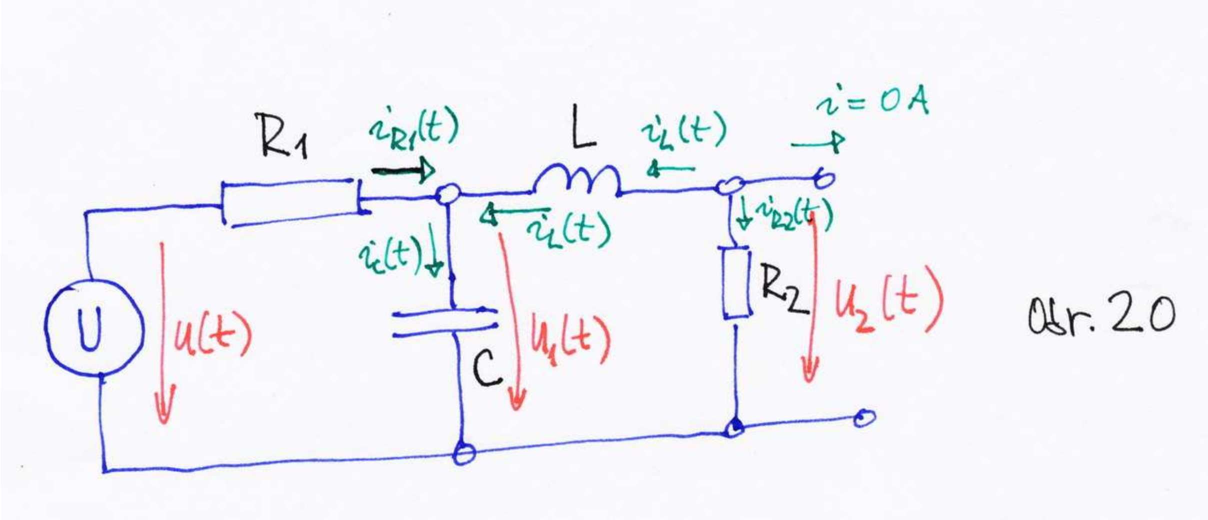
Pro každý uzel můžeme napsat 1 rovnici popisující zachování proudu, jako jsme napsali rovnici (24). Zavádíme-li nové proměnné, ke každé okamžitě máme rovnici. Máme tedy tolik rovnic, kolik je neznámých.

Je tedy naděje, že má-li schéma dobrý smysl, můžeme nalézt neznámá napětí uzlů a hodnoty nově zavedených proměnných. Veličiny, které jsme vyloučili dosazením vlastností obvodových prvků, můžeme snadno dopočíst, například $i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt}\big(u_6(t)-u_1(t)\big)$ a podobně.

Poznámka 1: Pokud zavádíme novou proměnnou a rovnici, učiníme tak když ji poprvé u některého z uzlů potřebujeme; podruhé bychom dělali totéž zbytečně znovu: to není chyba, ale je to hloupé.

Poznámka 2: ne vždy má *n* rovnic o *n* neznámých právě jedno řešení a to ani v případě rovnic diferenciálních. Pokud má být ale obvod použitelný v praxi, chtěli bychom právě jedno řešení a to dokonce omezené, nekonečná napětí a proudy by v praxi nefungovaly.
Pokud nedokážeme získat jedno řešení srozumnými výsledky, buď jsme obvod popsali špatně, nebo je schéma nesmyslné, nebo se ptáme na veličinu, kterou nelze určit (například napětí mezi tzv. galvanicky zcela oddělenými obvody…)

Ukažme si to na obvodu podle Obr. 20:



Uzel 1:
Rovnice popisující zachování proudu:

$$i_{R1}(t)+i_L(t)==i_C(t)\Rightarrow\frac{u(t)-u_1(t)}{R_1}+i_L(t)==C\cdot\frac{d}{dt}(u_C(t)-0)$$

Rovnice z důvodu nově zavedené proměnné:

$$u_2(t)-u_1(t)==L\cdot\frac{di_L(t)}{dt}$$

Počáteční podmínka pro cívku:

$i_L(t=t_0)==i_{L0}$, i_{L0} zadané

Počáteční podmínka pro kondenzátor:

$u_C(t=t_0)==u_{C0}$, u_{C0} zadané.

Uzel 2:

Rovnice popisující zachování proudu:

$$0-\left(i_L(t)+\frac{u_2(t)-0}{R_2}+0\right)==0$$

Rovnice z důvodu nově zavedené proměnné:
-nejsou, opakovali bychom se

Počáteční podmínky:
Nepřibyla žádná nová cívka ani kondenzátor, nejsou.

Řešení je provedeno v notebooku `CAOUzlyUkazka.nb`

7. Diferenciální rovnice a předpovídání budoucnosti, co vlastně dělá NDSolve

Podíváme-li se na notebook `CAOUzlyUkazka.nb`, vidíme, že jsme se k cíli, tedy k vyřešení úkolu „když je zadané napětí nebo proud někde, jaké bude napětí nebo proud jinde“, dostali přímočaře a snadno, tak snadno, že byla nálada vyhrát si trochu i s barvičkami a vlastně stačilo mechanicky použít návod pro metodu uzlových napětí a znát syntaxi NDSolve.
To, že cesta k výsledku byla tak jednoduchá, bylo způsobeno právě tím, že máme NDSolve: nevadilo nám zavádění dalších neznámých a zvyšování počtu rovnic, nevadilo nám, že rovnice jsou diferenciální i algebraické (obsahující derivace neznámých funkcí i neobsahující derivace neznámých funkcí).
Velká část obtížnosti studia teorie elektrických obvodů spočívá jinde v obtížnosti řešení získaných rovnic. Získali jsme velikou moc velmi snadno, ale nenechme se mýlit, zjistit, „co obvod dělá“ ještě vůbec neznamená rozumět tomu, jak to dělá a proč. Fakt, že umíme po pár obrázcích mnoho ještě neznamená, že jsme nějak lepší: jen my máme sbíječku a oni majzlík; jak rychle dílo dokončíme je důležité ekonomicky, ale kvalita díla nemusí být větší.
O NDSolve by šlo říci tak asi „…a všichni se podivovali, jakou moc dal Stephen Wolfram lidem.“

Funkce NDSolve[rovnice, neznámé, interval řešení] hledá numerickou aproximaci řešení diferenciálních rovnic. A co to je a proč to můžeme dělat bychom si měli trochu více vysvětlit: nikoli podrobně teorii numerických řešení diferenciálních rovnic, k tomu jsou povolanější jiní (zejména www.wolframalpha.com a help sw Mathematica u NDSolve). Jde nám o to, získat představu, o co tak asi jde. Ostatně jak funguje karburátor víme také jen tak mlhavě a detaily mísení ve více komorách běžný řidič nezná. Ale i běžný řidič ví, že se tam něco s benzínem a vzduchem děje.

Proč vlastně numerické metody? Matematická analýza pracuje s představou souvislé číselné osy plné reálných čísel z nichž naprostá většina jsou čísla iracionální. Kdybychom chtěli iracionální číslo vyjádřit desetinným číslem přesně, potřebovali bychom nekonečný počet desetinných míst, což není v konečném čase možné, navíc to není ani praktické: *kdyby* byla Mléčná dráha kruhová a *kdybychom* znali její poloměr a *kdyby* nebyl vesmír zakřivený a platil by vzoreček pro obvod kruhu, pak vynecháme-li všechna desetinná místa za čtyřicátým v čísle π, chyba vzniklá tímto zaokrouhlením by byla menší než průměr protonu. Z uživatelského hlediska jsou tedy všechny další cifry pro řešení podobných úloh zbytečné.

Dnešní matematika nese v sobě velkou část dědictví geometrie starých Řeků, kde byl kladen důraz na konstrukce ve světě geometrických objektů zcela přesné, úplná správnost pak měla být dokazatelná v konečném počtu myšlenkových kroků. Navíc obrovský úspěch Newtonovy a Lagrangeovy mechaniky utvrzoval vědce v představě světa spojitého, nekonečně dělitelného v prostoru a čase a tak byla vypracována spousta chytrých metod řešení matematických a inženýrských problémů vycházejících z představy spojitého světa.
Ani objev kvantové povahy jevů a částicové struktury hmoty příliš spojité teorie neoslabil: částic je v běžných situacích jednoduše příliš mnoho na to, abychom s nimi mohli počítat

jednotlivě a s chytrou obezličkou kontinuální teorie (neuvažujeme veličiny lokální, ale jejich střední hodnoty přes objemy, které jsou „mikroskopicky velké a makroskopicky malé“) naše rovnice platí, pokud neuvažujeme jevy mikrosvěta.

Problém je, že s iracionálními čísly pracujeme jinak, než s čísly racionálními: jelikož je nemůžeme zapsat v konečné formě desetinným (nebo dvojkovým, to je jedno) rozvojem, nebývá nám, než je pojmenovat.
Taková čísla jsou například π, e, $\sqrt{5}$, Sin[5]...Pokud chceme s těmito čísly pracovat přesně, používáme pravidla pro úpravy, například $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5}$.
Pokud nás zajímá „kolik to je, alespoň přibližně“, máme přibližné vyčíslení v tabulkách; jde často o výsledek programu, který by nám dal všechna desetinná čísla, kdyby běžel věčně, ale my jsme jej zastavili a spokojili se s nepřesným výsledkem, zato získaným v konečném čase.
Z tohoto pohledu jsou v číslech π, e, $\sqrt{5}$, Sin[5]... „do pojmenování schované výsledky nekonečných procesů“ a úlohy se opět řeší v klasickém stylu: řešení úlohy vtipným použitím konečného počtu kroků s použitím připravených hodnot čísel typu π, e, $\sqrt{5}$, Sin[5]... se považuje za cosi pěkného a ukazuje to jak je matematik chytrý, chcete-li ovšem použitím triků řešit složitější úlohy, brzy narazíte.

Toto pojetí má výhodu (pro technika naprosto zbytečné) absolutní přesnosti, nevýhodou je, že kromě za staletí vynalezených a vyzkoušených postupů nemáme žádný návod, jak příslušné triky vynalézat, naopak často umíme dokázat, že řešit úlohu s použitím již známých „do pojmenování schovaných výsledků nekonečných procesů“ nelze. Pokud chceme pracovat nadále přesně, nebývá, než si hledané přesné řešení pojmenovat.

Například řešení rovnice
$a_1 \cdot x + a_0 == 0, \quad a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0,$
$a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0, \quad a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0$
lze vyjádřit pomocí sčítání, násobení, dělení a odmocňování, tedy existují vzorce, které nám dají hodnotu neznámých kořenů x a tyto vzorce jsou konečné délky zápisu.
Pro rovnici:
$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 == 0$
lze dokázat, že vzorec konečné délky obecně neexistuje (jasně, pro zvláštní hodnoty koeficientů existovat může, těchto zvláštních případů je však mnohem méně než obecných a pravděpodobnost, že půjde najít vzorec pro náhodně zvolených 6 koeficientů, je nula).
Chceme-li mít vzorec pro řešení v konečném tvaru, musíme si jej pojmenovat. Často pak těmto pojmenováním říkáme „speciální funkce“, pro polynomiální rovnice například v Mathematice máme funkci Root. Není o nic horší, než funkce druhá odmocnina nebo sinus, jenom je mladší a nejsme na ni zvyklí.

Postup, kdy můžeme o každém výsledku v konečném počtu kroků dojít ekvivalentními úpravami až k axiomům a tak rozhodnout o správnosti nebo nesprávnosti nemusí existovat (Gödel, Tarski, Banach...).
Požadavek absolutní přesnosti a ostrosti pojmů, kterou jsme předpokládali po staletí (muž nebo žena, živý nebo mrtvý, vlna nebo částice, je a nebo to není babička...) je neaplikovatelný a ostatně na proudu a napětí a teplotě jsme viděli, že používáme v životě pojmy bez znalosti přesných definic a v konečném důsledku bez naprosto přesných výpovědí a nikterak nám to

nevadí. Koho to zajímá více, pěkně o tom pojednává Ludwig Wittgenstein ve svých Filosofických zkoumáních.

My v toto chvíli přesná řešení opustíme: ostatně i naše vstupy jsou poměrně nepřesné.

Podívejme se na definici derivace funkce *f*, parametrem této funkce bude čas *t*.

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{26}$$

Limitní proces dokonalého „blížení se“ je ve světě konečného počtu dostupných čísel nemožný: i v intervalu $\left\langle 0, 10^{-17} \right\rangle$ je ve smyslu reálných (ten název „reálná čísla je trochu výsměch“) nekonečněkrát více čísel, která kdy použijí všechny počítače a to i kdyby vesmír s počítači trval věčně. Mezi „bez pojmenování“ dostupnými čísly jsou mezery a nikdy nebude dost jmen pro ta pojmenovaná.

Učiníme tedy troufalý krok: vypustíme znak limity, Δt budeme uvažovat v „nějakém dobrém smyslu malé“ a znak přesné rovnosti nahradíme znakem „rovná se přibližně“ $\approx$.
Obdržíme:

$$f'(t) \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{27}$$

Z rovnice (27) ovšem již můžeme vyjádřit $f(t+\Delta t)$:

$$f(t+\Delta t) \approx f(t) + f'(t) \cdot \Delta t \tag{28}$$

Pokud příslušná limita a tedy i derivace existuje, bude pro „dostatečně malé Δt“ chyba „dostatečně malá“.

Pokud je naše nezávisle proměnná čas, můžeme rovnici (28) chápat jako „předpovídání budoucnosti“, znalost $f(t)$ a $f'(t)$ nám pro zvolené Δt poskytne *přibližnou informaci* o hodnotě funkce *f* o Δt později, tedy přibližnou hodnotu $f(t+\Delta t)$.

Problém je, že samotná existence konečné derivace $f'(t)$ nám zajistí jen to, že zvolíme-li si nějakou hodnotu nepřesnosti ve vztahu (28), *existuje* takové Δt, že pro každé menší Δt bude nepřesnost menší, než zvolená hodnota. Samotná existence konečné derivace nám ale neřekne, jak malé Δt máme volit pro zvolenou míru nepřesnosti.
Ukázka, jak například řešit Eulerovou metodou případ dvou neznámých funkcí je v `CAOPr2RLCdif2.nb`. V podstatě jakmile dokážeme z rovnic získat funkci, která vrací vektor derivací neznámých proudů a napětí a jejímiž parametry jsou ona neznámá napětí a čas, je vyhráno. V první buňce je syntaxe, jak takovou funkce získat z rovnic poměrně

obecně, dále je naprogramován postup již jen pro dvě neznámé funkce: přepis druhé části na obecný tvar ponecháváme zvídavému čtenáři coby cvičení.

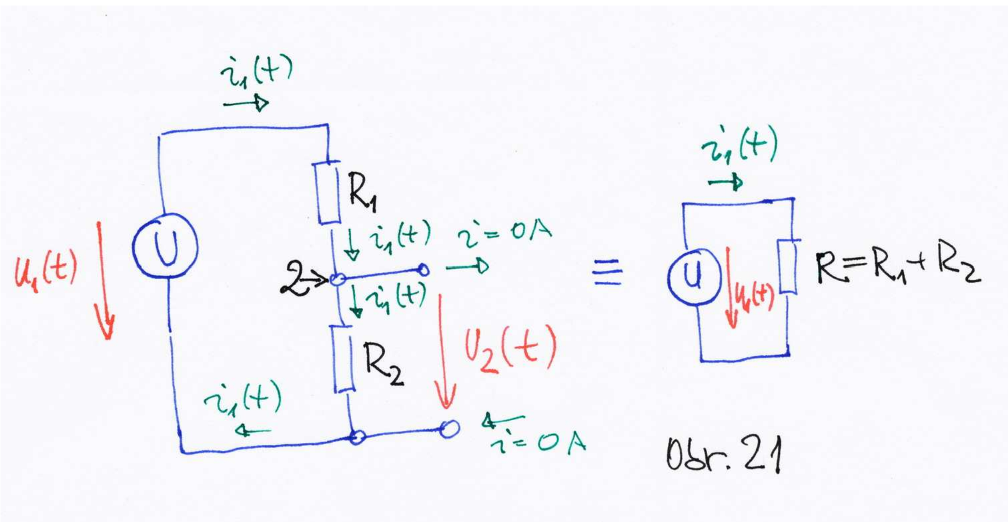
Metoda vycházející z uvedeného postupu se jmenuje Eulerova metoda řešení obyčejných diferenciálních rovnic. NDSolve používá mnoho různých metod, které navíc mají nastavitelné parametry (nepovinnými parametry funkce NDSolve) , například proměnlivý krok Δt, což zrychluje výpočet: tam, kde se hodnoty mění rychle, volí NDSolve menší Δt, aby dosáhlo zvolené přesnosti, byť za cenu delšího výpočetního času, v oblastech málo se měnících hodnot vstupů a hledaných veličin se krok prodlužuje, čímž výpočet zrychlujeme: v podstatě je to jako chování řidiče v serpentinách a na dálnici.
Metody obsažené v NDSolve jsou však v podstatě stejného principu jako metoda Eulerova, alespoň v tom smyslu, že využívají derivací k odhadu změn veličin podobně jako ve vztahu (28), ovšem podstatně sofistikovanějším způsobem.

Nyní umíme vyřešit všechny řešitelné obvody obsahující rezistory, kondenzátory, cívky a zdroje proudu a napětí. Naprostá většina takových obvodů je zhola neužitečná, některé jednoduché případy se ale vyskytují často a je dobré znát řešení těchto jednoduchých a často se vyskytujících případů zpaměti: ostatně při počítání bez pomoci strojů si pro výsledek násobení malých čísel saháme do paměti, teprve pro násobení větších použijeme algoritmus převádějící problém na sčítání a vícenásobné sahání do paměti.

8. Základní jednoduché případy: děliče a spojování součástek stejného typu

Rovnice řešeny notebooku `CAOJednoduchePripady.nb`

Uvažme situaci podle Obr. 21:



Napišme rovnice pro uzel 2:

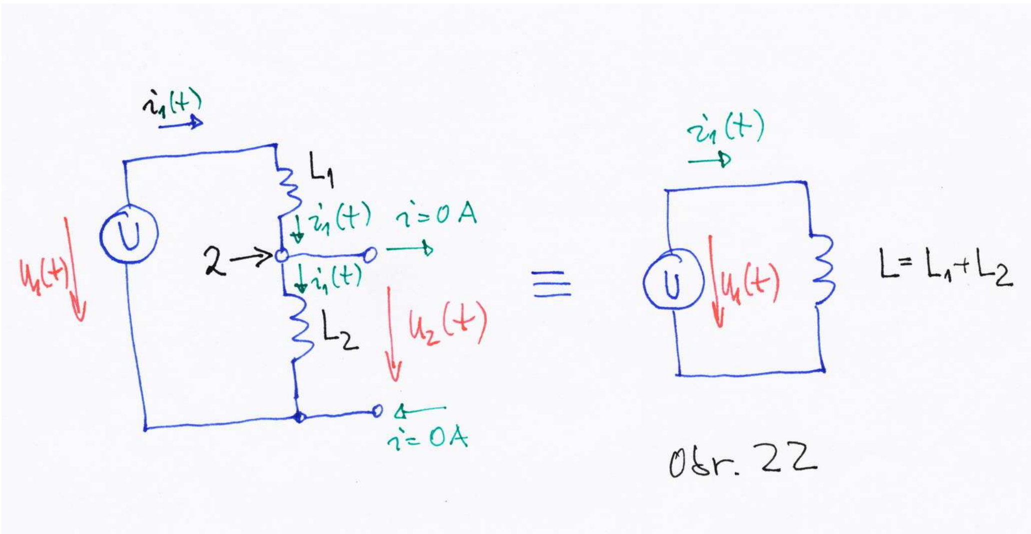
$$\frac{u_1(t)-u_2(t)}{R_1} == \frac{u_2(t)}{R_2} \quad \Rightarrow \; u_2(t) \to u_1(t)\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2} \tag{29}$$

Získali jsme vztah pro napětí tzv. odporového děliče.
Vyjádřeme proud:

$$i_1(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = \frac{u_1(t)}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow u_1(t) \to (R_1 + R_2) \cdot i_1(t) \tag{30}$$

Je tedy zřejmé, že jde o stejnou rovnici, jako kdyby protékal proud $i_1(t)$ rezistorem o odporu $R_1 + R_2$. Získali jsme pravidlo sériového řazení rezistorů:
Sériově řazené dva rezistory můžeme (pokud se z uzlu, ve kterém se stýkají, neodebírá žádný proud!) nahradit jedním, jehož odpor je roven součtu odporů těchto dvou rezistorů.
Zobecnění pro více rezistorů je elementární, podobné jako v případě řazení zdrojů napětí.

Uvažme situaci podle Obr. 22



Napišme rovnice pro uzel 2:

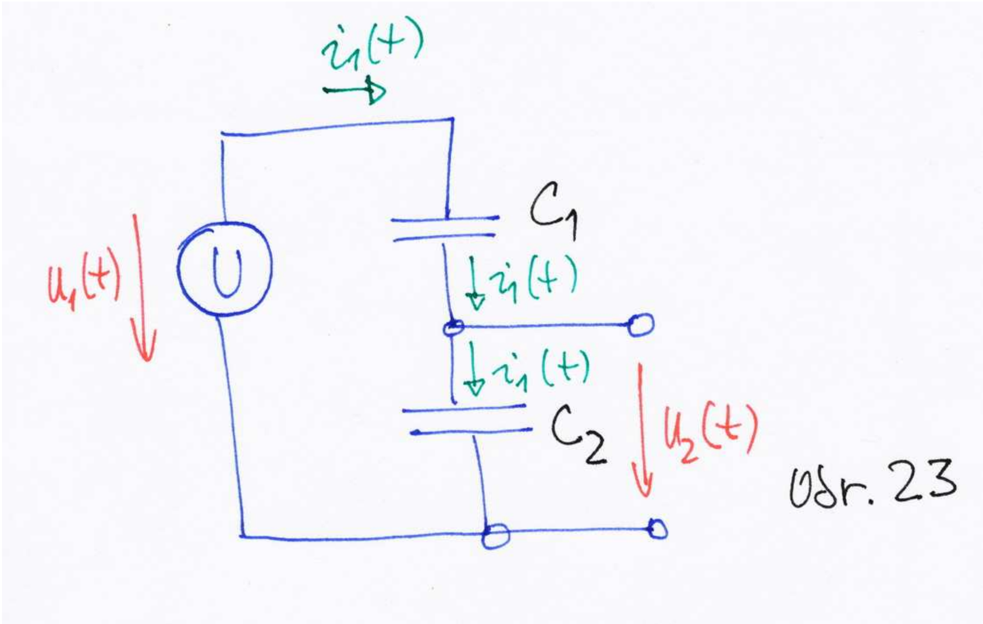
$$u_1(t) - u_2(t) == L_1 \cdot i_1^{'}(t), \quad u_2(t) == L_2 \cdot i_1^{'}(t)$$

Proud jsme si pojmenovali, rovnici uzlu psát nemusíme, v tomto případě je vyřešená tím, že jsme pojmenovali shodně proud oběma cívkami.
Řešení je

$$u_2(t) \to u_1(t) \cdot \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \qquad u_1(t) \to (L_1 + L_2) \cdot i_1^{'}(t) \tag{31}$$

Získali jsme pravidlo sériového řazení cívek:
Sériově řazené dvě cívky můžeme (pokud se z uzlu, ve kterém se stýkají, neodebírá žádný proud!) nahradit jednou, jejíž indukčnost je rovna součtu indukčností těchto dvou cívek.
Zobecnění pro více cívek je elementární.

Sériové řazení kondenzátorů je řešeno v notebooku `CAOJednoduchePripady.nb`.



Napíšeme rovnici uzlu 2:

$$C_1 \cdot \frac{d}{dt}\left(u_1(t) - u_2(t)\right) == C_2 \cdot \frac{d}{dt} u_2(t) \;\Rightarrow \frac{d}{dt} u_2(t) \to \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{d}{dt} u_1(t)$$

$$i_1(t) = C_2 \cdot \frac{d}{dt} u_2(t),\;\; i_1(t) == \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{d}{dt} u_1(t)$$

Je tedy možno nahradit sériovou kombinaci dvou kondenzátorů jedním o kapacitě

$$\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\frac{1}{C_1 \cdot C_2}}{\frac{1}{C_1 \cdot C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \qquad (32)$$

Sériově řazené dva kondenzátory můžeme (pokud se z uzlu, ve kterém se stýkají, neodebírá žádný proud!) nahradit jedním, jehož kapacita je rovna $C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$.

V notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` je také odvozeno paralelní řazení rezistorů a kondenzátorů; podceňovali bychom inteligenci čtenáře, kdybychom komentovali řešení obrázkem a rovnicemi. Ostatně zkusit si podle rovnic z notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` nakreslit schémátko, navíc když víme, že má jít o paralelní řazení, je s tím, co už o elektrických obvodech víme, hezké jednoduché cvičení.

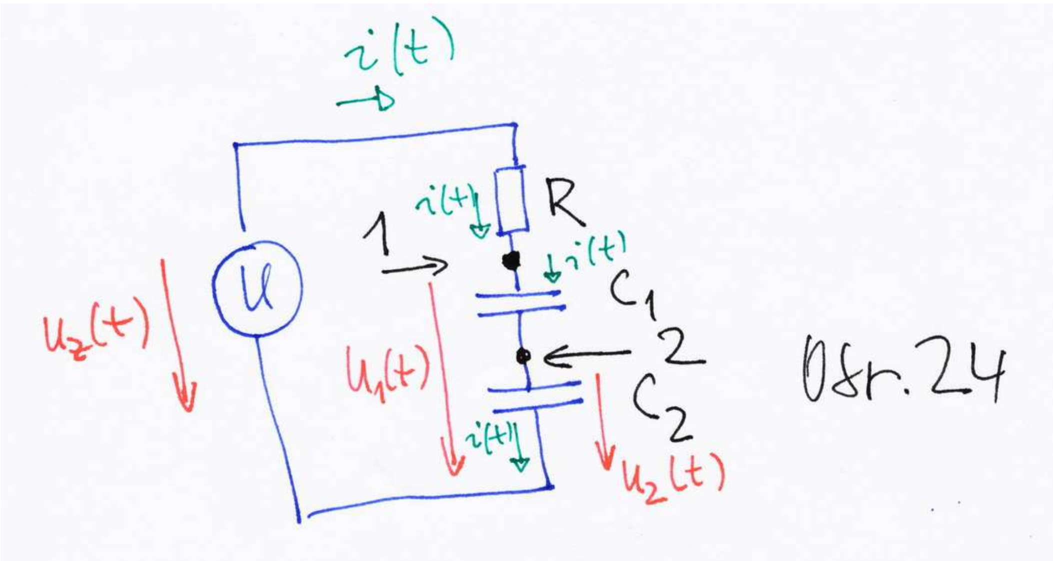
Paralelně řazené dva rezistory lze nahradit jedním, jehož odpor je roven převrácené hodnotě součtu převrácených hodnot odporů paralelně spojených rezistorů, tedy $R = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$.

Paralelně řazené dva kondenzátor lze nahradit jedním, jehož kapacita je rovna součtu kapacit těchto kondenzátorů, tedy $C = C_1 + C_2$.

Povšimněme si, že co do způsobu výpočtu výsledné hodnoty, jsou rezistor a cívka „na jedné lodi“ a problém je pěkně symetrický: co platí o sériovém řazení cívek a odporů, platí o paralelním řazení kondenzátorů a naopak. Důvod toho je ukryt již v řazení zdrojů proudu a napětí a v definičních rovnicích součástek a vysledovat jej precizněji opět ponecháváme zvídavému čtenáři coby cvičení; pamatovat si odvozená pravidla bychom si alespoň do úspěšného zakončení předmětu ČAO měli všichni☺.

Na pár místech jsme zmínili cosi ve smyslu, že každé schéma nemusí mít řešení a vidět to bylo v případě paralelního řazení zdrojů nestejných napětí a sériového řazení nestejných zdrojů proudu, kde jsme okamžitě obdrželi False, čili pokud se takové kombinace v obvodu vyskytne, obvod je nesmyslný, neužitečný a nerealizovatelný. Ukažme si ještě jeden nesmysl a poukažme na jeden omyl v případě napětí a sériového řazení kondenzátorů. Jasně, úplně duální problém by nastal v případě proudů a paralelního řazení cívek. Ideální rezistor je součástka, která žije vždy jen současností, popis jejího chování neobsahuje derivace, nemá požadavek na spojité změny ani proudu, ani napětí: kolize současnosti s minulostí nemůže nastat a tak problém, na který poukážeme, se ideálních rezistorů i netýká. Reálných ano, ty vykazují kapacitu i indukčnost, ostatně reálné cívky a kondenzátory vykazují vždy i odpor a „tu druhou“ vlastnost: ukázaný problém bude tedy ve skutečnosti teoretický, v přírodě nastat nemůže.

Uvažme zapojení podle Obr. 24



V notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` je v poslední buňce tento obvod vyřešen. Vyzkoušíte-li si stav s nulovými počátečními podmínkami, uvidíte, že lze kapacitní nezatížený dělič používat stejně jako dělič odporový, obecně ovšem nikoli. Pro počáteční napětí kondenzátorů splňující podmínku, že jejich součet je v je roven napětí zdroje počátečním čase můžeme snižovat hodnotu odporu, pro podmínky toto nesplňující je velikost počátečního proudu se snižováním odporu stále větší a pro nulový odpor řešení bez zavedení (v přírodě se nevyskytujících) pulsů (v Mathematice pro analytická řešení například funkce DiracDelta) neexistuje.
Vyzkoušejte si změny hodnot počátečních podmínek a zmenšování odporu rezistoru k nule.

9. Další jednoduché případy – stejnosměrné obvody a harmonický ustálený stav

9.1. Stejnosměrné obvody

Pokud se v obvodu vyskytují zdroje proudu a napětí, které mají konstantní velikost (a samozřejmě nemění v čase orientaci) a v počátečním čase jsou hodnoty napětí na kapacitách a proudů tekoucích indukčnostmi obecné, budou se nejprve vlivem neshody velikosti proudů a napětí v obvodu měnit, s časem ovšem méně a méně. Odezní tzv. přechodný děj (transient phenomenon) a hodnoty se ustálí, čímž myslíme, že se mění tak málo, že je v rámci zvolené přesnosti již můžeme za konstantní považovat: přesně stanovená hranice, kdy končí přechodný děj, tedy neexistuje, záleží na naší volbě.
Abychom se podívali na ukázkový případ, nemusíme nic dalšího programovat, v notebooku `CAOJednoduchePripady.nb` je v poslední buňce. Když si zkusíte kromě odporů a počátečních podmínek také měnit tmax, ustálenín obvodu uvidíte.

Podívejme se na rovnice jednotlivých součástek za předpokladu konstantních hodnot všech proudů a napětí:

$$\begin{aligned} u_R(t) &== R \cdot i_R(t) \quad \rightarrow u_R == R \cdot i_R \\ i_c(t) &== C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \quad \rightarrow i_c == 0A \\ u_L(t) &== L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad \rightarrow u_L == 0V \end{aligned} \tag{33}$$

Odebráním argumentu ukazujeme, že místo konstantní funkce můžeme myslet konstantu.

Je-li na nějakém prvku (stále) nulové napětí, má stejnou rovnici jako kus vodiče nebo zdroj nulového napětí.

Teče-li nějakým prvkem (stále) nulový proud (jasně, žádný proud neteče), můžeme tento prvek z obvodu vypustit.

Stejnosměrné obvody samozřejmě můžeme řešit obecně se všemi součástkami, vyřešit diferenciální rovnice, přičemž si dáme pozor, abychom čas řešení zvolili dostatečně dlouhý, aby se průběhy ustálily a odečíst výsledné hodnoty na konci řešení.

Často se jeví jednoduší na základě vztahů (33) „kondenzátory rozpojit a cívky a zkratovat“, tedy kondenzátory zcela vyřadit ze schématu a cívky nahradit vodiči.

Rovnice popisující obvody však byly diferenciálními rovnicemi z důvodu, že vztahy mezi napětím a proudem obsahují v případě cívek a kondenzátorů derivace. Nejsou-li v obvodu cívky a kondenzátory, nejsou v jeho popisu derivace a vzniklé rovnice jsou algebraické.
Máme-li již rovnice napsané v Mathematice, odstranění derivací provedeme z rovnic snadno například takto: rovnice/._‘[t]:>0.

V případech obvodů složených z námi dosud uvažovaných obvodových prvků jde o zjednodušení značné, navíc věty o řešitelnosti soustav lineárních rovnic jsou všeobecně známé a pokud řešení nalezneme, můžeme se i dosazením přesvědčit, jestli naše řešení původní rovnice splňuje.

V případech obvodů obsahujících tzv. nelineární prvky (jako jsou například diody, tranzistory, cívky a transformátorky s feromagnetickými magnetickými obvody a podobně) je často výhodnější řešit diferenciální rovnice s vyjádřitelnými derivacemi, než hledat ustálené stavy řešením soustav nelineárních algebraických rovnic.

9.2. Harmonický ustálený stav

Ukázky pro tuto část textu jsou v notebooku `CAORLCNDSolveaHUS.nb`
Pro vysvětlení použijeme stejné schéma jako je na Obr. 15.
Pro lepší názornost jsme si vyjádřili derivace a eliminovali zbytečné algebraické rovnice.
Nejprve se podívejme na výsledné grafy, vidíme, že zpočátku není průběh napětí na kondenzátoru sinusový, po odeznění tzv. přechodného děje se ovšem stane sinusovým, se stejnou frekvencí, jako má zdroj napětí a obecnou amplitudou a fázovým posunem.
Počáteční přechodný děj je vyvolán počátečními hodnotami, lze volit takové, že přechodný děj nenastává, což se někdy využívá k omezení zapínacích proudů v případě spínání velkých spotřebičů.