

4. MECHATRONIKA

4.1. ÚVOD

4.1.1. Vymezení pojmu mechatronika

Mechatronika sjednocuje pohled na elektromechanické obvody a celé elektromechanické systémy. Jejím základem jsou diferenciální rovnice popisující dynamické vlastnosti jednotlivých prvků systému, z nichž se poté odvozuje chování celku.

Z teoretické mechaniky je známa obecná metodika sestavování pohybových rovnic mechanických soustav Lagrangeovými rovnicemi. Lze snadno ukázat, že k určení stavu mechanické soustavy lze kromě kartézských či jiných souřadnic využít i jiných parametrů, jejichž počet odpovídá počtu stupňů volnosti soustavy. Tyto parametry se nazývají zobecněné souřadnice a v literatuře se většinou označují x_i . Jejich výběr je do značné míry libovolný; provádí se však pokud možno tak, aby dynamické zákony pohybu byly jejich pomocí popsány co nejjednodušeji.

Tato metodika ovšem platí i pro jiné než mechanické systémy, např. pro obvody elektrické, regulační apod.). Zde bývají zobecněnými souřadnicemi různé vhodné fyzikální veličiny a jejich derivace (výchyly, elektrická napětí, proudy, teploty, tlaky atd.). Často se volí tak, aby pro rovnovážný stav systému platilo

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0; \quad (4.1.1.1)$$

v takovém případě se jedná o odchylky od rovnováhy.

4.1.2. Lagrangeovy rovnice druhého druhu

Lagrangeovy rovnice druhého druhu, které popisují dynamické vlastnosti daného systému mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= Q_1 \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial T}{\partial x_n} &= Q_n, \end{aligned} \quad (4.1.2.1)$$

kde x_1, x_2, \dots, x_n jsou zobecněné souřadnice, $T = T(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n)$ je kinetická energie systému a Q_1, Q_2, \dots, Q_n zobecněné síly působící na systém.

Zobecněné síly mohou obecně mít tři složky

$$Q_i = Q_{ki} + Q_{\tilde{R}i} + F_i, \quad (4.1.2.2)$$

kde složka Q_{ki} reprezentuje síly konzervativní, složka $Q_{\tilde{R}i}$ síly charakterizující rozptyl (dissipaci) energie a složka F_i síly vnější.

Složky konzervativních sil lze stanovit zápornou derivací potenciální energie podle zobecněné souřadnice. Označíme-li potenciální energii systému $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pak

$$Q_k = -\nabla V \Rightarrow Q_{ki} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (4.1.2.3)$$

Existuje-li navíc ve vyšetřované soustavě rozptyl (dissipace) energie, jako například tření, objevuje se na pravé straně další člen $Q_{\tilde{R}i}$, který lze určit ze vztahu

$$Q_{\tilde{R}i} = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \dot{x}_i}, \quad (4.1.2.4)$$

kde \tilde{R} je dissipativní funkce charakterizující rychlost rozptylu energie v systému. Práce sil $Q_{\tilde{R}i}$ se pak rovná záporně vzaté hodnotě rozptylové funkce \tilde{R} . Působí-li na systém ještě vnější síly $F_i(t)$, můžeme soustavu rovnic (4.1.2.1) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \dot{x}_1} + F_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial T}{\partial x_n} &= -\frac{\partial V}{\partial x_n} - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \dot{x}_n} + F_n(t). \end{aligned} \quad (4.1.2.5)$$

Jestliže uvažujeme malé změny souřadnic systému od rovnovážného stavu, můžeme obvykle zanedbat změny kinetické energie podle zobecněných souřadnic (například u regulačních procesů), takže soustava (4.1.2.5) nabude tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \dot{x}_1} &= F_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n} + \frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \dot{x}_n} &= F_n(t). \end{aligned} \quad (4.1.2.6)$$

Vnější síly F_n je někdy vhodné vyjádřit pomocí vnějších výkonů, které se označují písmenem N ($F_n = \frac{\partial N}{\partial \dot{x}_n}$). Pokud vnější síly vyvolávají dostatečně malé odchylky, vede soustava (4.1.2.6) parciálních diferenciálních rovnic po linearizaci na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} D_{11}x_1 + D_{12}x_2 + \dots + D_{1n}x_n &= F_1(t) \\ &\vdots \\ D_{n1}x_1 + D_{n2}x_2 + \dots + D_{nn}x_n &= F_n(t), \end{aligned} \quad (4.1.2.7)$$

kde

$$D_{ij} = a_{ij} \frac{d^2}{dt^2} + b_{ij} \frac{d}{dt} + c_{ij}, \quad (4.1.2.8)$$

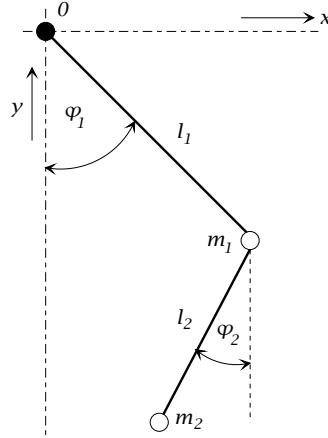
přičemž a_{ij} , b_{ij} a c_{ij} jsou konstanty.

Naznačený postup má velký teoretický význam a je dostatečně obecný. Je však současně velmi složitý. Při řešení běžných úloh proto raději sestavujeme rovnice pro

jednotlivé prvky soustavy odděleně, a to na základě fyzikálních zákonů, kterými se pochody probíhající v těchto prvcích řídí (zákon zachování hmoty, energie, Newtonovy zákony, d'Alembertův princip, Kirchhoffovy zákony atd.). I zde bývají zpravidla výsledkem nelineární diferenciální rovnice. Jejich řešení ovšem většinou nelze realizovat analytickými prostředky; nezbytná je aplikace vhodné numerické metody. Chceme-li nicméně získat alespoň základní představu o chování systému, je možno v určité oblasti tyto rovnice linearizovat.

Použití Lagrangeových rovnic budeme nejprve ilustrovat na třech příkladech z klasické mechaniky.

1. Pohybové rovnice dvojitého matematického kyvadla



Obr. 4.1: K odvození rovnic dvojitého matematického kyvadla

Podle obr. 4.1 mají jednotlivé závěsy délky l_1 a l_2 a hmotnosti kuliček jsou m_1 a m_2 . Za zobecněné souřadnice je rozumné volit úhly φ_1 a φ_2 (úhly, které svírají závěsy se svislicí). Počáteční podmínky mohou být definovány například takto: $\varphi_1(0) = \varphi_{10}$, $\varphi_2(0) = \varphi_{20}$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$. Zřejmě se jedná o pohyb v konzervativním silovém poli bez dissipace.

Nejprve musíme určit potenciální a kinetickou energii soustavy. Kartézské souřadnice obou hmotných bodů podle obr. 4.1 jsou

$$x_1 = l_1 \sin \varphi_1, \quad y_1 = -l_1 \cos \varphi_1,$$

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \quad y_2 = -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2. \quad (4.1.2.9)$$

Odtud

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, \quad \dot{y}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1,$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2, \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2. \quad (4.1.2.10)$$

Kinetická energie soustavy T se nyní určí jako

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

což po dosazení a úpravě dává

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.1.2.11)$$

Potenciální energii V soustavy získáme jako

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2 . \quad (4.1.2.12)$$

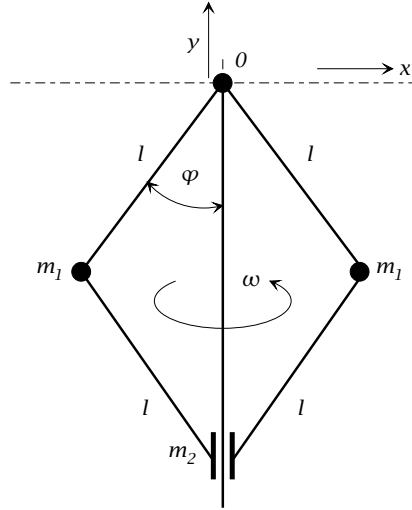
Dosazením veličin do Lagrangeových rovnic (4.1.2.5) s uvažováním nulové dissipace a nulových vnějších sil obdržíme pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 &= -\frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2) l_1} [\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] , \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l_2} \sin \varphi_2 &= \frac{l_1}{l_2} [\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] . \end{aligned} \quad (4.1.2.13)$$

Vůčihrledně se jedná o rovnice dvou kyvadel konajících vynucené kmity. Jejich řešení v uzavřeném tvaru neexistuje. Integraci lze provést jen tehdy, jsou-li kmity malé (pak $\sin \alpha \approx \alpha$ a $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2$); ani potom však řešení v uzavřeném tvaru nezískáme.

2. Pohybová rovnice Wattova regulátoru

Schéma Wattova regulátoru je na obr. 4.2. Pro jednoduchost předpokládejme, že se regulátor otáčí konstantní rychlostí ω . Zobecněnou souřadnicí pro nás bude úhel φ .



Obr. 4.2: Ke stanovení pohybové rovnice Wattova regulátoru

Při určování kinetické energie je nutno brát v úvahu to, že obě hmotnosti m_1 vykonávají jednak pohyb kruhový kolem osy y a dále pohyb otáčivý okolo vrcholu úhlu φ . Vliv kruhového pohybu hmotnosti m_2 lze zřejmě zanedbat. Pak

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \varphi , & y_1 &= -l \cos \varphi , \\ x_2 &= 0 , & y_2 &= -2l \cos \varphi , \end{aligned} \quad (4.1.2.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l \dot{\varphi} \cos \varphi , & \dot{y}_1 &= l \dot{\varphi} \sin \varphi , \\ \dot{x}_2 &= 0 , & \dot{y}_2 &= 2l \dot{\varphi} \sin \varphi . \end{aligned} \quad (4.1.2.15)$$

Kinetická a potenciální energie se nyní určí jako

$$T = m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + x_1^2 \omega^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = m_1 l^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi) + 2m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi ,$$

$$V = 2m_1gy_1 + m_2gy_2 = -2(m_1 + m_2)gl \cos \varphi . \quad (4.1.2.16)$$

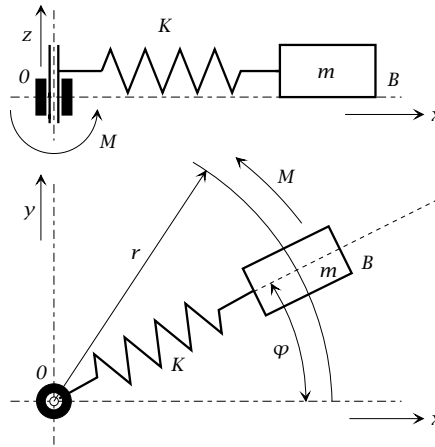
Po dosazení za T a V do Lagrangeových rovnic získáme příslušnou pohybovou rovnici ve tvaru

$$(m_1 + 2m_2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + 2m_2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - m_1 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{(m_1 + m_2)g}{l} \sin \varphi = 0 . \quad (4.1.2.17)$$

Ani tato diferenciální rovnice druhého řádu s proměnnými koeficienty neposkytuje řešení v uzavřeném tvaru. Je ji možno řešit např. numericky nebo rozvojem do mocninné řady.

3. Rotační pohyb na pružině

Jedná se o rotační pohyb tělesa o hmotnosti m buzený vnějším momentem M podle obr. 4.3. Těleso je uchyceno ke středu otáčení pružinou o zanedbatelné hmotnosti a konstantě K . Pohyb tělesa je lineárně tlumen třením o podložku (tření je charakterizováno konstantou tlumení B).



Obr. 4.3: Náskres uspořádání

Za zobecněné souřadnice budeme pokládat polární souřadnice r a φ . Pak

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi ,$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi , \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi . \quad (4.1.2.18)$$

Nyní již lze stanovit veličiny figurující v Lagrangeových rovnicích takto:

- kinetická energie tělesa

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) ,$$

- potenciální energie pružiny

$$V = \frac{1}{2}K(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}Kr^2 ,$$

- dissipativní funkce

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}B(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}B(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) ,$$

- výkon ze soustavy (odpovídá vnějším silám)

$$N = M\dot{\varphi} . \quad (4.1.2.19)$$

Po dosazení do Lagrangeových rovnic pro obě zobecněné souřadnice dostaneme pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} m\ddot{r} + B\dot{r} + Kr &= mr\dot{\varphi}^2 , \\ mr^2\ddot{\varphi} + Br^2\dot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} &= M . \end{aligned} \quad (4.1.2.20)$$

I tyto rovnice jsou nelineární a jejich řešení v uzavřeném tvaru neexistuje.

4.2. LAGRANGEOVY ROVNICE A ELEKTRICKÉ SYSTÉMY

4.2.1. Analogie mezi mechanickými a elektrickými veličinami

Mezi mechanickými a elektrickými veličinami lze na základě podobnosti diferenciálních rovnic popisujících mechanické a elektrické obvody vysledovat řadu analogií. Jako příklady lze uvést:

hmotnost m	indukčnost L
konstanta tlumení B	rezistance R
konstanta pružiny K	převrácená hodnota kapacity $1/C$
zobecněná souřadnice x	náboj q
zobecněná rychlost \dot{x}	proud i
zobecněná budicí síla F	napětí u

Nyní již na základě předchozích analogií můžeme definovat veličiny analogické k funkcím T , V , \tilde{R} a N :

funkce	mechanický systém	elektrický obvod
T	$\frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{x}_k^2$	$\frac{1}{2} \sum_k L_k i_k^2$
V	$\sum_k m_k g x_k \left(\frac{1}{2} \sum_k K_k x_k^2 \right)$	$\frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{C_k} q_k^2$
\tilde{R}	$\frac{1}{2} \sum_k B_{kl} (\dot{x}_k - \dot{x}_l)^2$	$\frac{1}{2} \sum_k R_k i_k^2$
N	$\sum_k F_k \dot{x}_k$	$\sum_k u_k i_k$

Uvažujme sériový elektrický RLC obvod napájený ze zdroje napětí u . Pak

$$T = \frac{1}{2} L i^2 , \quad V = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} , \quad \tilde{R} = \frac{1}{2} R i^2 . \quad (4.2.1.1)$$

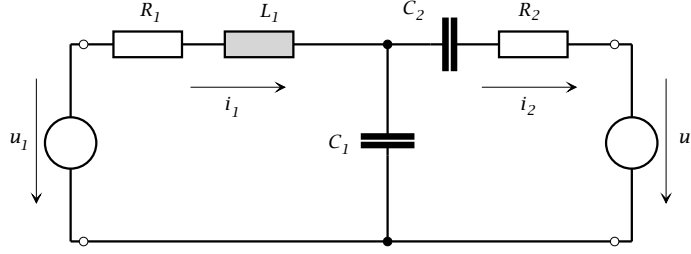
Dosazení těchto veličin do Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial i} = - \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i} + u ,$$

vede okamžitě k výsledku

$$\frac{d}{dt}(Li) = -\frac{q}{C} - Ri + u \rightarrow Ri + \frac{d}{dt}(Li) + \frac{1}{C} \int i dt = u . \quad (4.2.1.2)$$

Naznačeným postupem můžeme sestavovat diferenciální rovnice i pro složitější typy obvodů. Rozeberme si situaci v obvodu podle obr. 4.4.



Obr. 4.4: K odvození diferenciálních rovnic ve složitějším elektrickém obvodu

Zobecněné souřadnice jsou procházející náboje q_1 a q_2 . Při označení veličin podle obrázku již můžeme stanovit jednotlivé skalární funkce

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2, \\ V &= \frac{1}{2C_1} (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2C_2} q_2^2, \\ \tilde{R} &= \frac{1}{2} R_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2, \\ N &= u_1 \dot{q}_1 - u_2 \dot{q}_2. \end{aligned} \quad (4.2.1.3)$$

Nutno je pouze dodržovat jistou opatrnost při určování znamének vnějších výkonů (výkon je dodáván ze zdroje 1 a odebírán v bodě 2).

Jsou-li parametry elektrického obvodu (rezistance, indukčnosti a kapacity) konstantní, vychází po dosazení do Lagrangeových rovnic tyto vztahy:

$$L_1 \ddot{q}_1 = u_1 - R_1 \dot{q}_1 - \frac{1}{C_1} (q_1 - q_2)$$

a

$$0 = -u_2 - R_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{C_1} (q_2 - q_1) - \frac{1}{C_2} q_2. \quad (4.2.1.4)$$

Z výsledků je patrné, že výsledné rovnice jsou obyčejné diferenciální rovnice prvního a druhého řádu, které popisují časový průběh nábojů protékajících oběma obvody. Vzhledem ke snazšímu určování počátečních podmínek se ovšem v obvodářské praxi zpravidla počítá s proudy, tedy s hodnotami \dot{q}_1 a \dot{q}_2 .

4.2.2. Linearizace diferenciálních rovnic

Předpokládejme, že vyšetřovaný systém sestává z několika prvků. Každý z prvků je charakterizován závislostí své odezvy na primární vzruch. Tato závislost však bývá obecně nelineární (jako příklad lze uvést indukčnost cívky s feromagnetickým jádrem, která závisí na jeho sycení a tedy na protékajícím proudu). Linearizace uvedené charakteristiky se obvykle provádí tak, že na základě zkušenosti vymezíme pracovní oblast prvku za daných vnějších podmínek, a v ní předpokládáme lineární závislost mezi vzruchem a odezvou. Jedná se tedy o náhradu nelineární charakteristiky tečnou v pracovním bodě. Výpočty se tak podstatně zjednoduší. Na druhou stranu si musíme uvědomit, že takto získané řešení je dostatečně korektní pouze v blízkosti zmíněného pracovního bodu.

4.3. ELEKTROMECHANICKÉ SYSTÉMY A METODIKA JEJICH ŘEŠENÍ

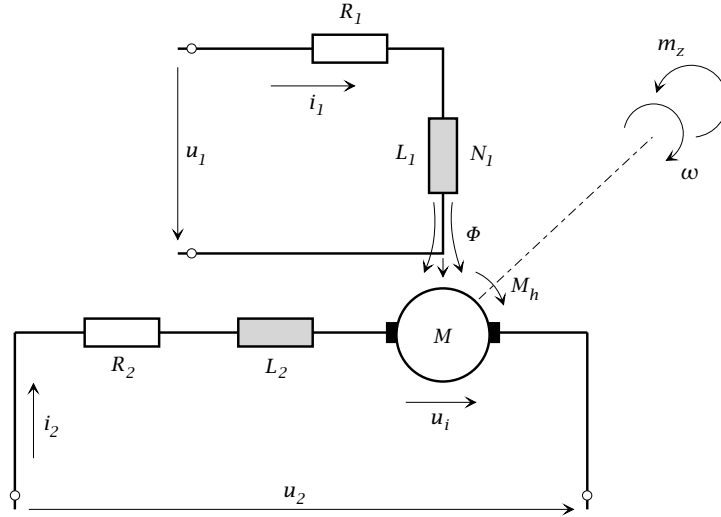
4.3.1. Úvodní poznámka

V systémech obsahujících elektrické i mechanické části se setkáváme s problémem správně popsat jejich vzájemnou vazbu. Ta se například u stejnosměrného motoru vyjadřuje vztahy pro napětí a točivý moment, přičemž se zpravidla uplatňuje zmíněná linearizace. V dalších případech se může jednat o silové účinky (vtahování železného jádra do cívky elektromagnetu apod.).

4.3.2. Ilustrativní příklady

1. Stejnosměrný motor s cizím buzením

Příslušné rovnice odvodíme ze stavových funkcí (energie, dissipace) a zobecněných sil. Nákres uspořádání je znázorněn na obr. 4.5.



Obr. 4.5: *K odvození rovnic popisujících stejnosměrný motor s cizím buzením*

Nejprve zavedeme tři zobecněné souřadnice q_1 ($\dot{q}_1 = i_1$), q_2 ($\dot{q}_2 = i_2$) a φ ($\dot{\varphi} = \omega$). Pak lze psát

- $T = \frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$,
- $V = 0$,
- $\tilde{R} = \frac{1}{2}R_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}R_2\dot{q}_2^2$,
- zobecněná síla v budicím obvodu je u_1 , v obvodu kotvy $u_2 - u_i$ a v mechanickém obvodu $M_h - m_z$,

přičemž indukované napětí $u_i = K_u \Phi \dot{\varphi}$ a hnací moment $M_h = K_m \Phi \dot{q}_2$ ($\Phi = L_1 \dot{q}_1 = \frac{N_1 \dot{q}_1}{R_m}$). Po dosazení do Lagrangeových rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L_1 \dot{q}_1) &= -R_1 \cdot \dot{q}_1 + u_1, \\ \frac{d}{dt}(L_2 \dot{q}_2) &= -R_2 \cdot \dot{q}_2 + u_2 - u_i, \\ \frac{d}{dt}(J \dot{\varphi}) &= M_h - m_z. \end{aligned} \tag{4.3.2.1}$$

Pokládáme-li veličiny R_1 , R_2 , L_2 , R_{m1} , J , K_u a K_m za konstantní, lze předchozí tři rovnice převést do tvaru

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{pro budicí obvod,} \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_i \quad \text{pro obvod kotvy,} \\ J \frac{d\omega}{dt} &= M_h - m_z \quad \text{momentová rovnice.} \end{aligned} \quad (4.3.2.2)$$

V těchto rovnicích vystupují známé veličiny u_1 , u_2 a m_z . Neznámými jsou i_2 , ω a Φ , z nichž lze posléze odvodit další veličiny, jako např. i_1 , u_i a M_h . Soustava je obecně nelineární díky součinům $\Phi\omega$ a Φi_2 ve vztazích pro indukované napětí kotvy a pro velikost hnacího momentu. Budeme-li však s malou chybou předpokládat, že budicí proud i_1 a následně tok Φ jsou také konstantní, zjednoduší se předchozí soustava na tvar

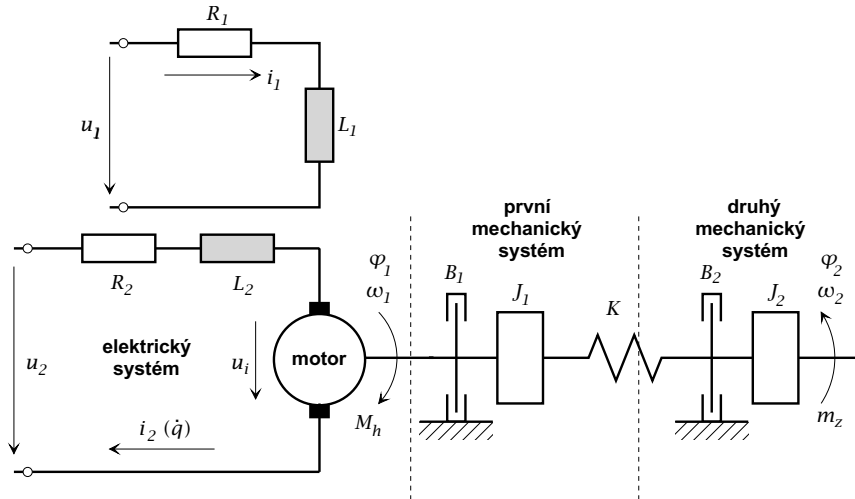
$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1, \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + K_3 \omega, \\ J \frac{d\omega}{dt} &= K_4 i_2 - m_z(t). \end{aligned} \quad (4.3.2.3)$$

Po zderivování druhé z rovnic a dosazení z třetí rovnice bychom získali diferenciální rovnici druhého řádu pro u_2 a opačným způsobem podobnou rovnici pro ω . Zanedbáme-li navíc indukčnost L_2 , nabude rovnice pro ω tvaru

$$J \frac{d\omega}{dt} + \frac{K_3 K_4}{R_2} \omega = \frac{K_4 u_2}{R_2} - m_z(t) \quad (4.3.2.4)$$

s poměrně jednoduchým řešením.

Složitější je situace tehdy, má-li hřídel nenulový moment setrvačnosti J_2 , je pružný (K) a existuje-li tlumení B_1 a B_2 (obr. 4.6). Buzení (tok Φ) nyní pokládejme za konstantní.



Obr. 4.6: Cíze buzený motor s pružným hřídelem a tlumením

Zavedeme-li nyní tři zobecněné souřadnice q_2 , φ_1 a φ_2 , dostaneme

- $T = \frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2$,
- $V = \frac{1}{2}K(\varphi_1 - \varphi_2)^2$,
- $\tilde{R} = \frac{1}{2}R_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}B_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}B_2\dot{\varphi}_2^2$,
- $N = (u_2 - u_i)\dot{q}_2 + M_h\dot{\varphi}_1 - m_z\dot{\varphi}_2$,

kde $u_i = K_3\dot{\varphi}_1$ a $M_h = K_4\dot{\varphi}_1$ a konstanty K_3 a K_4 plynou z předchozího odstavce. Po dosazení do Lagrangeových rovnic bude

$$\frac{d}{dt}(L_2\dot{q}_2) = -R_2\dot{q}_2 + u_2 - u_i,$$

$$\frac{d}{dt}(J_1\dot{\varphi}_1) = -K(\varphi_1 - \varphi_2) - B_1\dot{\varphi}_1 + M_h - K_3\dot{q}_1,$$

$$\frac{d}{dt}(J_2\dot{\varphi}_2) = -K(\varphi_2 - \varphi_1) - B_2\dot{\varphi}_2 - m_z. \quad (4.3.2.5)$$

Lze-li pokládat veličiny L_2 , J_1 a J_2 za konstanty, obdržíme nakonec soustavu tří diferenciálních rovnic druhého řádu ve tvaru

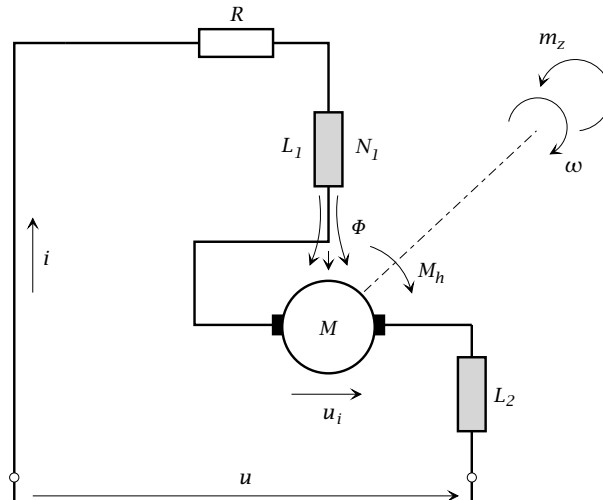
$$u_2 = R_2\dot{q}_2 + L_2\ddot{q}_2 + K_3\dot{\varphi}_1,$$

$$K_4\dot{q}_1 = J_1\ddot{\varphi}_1 + B_1\dot{\varphi}_1 + K(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$K(\varphi_1 - \varphi_2) = J_2\ddot{\varphi}_2 + B_2\dot{\varphi}_2 + m_z. \quad (4.3.2.6)$$

2. Stejnoseměrný motor se sériovým buzením

Základní schéma je na obr. 4.7



Obr. 4.7: K odvození rovnic stejnosměrného motoru se sériovým buzením

Ve schématu na obr. 4.7 představuje R součet všech rezistancí zapojených v sérii. Indukčnosti pokládejme za konstanty. Zvolíme-li za zobecněné souřadnice q a φ , získáme

při zachování předchozího postupu:

- $T = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}^2,$
- $V = 0,$
- $\tilde{R} = \frac{1}{2}R\dot{q}^2,$
- $N = (u - u_i)\dot{q} + (M_h - m_z)\dot{\varphi}.$

Zde je opět $u_i = K_u \Phi \dot{\varphi}$ a $M_h = K_m \Phi \dot{q}$. Po dosazení do Lagrangeových rovnic máme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L_1 + L_2)\dot{q} &= -R\dot{q} + u - u_i, \\ \frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) &= M_h - m_z. \end{aligned} \quad (4.3.2.7)$$

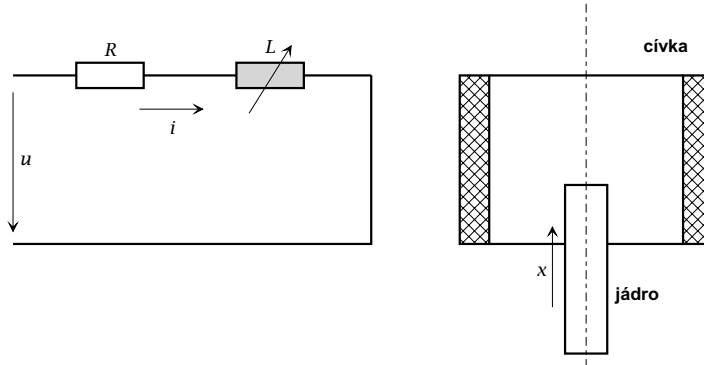
Jsou-li parametry L_1 , L_2 a J konstantní, lze tyto rovnice upravit do tvaru

$$\begin{aligned} u &= R\dot{q} + L\ddot{q} + K_u \frac{N_1 \dot{q}}{R_m} \dot{\varphi}, \\ J\ddot{\varphi} &= K_m \frac{N_1}{R_m} \dot{q}^2 - m_z(t). \end{aligned} \quad (4.3.2.8)$$

Obě tyto rovnice jsou nelineární.

3. Obvod obsahující cívku se železem (elektromagnet)

Jedná se o obvod znázorněný na obr. 4.8. Proměnná indukčnost je reprezentována cívku s železným jádrem. Po připojení obvodu ke zdroji jím začne protékat proud a jádro o hmotnosti m je vtahováno do cívky. Tím se mění indukčnost obvodu L , která je funkcí x .



Obr. 4.8: Elektrický obvod obsahující elektromagnet

Při zavedení zobecněných souřadnic q a x mají vstupní veličiny Lagrangeových rovnic tvar (mechanickou dissipaci zanedbáváme)

- $T = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$
- $V = mgx,$
- $\tilde{R} = \frac{1}{2}R\dot{q}^2,$
- $N = u\dot{q}.$

Dosazením do Lagrangeových rovnic dostáváme

$$u = R\dot{q} + \frac{d}{dt}(L\dot{q}),$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}L\dot{q}^2\right) = -mg; \quad (4.3.2.9)$$

druhou rovnici lze přepsat do tvaru

$$m\ddot{x} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \frac{\partial L}{\partial x} - mg,$$

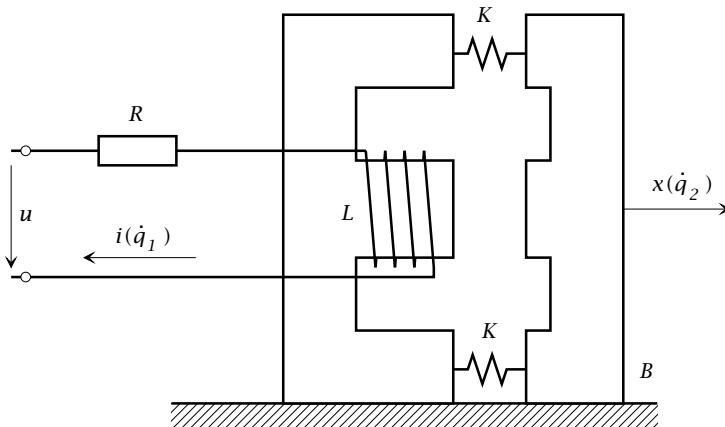
přičemž první člen na pravé straně označuje sílu F , kterou působí cívka na jádro. Úloha je zřejmě nelineární a při jejím řešení musíme spojit znalost teorie obvodů a teorie elektromagnetického pole. Indukčnost cívky při dané poloze jádra je totiž nutno spočítat z energie magnetického pole pomocí vztahu

$$L = \frac{2W}{i^2}. \quad (4.3.2.10)$$

Výpočty lze realizovat výlučně numerickými metodami, přičemž je možno postupovat následujícím způsobem:

1. Pro počáteční polohu jádra v cívce se při zvoleném, dostatečně malém proudu, spočte rozložení magnetického pole (např. metodou konečných prvků), z něho se určí energie cívky a z ní podle (4.3.2.10) indukčnost.
2. Z rozdílu energie pole při počáteční poloze jádra a v poloze změněné o Δx se poté určí síla F působící na jádro v počátečním okamžiku.
3. Numerickým řešením druhé rovnice v (4.3.2.9) se určí pro zvolené Δt posun jádra Δx .
4. Numerickým řešením první rovnice v (4.3.2.9) se určí proud i v čase Δt .
5. Pro nově získané hodnoty x a i se znovu určí rozložení magnetického pole cívky, velikost energie, indukčnosti a síly působící na jádro a vyšetří se velikost x a i v dalším časovém okamžiku. Stejným způsobem se pokračuje dál a dál.

Podobně lze vyšetřit úlohu znázorněnou na obr. 4.9. Mezi póly elektromagnetu jsou dvě pružiny o konstantě K , které brání přitahování kotvy, navíc se zde uplatňuje lineární tření B . Indukčnost L cívky je opět funkcí polohy kotvy.



Obr. 4.9: Elektromagnet s uplatněním vlivu pružin a tření

Označme opět hmotnost kotvy písmenem m . Při zavedení zobecněných souřadnic q a x obdržíme

- $T = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$,
- $V = 2 \cdot \frac{1}{2}Kx^2 = Kx^2$,
- $\tilde{R} = \frac{1}{2}R\dot{q}^2 + \frac{1}{2}B\dot{x}^2$,
- $N = u\dot{q}$.

Po dosazení do Lagrangeových rovnic bude

$$u = R\dot{q} + \frac{d}{dt}(L\dot{q}) ,$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}L\dot{q}^2\right) = -2Kx - B\dot{x} ; \quad (4.3.2.11)$$

druhou rovnici lze přepsat do tvaru

$$m\ddot{x} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \frac{\partial L}{\partial x} - 2Kx - B\dot{x} .$$

Numerické řešení lze realizovat podobným postupem jako v předchozím příkladě.

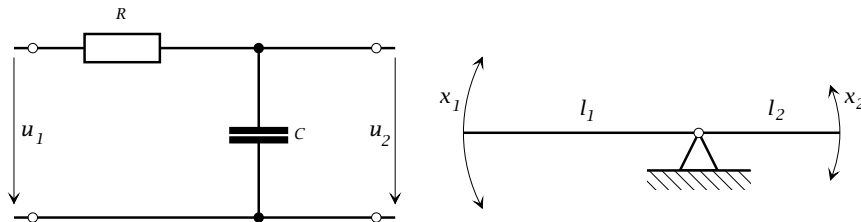
4.4. NĚKTERÉ ANALOGIE MEZI MECHANICKÝMI A ELEKTRICKÝMI OBVODY

4.4.1. Úvodní poznámka

Již z předchozí kapitoly vyplývá, že mezi mechanickými a elektrickými obvody existují úzké analogie. Přitom hmotnost odpovídá indukčnosti, viskózní tlumení rezistanci a účinky pružiny převrácené hodnotě kapacity. V dalším textu si tyto analogie budeme ilustrovat na vybraných příkladech.

4.4.2. Vybrané příklady

1. Proporcionální člen



Obr. 4.10: Elektrický a mechanický proporcionální člen

Proporcionální člen je takový prvek, u něhož je výstupní signál vždy přímo úměrný signálu vstupnímu a přitom se změny vstupu na výstup přenášejí okamžitě, bez zpoždění. Příkladem takového členu může být odporový dělič, jeho analogií v mechanice např. dvojramenná páka (obr. 4.10).

Pro dělič napětí platí

$$u_2 = K_0 u_1 , \quad K_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} ,$$

zatímco pro páku (pokládáme-li za vstupní a výstupní veličinu délku oblouku)

$$x_2 = K_0 x_1, \quad K_0 = \frac{l_2}{l_1}. \quad (4.4.2.1)$$

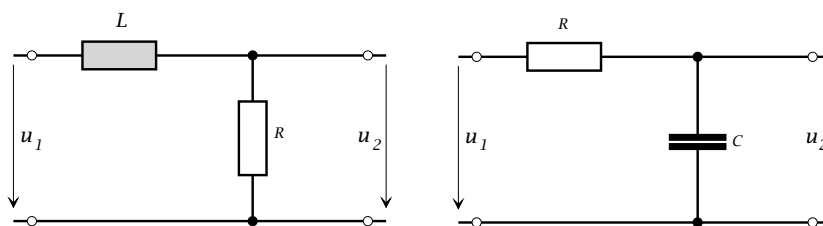
Konstantě K_0 se říká konstanta přenosu. Obrazový přenos $F(p)$ je definován jako

$$F(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{K_0}{p}. \quad (4.4.2.2)$$

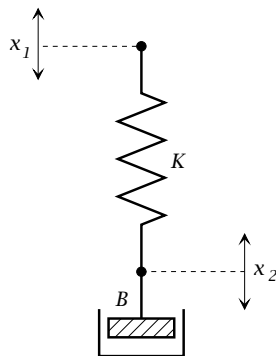
2. Zpožďující člen

Jedná se o člen, kde dochází k určitému zpoždění výstupního signálu za signálem vstupním. Přivedeme-li například na vstup zpožďujícího členu sinusový signál, objeví se takový signál i na výstupu, ale fázově opožděn. Rozesnáváme zpožďující členy prvního a druhého řádu.

Na obr. 4.11 jsou znázorněny dva typy zpožďujícího členu prvního řádu, na obr. 4.12 jejich mechanická analogie sestávající z tlumeně kmitající pružiny.



Obr. 4.11: Dva typy elektrického zpožďujícího členu



Obr. 4.12: Mechanický zpožďující člen

První obvod na obr. 4.11 je popsán následujícími rovnicemi

$$u_1 = Ri + \frac{1}{C} \int i \, dt, \quad u_2 = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

a po úpravě

$$u_1 = RC \frac{du_2}{dt} + u_2. \quad (4.4.2.3)$$

Má-li rovnice zpožďujícího členu tvar $K_0 u_1 = T_1 u_2' + u_2$, pak $K_0 = 1$ (konstanta přenosu) a $T = RC$ (časová konstanta). Pro druhý obvod dostaneme podobně

$$u_1 = L \frac{di}{dt} + u_2, \quad i = \frac{u_2}{R}$$

a po úpravě

$$u_1 = \frac{L}{R} \frac{du_2}{dt} + u_2. \quad (4.4.2.4)$$

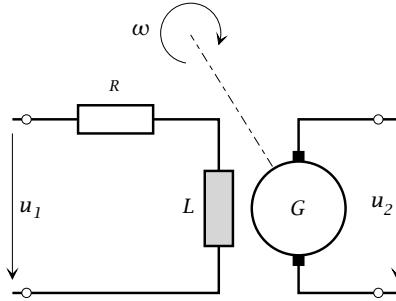
Zde $K_0 = 1$ a $T = \frac{L}{R}$.

Konečně mechanické schéma na obr. 4.12 je popsáno rovnicí

$$\frac{B}{K} \frac{dx_2}{dt} + x_2 = x_1, \quad (T = \frac{B}{K}, \quad K_0 = 1), \quad (4.4.2.5)$$

kde B je činitel tlumení a K je konstanta pružiny.

Typický zpožďující člen prvního řádu je reprezentován např. buzením synchronního alternátoru, (schéma je na obr. 4.13).



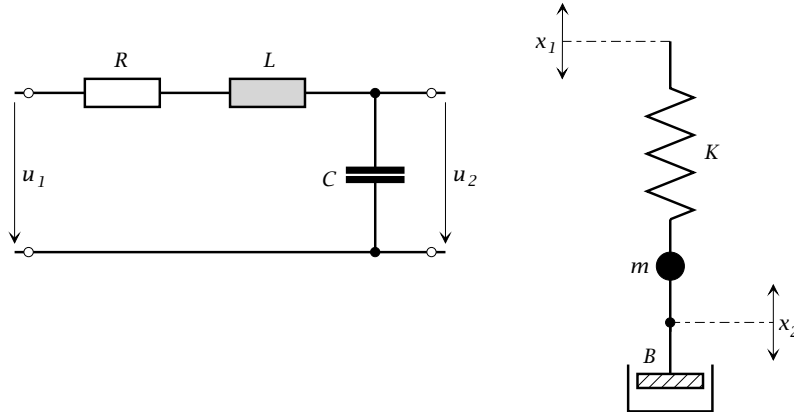
Obr. 4.13: Buzení synchronního alternátoru

Přenosová funkce zpožďujícího členu prvního řádu má tvar

$$F(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{K_0}{1 + pT}, \quad (4.4.2.6)$$

kde $X_1(p)$ a $X_2(p)$ jsou obrazy vstupu a výstupu.

Zpožďující člen druhého řádu lze pojmout jako dva v sérii zapojené členy prvního řádu. Odpovídající elektrické a ekvivalentní mechanické schéma je na obr. 4.14.



Obr. 4.14: Elektrický a mechanický zpožďující člen druhého řádu

Elektrický obvod je popsán rovnicemi

$$u_1 = Ri + L \frac{di}{dt} + u_2, \quad i = C \frac{du_2}{dt}.$$

Ty vedou na relaci mezi u_1 a u_2 ve tvaru

$$u_1 = LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2, \quad (4.4.2.7)$$

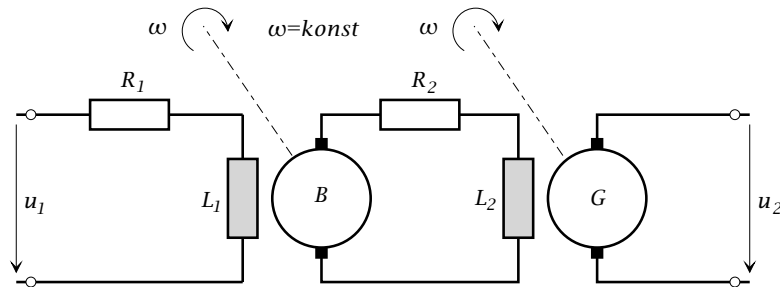
kteou lze formálně přepsat do tvaru

$$K_0 u_1 = T_2^2 u_2'' + T_1 u_2' + u_2,$$

přičemž $K_0 = 1$, $T_1 = RC$ a $T_2 = \sqrt{LC}$. Přenosová funkce je v tomto případě dána vztahem

$$F(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{K_0}{1 + pT_1 + p^2 T_2^2}. \quad (4.4.2.8)$$

Typický zpožďující člen druhého řádu je reprezentován např. buzením synchronního alternátoru z budiče s cizím buzením (schéma na obr. 4.15).



Obr. 4.15: Buzení alternátoru z budiče s cizím buzením

Podobně existují zpožďující členy vyšších řádů, integrační členy, členy s dopravním zpožděním atd.