Energetický systém v ustáleném stavu

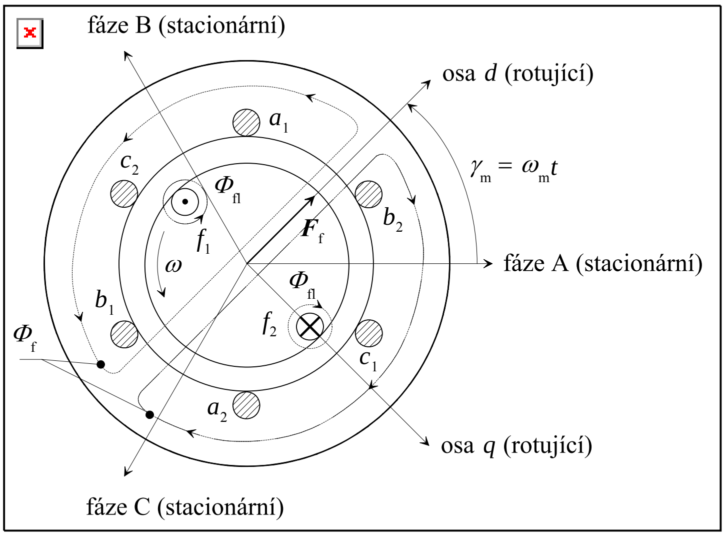
Jedním z charakteristických rysů energetického systému je potřeba spojitě přizpůsobovat jeho provozní podmínky tak, aby v každém okamžiku reagoval na stále se měnící zatížení. Velké systémy jsou charakterizovány tím, že ačkoli dílčí zátěž se může změnit velmi výrazně, celkový výkon distribuovaný sítí a odebíraný na mnoha místech se příliš nemění a jeho časový průběh lze do jisté míry předpovídat. To ale znamená, že v určité krátké časové periodě lze na stav systému pohlížet jako na stav ustálený a s časem tento kvazi-ustálený stav přechází plynule a pomalu do jiného kvazi-ustáleného stavu.

Synchronní stroje

V případě synchronních strojů je nejdůležitější uvědomit si, jak magnetické pole rotoru interaguje s magnetickým polem statoru a jak se vytváří magnetický moment. Jakmile se podaří pochopit mechanismus vzniku momentu a elektromotorické síly v tomto stroji, lze již snadno posoudit jeho roli v elektrizační soustavě jakožto zdroje činného a jalového výkonu.

Stroj s hladkým rotorem

Stroj s hladkým rotorem ve stavu naprázdno je schématicky znázorněn na obr. 2.7. U každé fáze je pro jednoduchost vyjádřen jen jeden střední vodič. Začátek a konec budicího vinutí je označen symboly f_1 a f_2. Začátek a konec vinutí fáze A je označen a_1 a a_2. Podobně je tomu i u fází B a C. Rotor má rotující podélnou osu d (hlavní magnetická osa budicího vinutí) a příčnou osu q. Čárkované čáry vyznačují cesty, jimiž se uzavírá rotující magnetický tok (ten sestává z rozptylového toku Φ_{fl} a hlavního toku Φ_{f}). Konečně $\boldsymbol{F}_{\mathrm{f}}$ označuje magnetomotorickou sílu vyvolanou budicím vinutím. Konečně úhel $\gamma_{\mathrm{m}} = \omega_{\mathrm{m}}t$ označuje okamžitou pozici podélné rotorové osy d vůči referenční ose (zde fázi A), kde ω_{m} je mechanická rychlost rotoru.



Obr. 2.7: Schéma synchronního stroje s hladkým rotorem ve stavu naprázdno

U dvojpólového stroje jedna mechanická otáčka odpovídá jedné periodě elektrických a magnetických veličin. Pokud má však generátor p pólů, pak jedna mechanická otáčka odpovídá $p/2$ elektrickým periodám. Pro elektrický úhel γ_{e} tedy platí, že $\gamma_{\mathrm{e}} = \gamma_{\mathrm{m}} \cdot p/2$ a pro úhlovou rychlost rotoru v elektrických radiánech $\omega_{\mathrm{e}} = \omega_{\mathrm{m}} \cdot p/2$.

Rovnice synchronního generátoru budou odvozeny pro dvojpólový stroj, pro nějž mohou být vynechány indexy *m* a *e* u úhlu i u úhlové rychlosti (pro vyšší počet pólů je lze snadno upravit tak, že všechny úhly a rychlosti budou vyjádřeny v elektrických jednotkách). Současně budou zanedbány všechny případné vyšší harmonické magnetomotorické síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{f}$.

Synchronní stroj naprázdno

Rotující tok vybuzený proudem v rotorovém vinutí vytváří magnetomotorickou sílu, která je podle obvodu statoru rozložena přibližně sinusově. Její nejvyšší hodnota orientována ve směru osy d (viz obr. 2.7) $F_\mathrm{f} = N_\mathrm{f} \cdot i_\mathrm{f}$, kde N_f je efektivní počet závitů rotorového vinutí na pól (je dán součinem skutečných závitů N_F rotorového vinutí a činitele vinutí rotoru). Tento počet je menší než skutečný počet závitů N_F v důsledku respektování skutečné geometrie vinutí a trapezoidálního průběhu rozložení magnetomotorické síly ve vzduchové mezeře. Magnetomotorická síla F_f vyvolává magnetický tok Φ_f protékající magnetickým obvodem, jenž má velikost

$$\Phi_\mathrm{f} = \frac{F_\mathrm{f}}{R_\mathrm{m}} = \frac{N_\mathrm{f} \cdot i_\mathrm{f}}{R_\mathrm{m}}, \tag{2.19}$$

kde R_m je reluktance příslušné cesty. Vzhledem k tomu, že reluktance železa je zanedbatelná, je možno hodnotu R_m položit rovnou reluktanci vzduchové mezery. Magnetická indukce je po vnitřním obvodu statoru rozložena podobně jako magnetomotorická síla přibližně sinusově a její maximum je tam, kde je maximum magnetomotorické síly, tedy v ose *d*. Budicí tok vyvolává tok spřažený s každým ze statorových vinutí. Tok zabírající s vinutím každé fáze o *N* závitech dosahuje svého maxima v okamžiku, kdy rotující osa *d* je totožná s její magnetickou osou. Lze tedy psát

$$\Psi_\mathrm{fA}(t) = \Psi_\mathrm{fa} \cdot \cos\omega t = N_\Phi \cdot \phi_\mathrm{f} \cdot \cos\omega t = \frac{N_\Phi \cdot N_\mathrm{f} \cdot i_\mathrm{f}}{R_\mathrm{m}} \cdot \cos\omega t = M \cdot i_\mathrm{f} \cdot \cos\omega t, \tag{2.20}$$

kde *M* označuje amplitudu vzájemné indukčnosti mezi vinutím rotoru a statoru (obecně je funkcí sycení) a N_Φ se opět určí jako součin počtu závitů *N* a součinitele vinutí statoru. Obdobně lze odvodit

$$\Psi_\mathrm{fB}(t) = M \cdot i_\mathrm{f} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad \Psi_\mathrm{fC}(t) = M \cdot i_\mathrm{f} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right). \tag{2.21}$$

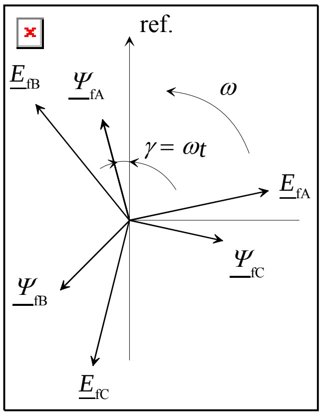
Uvedené toky indukují vnitřní napětí ve vinutí fáze A podle vztahu

$$e_\mathrm{fA} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_\mathrm{fA}(t)}{\mathrm{d}t} = \omega \cdot M \cdot i_\mathrm{f} \cdot \sin\omega t, \tag{2.22}$$

a podobně je tomu ve fázi B a C. Tato napětí se nazývají napětí naprázdno. Použijeme-li fázorové symboliky (předpokládáme, že se jedná o harmonické veličiny), lze psát

$$\underline{E}_\mathrm{fA} = -\mathrm{j} \cdot \omega \cdot \underline{\Psi}_\mathrm{fA} \tag{2.23}$$

a podobně pro další fáze. Situace je znázorněna na obr. 2.8.



Obr. 2.8: Rotující fázory spřažených toků a indukovaných napětí

Vliv reakce kotvy

Předpokládejme nyní, že statorovým vinutím protékají fázově posunuté proudy o stejné amplitudě I_{m} (zátěž je symetrická). Je tedy (viz obr. 2.7)

$$i_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{m}} \cdot \sin\left(\omega t\text{-}\lambda\right), \quad i_{\mathrm{B}} = I_{\mathrm{m}} \cdot \sin\left(\omega t\text{-}\lambda - \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{m}} \cdot \sin\left(\omega t\text{-}\lambda + \frac{2\pi}{3}\right). \qquad (2.24)$$

Tyto proudy vytvářejí pulsující magnetomotorické síly o velikostech

$$F_{\mathrm{A}} = N_{\mathrm{e}} \cdot i_{\mathrm{A}}, \quad F_{\mathrm{B}} = N_{\mathrm{e}} \cdot i_{\mathrm{B}}, \quad F_{\mathrm{C}} = N_{\mathrm{e}} \cdot i_{\mathrm{C}}, \qquad (2.25)$$

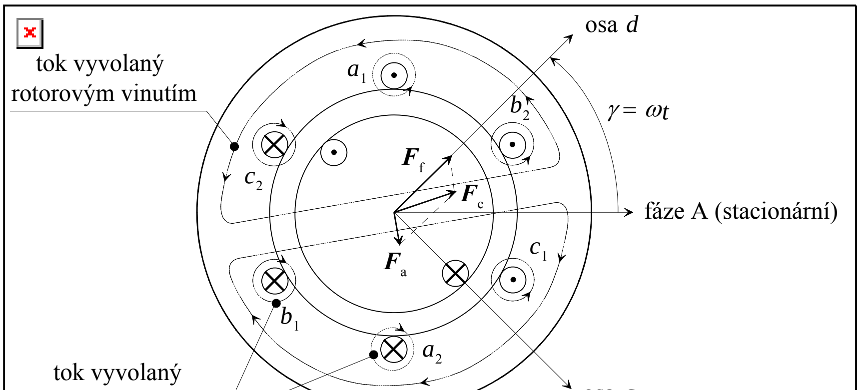
kde $N_{\mathrm{e}} = N_{\Phi} \cdot k_{\mathrm{ws}}$ a $k_{\mathrm{ws}} = 4/(\pi p)$. Všechny tři magnetomotorické síly jsou posunuty jak v prostoru, tak i v čase. Proto je s nimi výhodné zacházet jako s prostorovými fázory orientovanými ve směru os jednotlivých fází. Celková magnetomotorická síla $\underline{F}_{\mathrm{a}}$ vyvolaná proudy statoru se pak určí jako

$$\underline{F}_{\mathrm{a}} = \underline{F}_{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0} + \underline{F}_{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{2\pi}{3}} + \underline{F}_{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{e}^{\text{-}\mathrm{j}\cdot\frac{2\pi}{3}} = 1.5 N_{\mathrm{e}} \cdot I_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \lambda)}. \qquad (2.26)$$

Je zřejmé, že se jedná o rotující fázor, jehož modul je konstantní a jenž rotuje úhlovou rychlostí ω při posunu λ. Dále je zřejmé, že fázory magnetomotorické síly rotoru $\underline{F}_{\mathrm{f}}$ a magnetomotorické síly statoru $\underline{F}_{\mathrm{a}}$ jsou vůči sobě ve stálé poloze. Přitom typicky platí, že $\pi/2 < \gamma < \pi$, kde g vlastně označuje úhel mezi $\underline{F}_{\mathrm{a}}$ a $\underline{F}_{\mathrm{f}}$. Výsledná magnetomotorická síla, jež dává tok Φ_{c} ve vzduchové mezeře, je tedy popsána fázorem

$$\underline{F}_{\mathrm{c}} = \underline{F}_{\mathrm{f}} + \underline{F}_{\mathrm{a}}, \qquad (2.27)$$

viz obr. 2.9.



Obr. 2.9: Poměry v zatíženém synchronním stroji

Tok ve vzduchové mezeře má své maximum ve směru $\underline{F}_c$. Je vidět, že magnetomotorická síla kotvy $\underline{F}_a$ demagnetuje generátor a výsledná magnetomotorická síla $\underline{F}_c$ je menší, než magnetomotorická síla buzení $\underline{F}_f$.

Poněvadž obě magnetomotorické síly jsou podél vzduchové mezery rozloženy sinusově, je výsledná magnetomotorická síla $\underline{F}_c$ mezi sousedními póly rovněž rozložena sinusově a právě tak magnetická indukce. Ve skutečnosti je však obvodová křivka magnetické indukce plošší vlivem sycení statoru a obsahuje tudíž zpravidla třetí harmonickou o určité velikosti. Pokud se ovšem vinutí statoru zapojí do trojúhelníka nebo do neuzemněné hvězdy, tato třetí harmonická zde vycirkuluje a na svorkách generátoru se neobjeví.

Náhradní obvod a fázorový diagram

Z rovnice (2.27) a z obr. 2.9 plyne, že průmět fázoru magnetomotorické síly do fáze A má velikost

$$F_{\mathrm{cA}}(t) = F_{\mathrm{f}} \cdot \cos \omega t + F_{\mathrm{a}} \cdot \cos(\omega t - \lambda) \tag{2.28}$$

a podobné vztahy bychom obdrželi pro F_{cB} a F_{cC}. Podobně, jako v případě vyšetřování poměrů při chodu naprázdno získáme magnetický tok spřažený s vinutím A statoru ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{cA}}(t) &= N_{\Phi} \cdot \frac{F_{\mathrm{cA}}}{R_{\mathrm{m}}} = \frac{N_{\Phi}}{R_{\mathrm{m}}}\left(N_{\mathrm{f}} \cdot i_{\mathrm{f}} \cdot \cos \omega t + 1.5\, N_{\mathrm{e}} \cdot I_{\mathrm{m}} \cdot \cos(\omega t - \lambda)\right) = \\ &= M \cdot i_{\mathrm{f}} \cdot \cos \omega t + L_{\mathrm{a}} \cdot I_{\mathrm{m}} \cdot \cos(\omega t - \lambda), \end{aligned} \tag{2.29}$$

kde $L_a = 1.5 \cdot N_{\Phi} \cdot N_e / R_m$ označuje indukčnost reakce kotvy. Elektromotorická síla na svorkách stroje je pak

$$e_{\mathrm{cA}} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{cA}}(t)}{\mathrm{d}t} = \omega \cdot M \cdot i_{\mathrm{f}} \cdot \sin \omega t + \omega \cdot L_{\mathrm{a}} \cdot I_{\mathrm{m}} \cdot \sin(\omega t - \lambda) = e_{\mathrm{fA}} + e_{\mathrm{aA}}, \tag{2.30}$$

kde e_{aA} je složka indukovaná v důsledku statorového toku, zpožděná za příslušným proudem o úhel $\pi/2$.

Uvažme nyní fázorový zápis příslušných rovnic při uvažování efektivních hodnot veličin. Vyjdeme z upraveného vztahu (2.29)

$$\underline{\psi}_{\mathrm{cA}} = M \cdot \underline{i}_{\mathrm{f}} + L_{\mathrm{a}} \cdot \underline{I}, \tag{2.31}$$

a odtud (ve shodě s (2.30))

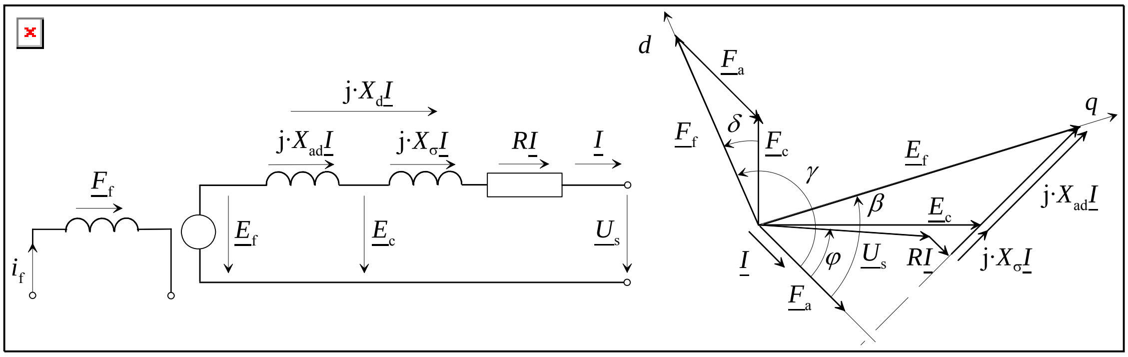
$$\underline{E}_{\mathrm{cA}} = -\frac{\mathrm{d}\underline{\Psi}_{\mathrm{cA}}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{j} \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{i}_{\mathrm{f}} - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot L_{\mathrm{a}} \cdot \underline{I} = \underline{E}_{\mathrm{fA}} - \mathrm{j} \cdot X_{\mathrm{ad}} \cdot \underline{I}, \tag{2.32}$$

kde X_{ad} je magnetizační reaktance.

Obr. 3.10 znázorňuje náhradní schéma a fázorový diagram synchronního stroje při zahrnutí různých elektrických a magnetických nedokonalostí synchronního stroje (tedy při zahrnutí resistance R, která však bývá velmi malá a často ji lze zanedbat a dále s respektováním rozptylového toku, jenž neprochází přes vzduchovou mezeru a lze jej vyjádřit rozptylovou reaktancí X_σ). Rovnice (2.32) po příslušné úpravě má tvar

$$\underline{U}_{\mathrm{s}} = \underline{E}_{\mathrm{fA}} - R \cdot \underline{I} - \mathrm{j} \cdot X_{\mathrm{ad}} \cdot \underline{I} - \mathrm{j} \cdot X_{\sigma} \cdot \underline{I} = \underline{E}_{\mathrm{fA}} - R \cdot \underline{I} - \mathrm{j} \cdot X_{\mathrm{d}} \cdot \underline{I}, \tag{2.33}$$

kde $\underline{U}_s$ je svorkové napětí stroje a veličina $X_{ad} + X_\sigma$ se označuje X_d a nazývá synchronní reaktance. Konečně φ označuje úhel mezi proudem a napětím.



Obr. 2.10: Náhradní schéma a fázorový diagram synchronního stroje

Fázorový diagram se zpravidla konstruuje ze známého napětí na svorkách generátoru U_s a činného a jalového výkonu na fázi. Pak (reaktance a rezistance se předpokládají známé)

$$I = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{U_s}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{Q}{P}. \tag{2.34}$$

Tvorba momentu

Rotor synchronního generátoru je poháněn primárním zařízením (např. turbínou), které dodává moment M_m. Aby však byla rychlost rotoru konstantní, musí synchronní stroj vyvinout stejný moment opačného smyslu M_e. Tento moment lze určit z činného výkonu přenášeného přes vzduchovou mezeru, jehož velikost je

$$P_v = 3E_f \cdot I \cdot \cos\beta, \tag{2.35}$$

kde cos β (viz obr. 2.10) se nazývá vnitřní účiník stroje. Zanedbáme-li mechanické ztráty, musí být tento výkon roven mechanickému výkonu na hřídeli, tedy $P_m = M_m \cdot \omega_m$, kde ω_m je mechanická úhlová rychlost. Mechanický moment se tedy musí rovnat

$$M_m = \frac{3E_f \cdot I \cdot \cos\beta}{\omega_m} = \frac{p}{2\omega} \cdot 3E_f \cdot I \cdot \cos\beta \tag{2.36}$$

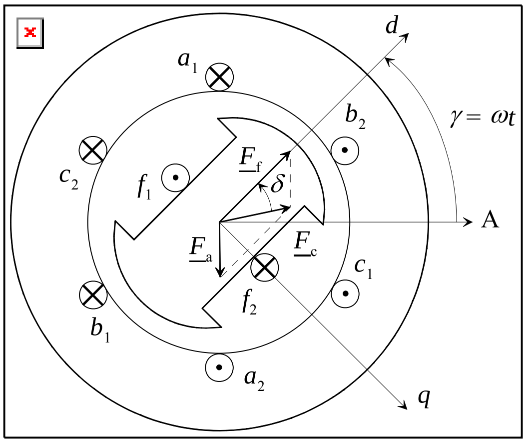
a dalšími úpravami vycházejícími z obr. 2.10 vychází

$$M_m = \frac{\pi p^2}{8} \cdot F_c \cdot \Phi_f \cdot \sin\delta, \tag{2.37}$$

kde úhlu δ se říká momentový úhel. Je zřejmé, že předbíhá-li pole rotoru pole ve vzduchové mezeře a $\delta > 0$ (obr. 2.10), pracuje stroj jako generátor. V opačném případě pracuje jako motor.

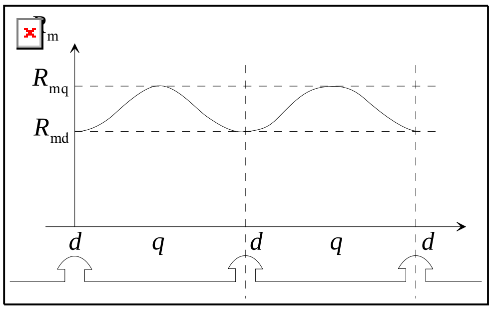
Stroje s vyniklými póly

Jedná se zpravidla o pomaluběžné generátory o mnoha pólech, v nichž nepůsobí tak vysoké odstředivé síly. Pro jednoduchost však bude odvození potřebných vztahů provedeno pro dvojpólový stroj, jehož základní uspořádání plyne z obr. 2.11.



Obr. 2.11: Základní schéma dvojpólového stroje s vyniklými póly

Hlavním problémem modelování tohoto uspořádání je výrazně proměnná šířka vzduchové mezery. Nejužší je v ose *d*, nejširší v ode *q*. Proto se mění i její reluktance od minima R_{md} do maxima R_{mq}, jak je naznačeno na obr. 2.12.



Obr. 2.12: Změna reluktance podél vzduchové mezery

Proto zde, na rozdíl od stroje s hladkým rotorem, už neplatí, že poloha maxima magnetomotorické síly je stejná, jako poloha maxima magnetické indukce (což znamená, že příslušné veličiny nejsou ve fázi). Poněvadž magnetický tok se uzavírá cestou s co nejmenší reluktancí, bývá zde poloha maxima magnetické indukce posunuta k ose *d*. Poloha zmíněných maxim je proto stejná jen v případě, kdy výsledný vektor magnetomotorické síly spadá do osy *d* nebo *q*. Aby bylo možno tento problém překonat, navrhl Blondel teorii, jež pracuje odděleně s magnetickými veličinami v ose *d* a *q*. Fázor magnetomotorické síly statoru i statorového proudu se rozloží podle obr. 2. 13.

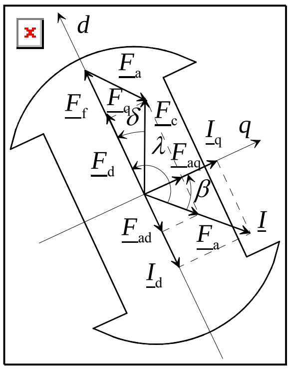


Fig. 2.13: K rozložení magnetomotorických sil do os *d* a *q*

Výsledná magnetomotorická síla se zde určí jako $\underline{F}_{\mathrm{c}} = \underline{F}_{\mathrm{d}} + \underline{F}_{\mathrm{q}}$, a dále $\underline{F}_{\mathrm{d}} = \underline{F}_{\mathrm{f}} + \underline{F}_{\mathrm{ad}}$, $\underline{F}_{\mathrm{q}} = \underline{F}_{\mathrm{aq}}$. Poněvadž buzení je prakticky vždy v ose *d*, závisí vnitřní indukovaná elektromotorická síla

$\underline{E}_f$ jen na reluktanci R_{md} v ose d a je pro daný budicí proud konstantní. Je-li fázor magnetomotorické síly a toku v ose d, je fázor elektromotorické síly $\underline{E}_f$ posunut o úhel $-\pi/2$ a leží tedy v ose q. Elektromotorická síla v důsledku existence $\underline{F}_{ad}$ je úměrná $\underline{I}_d$, je rovněž zpožděna o úhel $-\pi/2$, leží také v ose q a platí pro ni vztah

$$\underline{E}_{ad} = -\mathrm{j} \cdot X_{ad} \cdot \underline{I}_d , \tag{2.38}$$

kde X_{ad} je reaktance statoru v ose d, jež je nepřímo úměrná hodnotě R_{md}. Elektromotorická síla v důsledku existence $\underline{F}_{aq}$ je úměrná $\underline{I}_q$, je rovněž zpožděna o úhel $-\pi/2$, leží v ose d a platí pro ni vztah

$$\underline{E}_{aq} = -\mathrm{j} \cdot X_{aq} \cdot \underline{I}_q , \tag{2.39}$$

kde X_{aq} je reaktance statoru v ose q, jež je nepřímo úměrná hodnotě R_{mq}. Výsledná elektromotorická síla $\underline{E}_c$ vzduchové mezery je pak

$$\underline{E}_c = \underline{E}_f + \underline{E}_{ad} + \underline{E}_{aq} = \underline{E}_f - \mathrm{j} \cdot X_{ad} \cdot \underline{I}_d - \mathrm{j} \cdot X_{aq} \cdot \underline{I}_q . \tag{2.40}$$

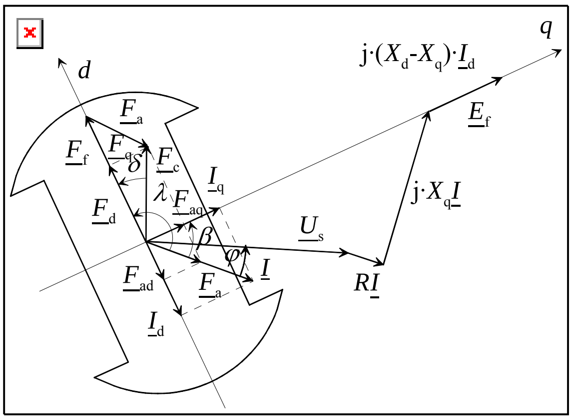
Chceme-li určit svorkové napětí $\underline{U}_s$, musíme ještě odečíst úbytek na rezistanci a rozptylové reaktanci

$$\underline{U}_s = \underline{E}_f - \mathrm{j} \cdot X_{ad} \cdot \underline{I}_d - \mathrm{j} \cdot X_{aq} \cdot \underline{I}_q - \mathrm{j} \cdot X_\sigma \cdot \underline{I} - R \cdot \underline{I}, \quad \underline{I} = \underline{I}_d + \underline{I}_q \tag{2.41}$$

a po úpravě

$$\underline{U}_s = \underline{E}_f - \mathrm{j} \cdot X_d \cdot \underline{I}_d - \mathrm{j} \cdot X_q \cdot \underline{I}_q - R \cdot \underline{I} . \tag{2.42}$$

Veličina $X_d = X_{ad} + X_\sigma$ se nazývá synchronní reaktance v ose d a $X_q = X_{aq} + X_\sigma$ se nazývá synchronní reaktance v ose q. Vždy platí, že $X_d > X_q$.



Obr. 2.14: Úplný fázorový diagram synchronního stroje s vyniklými póly

Chceme-li sestrojit úplný fázorový diagram včetně elektromotorických sil a napětí, vyjdeme z upravené rovnice (2.42)

$$\underline{E}_f = \underline{U}_s + \left(R + \mathrm{j} \cdot X_q\right) \cdot \underline{I} + \mathrm{j} \cdot \left(X_d - X_q\right) \cdot \underline{I}_d = \underline{E}_q + \mathrm{j} \cdot \left(X_d - X_q\right) \cdot \underline{I}_d , \tag{2.43}$$

přičemž poslední člen je orientován do osy q. Poněvadž $\underline{E}_f$ rovněž leží v ose q, musí i $\underline{E}_q$ ležet v ose q. Při vytváření fázorového diagramu se samozřejmě začíná od fázorů $\underline{U}_s$ a $\underline{I}$.

Sestrojíme-li osu q, osa d ji obvykle předbíhá. Tento úzus je založen na tom, že proud v d-ose má zpravidla demagnetizační účinky a v případě generátoru jej lze pokládat za záporný. Řada autorů však užívá konvence opačné.

Moment stroje s vyniklými póly

Princip vzniku momentu je stejný jako v případě stroje s hladkým rotorem. Vztahy jsou zde však poněkud jiné v důsledku existence složek magnetomotorické síly v osách d a q (obr. 2.13), pro něž platí:

$$F_{ad} = F_a \cdot \cos\alpha, \quad F_{aq} = F_a \cdot \sin\alpha . \tag{2.44}$$

Složka magnetomotorické síly F_{aq} v ose q spolu s tokem Φ_f vyvolaným budicím vinutím vyvolá složku momentu

$$M_q = \frac{\pi p^2}{8} \cdot F_{aq} \cdot \Phi_f , \tag{2.45}$$

neboť oba fázory jsou na sebe kolmé. Na druhé straně existuje v ose d složka toku Φ_{ad} vyvolaná statorovým vinutím a ta rovněž zabírá s magnetomotorickou silou F_{aq}. Vzniká zde proto další složka momentu (jedná se o aditivní veličinu)

$$M_{qd} = \frac{\pi p^2}{8} \cdot F_{aq} \cdot \Phi_{ad} . \tag{2.46}$$

Konečně musíme uvažovat i složku magnetomotorické síly F_{ad} v ose d, jež vytváří moment v součinnosti se složkou statorového toku Φ_{aq}. Zde je však v případě generátoru úhel mezi oběma veličinami roven $-\pi/2$, takže

$$M_{dq} = -\frac{\pi p^2}{8} \cdot F_{ad} \cdot \Phi_{aq} . \tag{2.47}$$

Výsledný moment má tedy velikost

$$M_m = M_q + M_{qd} - M_{dq} = \frac{\pi p^2}{8} \left[\left(\Phi_f + \Phi_{ad} \right) \cdot F_{aq} - \Phi_{aq} \cdot F_{ad} \right] . \tag{2.48}$$

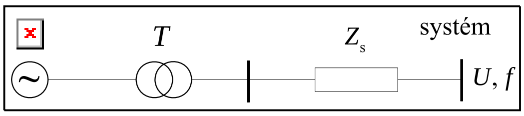
Převedeme-li (2.48) na výraz obsahující F_c, Φ_f a reluktance v obou osách, můžeme psát

$$M_m = \frac{\pi p^2}{8} \cdot \frac{R_d}{R_q} \cdot F_c \cdot \Phi_f \cdot \sin \delta + \frac{\pi p^2}{16} \cdot \frac{R_q - R_d}{R_q \cdot R_d} \cdot F_c^2 \cdot \sin 2\delta , \tag{2.49}$$

přičemž první výraz představuje tzv. synchronní moment a druhý výraz moment reluktanční, daný rozdílem reluktancí v osách d a q a tím, že magnetomotorická síla a tok ve vzduchové mezeře nejsou ve fázi. Tento druhý moment obecně existuje i při nulovém buzení.

Zahrnutí ekvivalentní impedance sítě

Synchronní generátor málokdy napájí osamělou zátěž; zpravidla daleko častěji je připojen k rozsáhlejšímu energetickému systému sestávajícího z mnoha zdrojů, zátěží a přenosové sítě. Analýza chování vybraného generátoru v složité síti je ovšem komplikovaná. Jednodušší (a přesto dosti přesnou) představu o jeho chování lze získat tak, že skutečnou soustavu nahradíme zdrojem neomezeného výkonu, pracujícím do přípojnice charakterizované stálým napětím a kmitočtem. Tato přípojnice je beze změny parametrů schopna pojmout i činný a jalový výkon dodávaný vyšetřovaným generátorem, jenž do ní pracuje přes blokový transformátor T a určitou impedanci sítě Z_s podle obr. 2.15.



Obr. 2.15: Schéma generátoru pracujícího do soustavy neomezeného výkonu

Označíme-li nyní rezistanci transformátoru R_T a jeho reaktanci X_T a dále rezistanci soustavy R_s a její reaktanci X_s, a označíme-li

$$R_1 = R + R_T + R_s, \quad X_1 = X_d + X_T + X_s, \quad X_2 = X_q + X_T + X_s, \tag{2.50}$$

můžeme v souladu (2.42) psát

$$\underline{E}_f = \underline{U} + R_1 \cdot \underline{I} + j \cdot X_1 \cdot \underline{I}_d + j \cdot X_2 \cdot \underline{I}_q , \tag{2.51}$$

což po rozkladu do os d a q (fázor $\underline{E}_f$ leží v ose q) dává

$$\begin{aligned} E_\mathrm{d} &= 0 = U_\mathrm{d} + R_1 \cdot I_\mathrm{d} + X_2 \cdot I_\mathrm{q} \\ E_\mathrm{q} &= E_\mathrm{q} = U_\mathrm{q} + R_1 \cdot I_\mathrm{q} - X_1 \cdot I_\mathrm{d} \end{aligned}; \tag{2.52}$$

tuto rovnici lze zapsat i maticově. Přitom

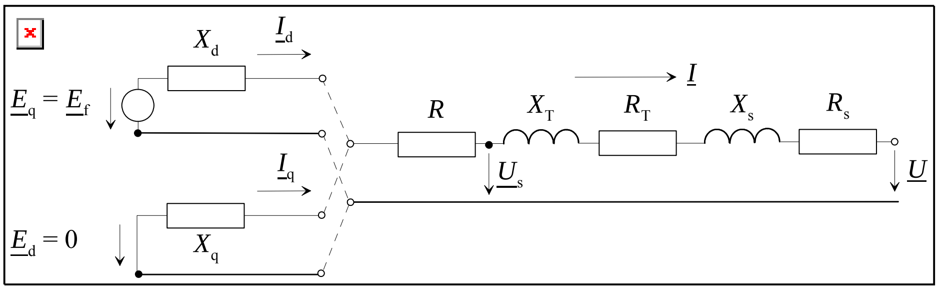
$$U_\mathrm{d} = -U \cdot \sin\delta,\quad U_\mathrm{q} = U \cdot \cos\delta,\quad I_\mathrm{d} = -I \cdot \sin\beta,\quad I_\mathrm{q} = I \cdot \cos\beta,\quad \beta = \delta + \varphi. \tag{2.53}$$

Z rovnic (2.52) lze snadno určit obě složky proudu I_d a I_q za předpokladu, že je známo E_q, U_d a U_q.

Z rovnic (2.50) a (2.51) lze ještě snadno odvodit tvar náhradního obvodu stroje s vyniklými póly v soustavě podle obr. 2.15. Nejprve upravme (2.51) do tvaru

$$\underline{E}_\mathrm{q} - \mathrm{j} \cdot X_\mathrm{q} \cdot \underline{I}_\mathrm{q} + \underline{E}_\mathrm{d} - \mathrm{j} \cdot X_\mathrm{d} \cdot \underline{I}_\mathrm{d} = \left(R_1 + \mathrm{j} \cdot \left(X_\mathrm{T} + X_\mathrm{s}\right)\right) \cdot \underline{I} + \underline{U} \tag{2.54}$$

(přičemž $\underline{E}_\mathrm{d} = 0$). Této rovnici zřejmě odpovídá schéma na obr. 2.16.



Obr. 2.16: Náhradní schéma generátoru s vyniklými póly

Činný a jalový výkon dodávaný do soustavy

Činný výkon dodaný jednou fází generátoru do soustavy určíme pomocí napětí E_f, napětí soustavy U a úhlu δ mezi nimi. Postupnými úpravami obdržíme

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = U \cdot I \cdot \cos\left(\beta - \delta\right) = U_\mathrm{q} \cdot I_\mathrm{q} + U_\mathrm{d} \cdot I_\mathrm{d} \tag{2.55}$$

a po dosazení za I_d a I_q z (2.52) a dalších jednoduchých úpravách bude

$$P = \frac{E_\mathrm{f} \cdot U \cdot X_1}{Z^2} \cdot \sin\delta + \frac{U^2 \cdot \left(X_\mathrm{d} - X_\mathrm{q}\right)}{2Z^2} \cdot \sin 2\delta + \frac{E_\mathrm{f} \cdot U \cdot R_1}{Z^2} \cdot \cos\delta - \frac{U^2 \cdot R_1}{Z^2}, \tag{2.56}$$

kde $Z^2 = R_1^2 + X_1 \cdot X_2$. Druhý člen v (2.56) označuje reluktanční výkon odpovídající reluktanční složce momentu v (2.49). Poněvadž hodnota $X_\mathrm{d} - X_\mathrm{q}$ bývá o mnoho menší než Z^2, může být tento člen (zejména v případě generátorů připojených k síti dlouhým vedením) bez větší chyby zanedbán. Další zjednodušení lze získat zanedbáním činných odporů obsažených v R_1.

Jalový výkon dodávaný do sítě získáme postupnými úpravami vztahu

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = U \cdot I \cdot \sin\left(\beta - \delta\right) = -U_\mathrm{q} \cdot I_\mathrm{d} + U_\mathrm{d} \cdot I_\mathrm{q}, \tag{2.57}$$

což po dosazení za I_d a I_q z (2.52) vede k výsledku

$$Q = \frac{E_\mathrm{f} \cdot U \cdot \left(X_2 \cdot \cos\delta - R_1 \cdot \sin\delta\right)}{Z^2} - \frac{U^2 \cdot \left(X_1 \cdot \sin^2\delta + X_2 \cdot \cos^2\delta\right)}{Z^2}. \tag{2.58}$$

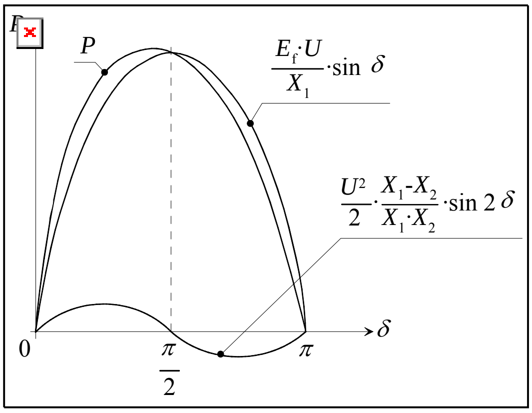
Výraz lze opět zjednodušit v případě stroje s hladkým rotorem či zanedbáním rezistance R_1.

Jalový výkon dodávaný generátorem je kladný, je-li první člen větší než druhý. Toho lze dosáhnout tehdy, nabude-li vnitřní indukované napětí E_f dostatečně velké hodnoty. Pak hovoříme o přebuzení stroje. V opačném případě, kdy stroj ze soustavy jalový výkon odebírá, se hovoří o odbuzení. Poněvadž zátěž ve velké míře představují indukční motory, které samy jalový výkon odebírají, pracuje většina generátorů v přebuzeném stavu. Dostatečně velká hodnota E_f je však důležitá i z hlediska stability systému, jak bude vysvětleno později.

Fázorový diagram synchronního stroje se změní v každém okamžiku, kdy se změní zátěž. Způsob změny ovšem závisí na tom, zda se změní buzení stroje v důsledku akce vyvolané automatickým regulátorem napětí či nikoli. Jestliže je tento regulátor v činnosti, snaží se udržet napětí na svorkách zdroje na určité požadované hodnotě změnou buzení. Pokud v činnosti není, zůstává buzení (a tedy E_f) konstantní a změna zátěže vyvolá změnu svorkového napětí U_s a úhlu δ. Napětí soustavy U však zůstane rovněž konstantní. Je-li zanedbatelná velikost rezistancí v obvodu, platí podle (2.56) rovnice

$$P = \frac{E_f \cdot U}{X_1} \cdot \sin\delta + \frac{U^2 \cdot \left(X_d - X_q\right)}{2X_1 \cdot X_2} \cdot \sin 2\delta. \tag{2.59}$$

Výkon dodávaný do soustavy je v takovém případě pouze funkcí úhlu δ. Tato závislost plyne z obr. 2.17.

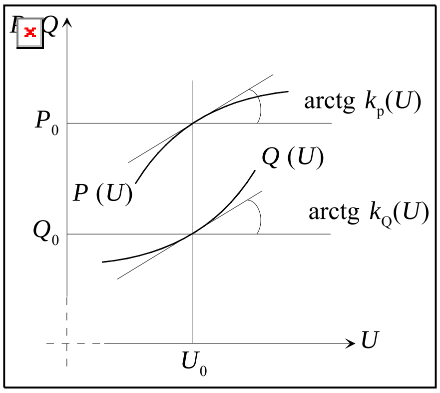


Obr. 2.17: Závislost $P = P(\delta)$

Vybrané typy zátěží

Zátěží budeme v tomto textu rozumět tu část systému, která není explicitně zahrnuta do jeho modelu, ale která představuje spotřebič energie. Situace ve většině energetických systémů je zpravidla taková, že jejich zdrojová a přenosová část sestává např. ze stovek až tisíců prvků, zatímco část spotřebitelská z desítek až set tisíců spotřebičů. Distribuční rozvody proto nelze modelovat v celé jejich rozmanitosti, ale příslušná část systému se modeluje pomocí ekvivalentních zátěží. Ekvivalentní zátěž samozřejmě nemusí modelovat pouze zátěž jako takovou, ale i rozvody na hladinách nízkých a středních napětí a dokonce i menší lokální zdroje. Modelování takové zátěže proto není nijak jednoduché a je proto i v současné době předmětem intenzivního výzkumu. V dalších odstavcích bude nyní věnována pozornost modelování statickému.

V ustáleném stavu jsou dány parametry zátěže napětím U a kmitočtem f. Závislosti $P = P(U,f)$ a $Q = Q(U,f)$ se nazývají statické charakteristiky zátěže. Závislosti $P = P(U)$ a $Q = Q(U)$ při konstantním kmitočtu se nazývají napěťové charakteristiky, závislosti $P = P(f)$ a $Q = Q(f)$ při konstantním napětí se nazývají kmitočtové charakteristiky. Sklon těchto charakteristik se nazývá napěťová nebo kmitočtová citlivost zátěže (obr. 2.18). Tyto citlivosti se zpravidla vyjadřují v poměrných hodnotách



Obr. 2.18: K definici napěťové citlivosti zátěže

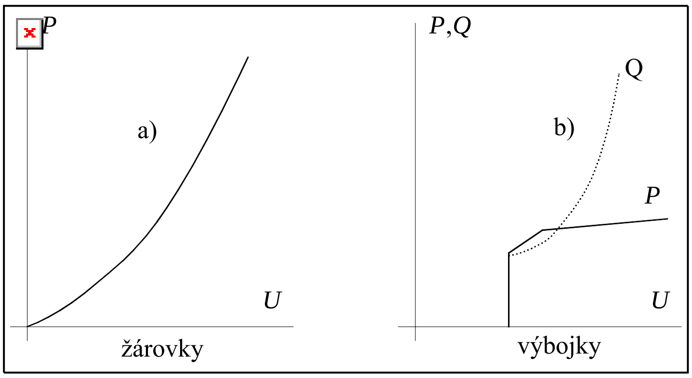
Tak například v pracovním bodě P_0, U_0 a f_0 lze určit

$$k_{\mathrm{P}_0}\left(U_0\right)=\frac{\Delta P}{P_0}\cdot\frac{U_0}{\Delta U},\quad k_{\mathrm{P}_0}\left(f_0\right)=\frac{\Delta P}{P_0}\cdot\frac{f_0}{\Delta f}. \tag{2.60}$$

Podobně lze určit příslušné koeficienty pro jalové výkony. V dalším se soustředíme na charakteristiky jednotlivých typů zátěží.

Osvětlování a vytápění

Na pokrytí osvětlování a vytápění se spotřebovává asi 1/3 vyrobené elektrické energie. Tradiční žárovky vyžadují dodávku pouze činného výkonu, jenž je navíc nezávislý na kmitočtu (obr. 2.19a). Jejich impedance však závisí na teplotě a ta na přiloženém napětí. Výkon fluorescentních světelných zdrojů a výbojek silně závisí na napětí. Při 60–85 % jmenovitého napětí výboj uhasne a obnoví se asi po jedné až dvou vteřinách, kdy napětí opět překročí potřebnou zhášecí hodnotu. Nad touto hodnotou závisí činný a jalový výkon silně na napětí (obr. 2.19b).

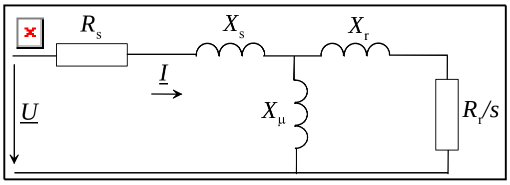


Obr. 2.19: Výkonové charakteristiky svítidel

Pokud se jedná o topidla, jejich rezistance se předpokládá konstantní. Jsou-li vybavena termostaty, ty zajistí stálou teplotu a výkon i při změně napětí. Takovou zátěž lze pak nejlépe modelovat konstantním odebíraným výkonem.

Indukční motory

Až 2/3 elektrické energie se spotřebovává pro pohon motorů, z nichž 90 % je asynchronních. Základní náhradní schéma asynchronního motoru se všemi veličinami přepočtenými na stator je na obr. 2.20.



Obr. 2.20: Základní náhradní schéma indukčního motoru

Na obrázku R_s označuje rezistanci statoru, X_s jeho rozptylovou reaktanci, X_μ magnetizační reaktanci, R_r přepočtenou rezistanci rotoru, X_r přepočtenou reaktanci rotoru a s skluz.

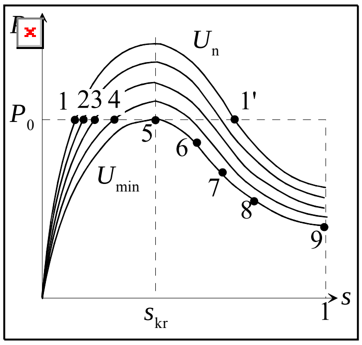
Poněvadž rezistance statoru R_s je malá a $X_\mu >> X_s$, lze proud rotorem vyjádřit přibližným vztahem

$$I = \frac{U}{\sqrt{\left(X_r + X_s\right)^2 + \frac{R_r^2}{s^2}}} \tag{2.61}$$

a spotřebovaný činný výkon (elektrický) má pak velikost

$$P_e = \frac{R_r}{s} \cdot I^2 = \frac{U^2 \cdot R_r \cdot s}{\left(X_r + X_s\right)^2 \cdot s^2 + R_r^2} . \tag{2.62}$$

Obr. 2.21 znázorňuje závislost $P_e = P_e(s)$ pro různá napětí U.



Obr. 2.21: Závislost $P = P(s)$ pro různá napětí U

Z derivace (2.62) lze určit kritický skluz s_{kr}, při němž je tento výkon největší; tento skluz je roven $R_r/(X_r + X_s)$. Motor pracuje stabilně v levé části diagramu $s < s_{kr}$. Předpokládejme nejprve, že motor pracuje v pravé části diagramu v bodě 1', v němž se elektrický výkon P_e rovná mechanickému výkonu P_m daný hodnotou P_0. Při jakémkoli zvýšení rychlosti a poklesu skluzu se zvýší elektrický výkon P_e, zatímco mechanický zůstane přibližně stejný. Přebytek elektrického výkonu motor dále urychluje. Kdyby se naopak rychlost snížila a zvětšoval by se skluz, snižoval by se i elektrický výkon, skluz by narůstal, až by se motor při $s = 1$ zastavil. Naopak, o bodu 1 v levé části charakteristiky stejnou úvahou zjistíme, že je stabilní.

Mechanickou zátěž lze rozdělit na zátěž s lehkým a těžkým rozběhem. Zátěž s lehkým rozběhem se vyznačuje tím, že záběrný moment je nulový, kdežto záběrný moment v případě těžkého rozběhu je nenulový.Uvažujme nejprve takovou zátěž, jejíž mechanický moment M_m je konstantní. Pak

$$P_m = M_m \cdot \omega = M_m \cdot \omega_s \cdot \left(1 - s\right) = P_0 \cdot \left(1 - s\right) . \tag{2.63}$$

Dále musí elektrický výkon hradit ztráty na rezistanci R_r o velikosti $R_r \cdot I_2$. Po dosazení za proud z (2.61) a porovnáním s rovnicí (2.62) pro elektrický výkon dostáváme

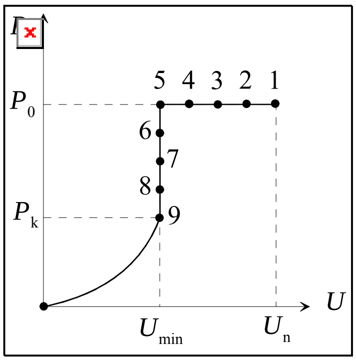
$$P_e = \frac{U^2 \cdot R_r \cdot s}{\left(X_r + X_s\right)^2 \cdot s^2 + R_r^2} = P_0 \cdot \left(1 - s\right) + \frac{U^2 \cdot R_r \cdot s^2}{\left(X_r + X_s\right)^2 \cdot s^2 + R_r^2} , \tag{2.64}$$

odkud lze spočítat pracovní skluz (za předpokladu, že $U \geq U_{\min} = \sqrt{2P_0 \cdot X}$). Pro takto vypočtený skluz lze navíc jednoduše ukázat, že první člen v rovnici (2.64) je roven P_0 a třetí $P_0 \cdot s$. Přitom z (2.63) plyne, že velikost P_0 není závislá ani na napětí, ani na kmitočtu.

Předpokládejme nyní, že motor pracuje s elektrickým výkonem P_e při jmenovitém napětí U_n v bodě 1 (obr. 2.21). Při poklesu napětí až do bodu 5 (pro napětí $U_{\min}$) zůstává P_e nezměněn, ale skluz se zvětšuje až na kritickou hodnotu s_{kr}. Další snižování napětí vede k nárůstu skluzu při napětí $U_{\min}$ až do bodu 9, v němž s = 1. Pak se motor dostane do chodu nakrátko, kde výkon P_e klesá podle vztahu (2.62), kde s = 1, takže

$$P_e = \frac{U^2 \cdot R_r}{\left(X_r + X_s\right)^2 + R_r^2}. \tag{2.65}$$

Výsledná charakteristika $P_e = P_e(U)$ je znázorněna na obr. 2.22.



Obr. 2.22: Závislost činného elektrického výkonu indukčního motoru na napětí

Pokud se jedná o odebíraný jalový výkon, sestává ze dvou složek spotřebovávaných ve dvou paralelních větvích schématu na obr. 2.20.

$$Q_\mu = \frac{U^2}{X_\mu}, \qquad Q_x = \left(X_r + X_s\right) \cdot I^2. \tag{2.66}$$

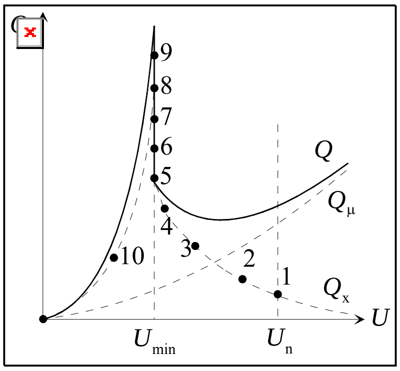
Druhý člen lze snadno převést na výraz

$$Q_x = \frac{U^2}{2\left(X_r + X_s\right)} - \sqrt{\left[\frac{U^2}{2\left(X_r + X_s\right)}\right]^2 - P_0^2}. \tag{2.67}$$

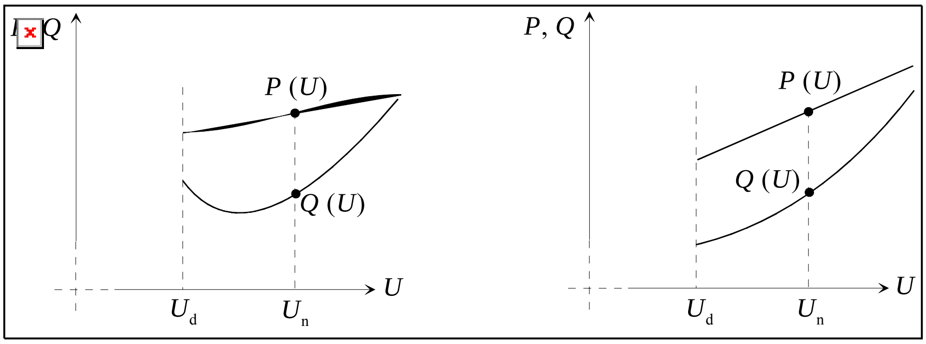
Výsledná charakteristika $Q = Q_\mu + Q_x = Q(U)$ je zakreslena na obr. 2.23. Body 1 až 10 znovu odpovídají bodům na obr. 2.21. Hodnota minimálního napětí $U_{\min}$, při němž lze motor ještě provozovat, závisí do značné míry na typu zátěže. Pro motory s těžkým rozběhem s velkou zátěží bývá toto napětí jen o něco nižší než U_n, zatímco u zátěží s lehkým startem a málo zatížené bývá podstatně nižší.

Ve průmyslové praxi bývají motory chráněny napěťovou ochranou vypínající motor tehdy, jestliže jeho napětí poklesne pod povolenou míru U_d. Ta se pohybuje v rozmezí cca 30 až 70 % jmenovitého napětí. Tento jev lze modelovat tak, že odebíraný činný i jalový výkon jsou až do hodnoty rovny nule, jak je naznačeno v obr. 2.24.

Motor pracující při nižším napětím může být vypnut i nadproudovou ochranou (při poklesu napětí může vzrůst proud nad povolenou hodnotu), avšak toto vypnutí je charakterizováno určitou časovou konstantou.



Obr. 2.23: Závislost jalového výkonu indukčního motoru na napětí

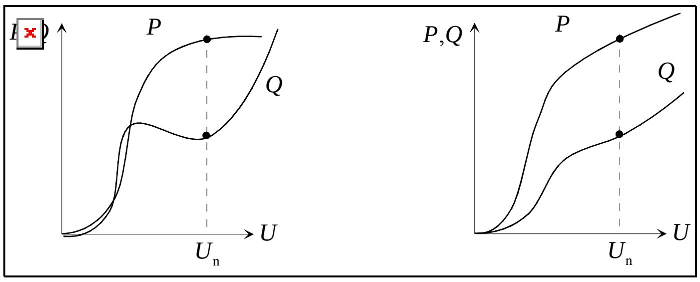


Obr. 2.24: Závislost činného a jalového výkonu indukčního motoru na napětí za přítomnosti napěťové ochrany (v levé části těžký rozběh, v pravé lehký rozběh)

Motory v průmyslových závodech jsou zpravidla dobře dimenzovány a pracují s plným výkonem a často s těžkým rozběhem. Těm odpovídá levá charakteristika na obr. 2.24. Na druhé straně, motory pracující v domácnostech a v neprůmyslové sféře bývají předimenzovány a pracují s 60 až 70 % jmenovitého výkonu. Jejich charakteristiky jsou pak blízké pravé části téhož obrázku.

Statické charakteristiky zátěží

Celkové charakteristiky skupiny zátěží se získají superpozicí charakteristik jednotlivých zátěží (obr. 2.25).



Obr. 2.25: Typické výkonové charakteristiky skupiny zátěží (vlevo těžké rozběhy a výbojková svítidla v průmyslovém závodě, vpravo skupina lehkých zátěží a žárovkových svítidel v domácnostech)

V levé části jsou oba pracovní body na plošší části charakteristiky. Se snižujícím se napětím se činný výkon začíná zmenšovat, kdežto jalový výkon se nejprve příliš nemění, ale pak může růst v oblasti menších napětí, při nichž však ještě mohou motory pracovat. Poté, co napětí klesne pod asi 70 % U_n činný i jalový výkon výrazně poklesne v důsledku vypínání motorů. Podobně je tomu v pravé části, kde však vypínací napětí U_d leží nad minimálním povoleným napětím U_{min}, takže zde nedochází k nárůstu jalového výkonu.

Na závěr je třeba dodat, že uvedené charakteristiky se mohou lišit i podle toho, zda se na zátěž díváme z primární či sekundární strany napájecího transformátoru (z pohledu primární strany je třeba uvažovat i činné a jalové ztráty tohoto transformátoru). Sekundární strana distribučních transformátorů bývá navíc zpravidla vybavena odbočkami, které způsobují skokový nárůst či pokles činného a jalového výkonu se změnou napětí.

Matematické modelování zátěže

Nejběžnější modely zátěže předpokládají:

- konstantní výkon,
- konstantní proud,
- konstantní impedanci.

V případě konstantního výkonu je citlivost činného i jalového výkonu na napětí nulová (vztahy (2.60)). Této koncepce lze sice využít pro řešení ustálených stavů s malými změnami napětí, avšak v případě velkých změn napětí (např. během přechodných jevů) je nedostatečná. Koncepce konstantního proudu poskytuje lineární vzrůst výkonu s napětím, přičemž příslušná citlivost je jednotková. Tato koncepce je v zásadě vyhovující pro modelování odporové a indukční zátěže. Pokud zátěž modelujeme konstantní impedancí, mění se výkon s kvadrátem napětí a příslušná citlivost je rovna dvěma. Této koncepce lze využít v určitých případech modelování osvětlení.

Ukazuje se, že výhodnější je zátěž modelovat s využitím všech tří koncepcí podle vztahů

$$P = P_0 \cdot \left[a_1 \cdot \left(\frac{U}{U_0} \right)^2 + a_2 \cdot \left(\frac{U}{U_0} \right) + a_3 \right],$$
$$Q = Q_0 \cdot \left[b_1 \cdot \left(\frac{U}{U_0} \right)^2 + b_2 \cdot \left(\frac{U}{U_0} \right) + b_3 \right], \qquad (2.68)$$

kde veličiny s indexem 0 označují výchozí stav.

Pokud o zátěži chybí informace, činný výkon se modeluje podle koncepce konstantního proudu a jalový podle koncepce konstantní impedance.

Existují i složitější modely, podle nichž se zátěž modeluje exponenciálně, podle vztahů

$$P = P_0 \cdot \left(\frac{U}{U_0} \right)^{n_\mathrm{P}}, \quad Q = Q_0 \cdot \left(\frac{U}{U_0} \right)^{n_\mathrm{Q}}, \qquad (2.70)$$

kde n_P a n_Q jsou příslušné exponenty vhodné pro modelování uvažované zátěže. Žádný z těchto modelů však není schopen postihnout situaci, k níž dochází při poklesu napětí pod 70 % U_n a odepínání motorů. To lze ošetřit použitím polynomiální či exponenciální aproximace pro napětí blízká hodnotě U_n a modelu s konstantní impedancí pro napětí v oblasti 30 až 70 % U_n. Tvar těchto křivek plyne z obr. 2.26.

Závislost zmíněných modelů na kmitočtu lze modelovat funkcemi

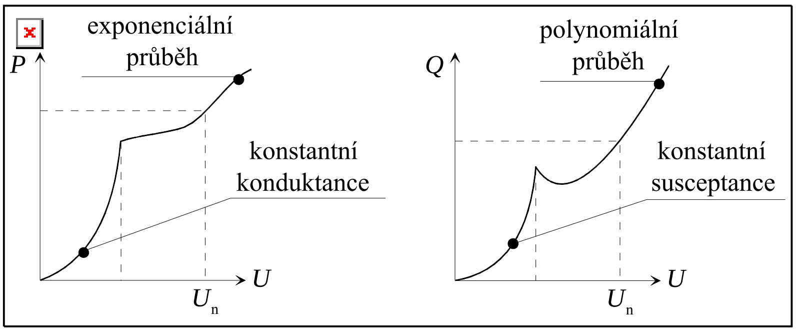
$$P(U, f) = P(U) \cdot \left[1 + k_\mathrm{Pf} \cdot (f - f_0) \right],$$
$$Q(U, f) = Q(U) \cdot \left[1 + k_\mathrm{Qf} \cdot (f - f_0) \right], \qquad (2.71)$$

kde k_Pf a k_Qf jsou příslušné citlivostní součinitele na kmitočet.

Velikostí součinitelů citlivosti činného a jalového výkonu na kmitočtu se zabývala celá řada autorů a v současné době existují různá doporučení. Tak například IEEE uvádí hodnoty podle následující tabulky:

Tabulka součinitelů citlivosti činného a jalového výkonu:

zátěž	$\cos\varphi$	k_{PU}	k_{QU}	k_{Pf}	k_{Qf}
obytná zástavba	0.87–0.99	0.9–1.7	2.4–3.1	0.7–1.0	-1.3–-2.3
komerční sféra	0.85–0.9	0.5–0.8	2.4–2.5	1.2–1.7	-0.9–-1.6
průmyslová sféra	0.8–0.9	0.1–1.8	0.6–2.2	-0.3–2.9	0.6–1.8



Obr. 2.26: Přesnější náhrada výkon-napěťových charakteristik

Základní síťové rovnice

Všechny typy sítí lze modelovat pomocí Π článků. Tyto modely tvoří základ pro modelování celé sítě pomocí rovnic pro jednotlivé uzly sítě. Soustavu rovnic lze obecně zapsat v maticovém tvaru

$$[\underline{\boldsymbol{I}}]=[\underline{\boldsymbol{Y}}]\cdot[\underline{\boldsymbol{U}}],\text{čili}\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \vdots\\ \underline{I}_i\\ \vdots\\ \underline{I}_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{Y}_{11} & \cdots & \underline{Y}_{1i} & \cdots & \underline{Y}_{1N}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \underline{Y}_{i1} & \cdots & \underline{Y}_{ii} & \cdots & \underline{Y}_{iN}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \underline{Y}_{N1} & \cdots & \underline{Y}_{Ni} & \cdots & \underline{Y}_{NN}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \vdots\\ \underline{U}_i\\ \vdots\\ \underline{U}_N\end{bmatrix}, \qquad (2.72)$$

kde $\underline{U}_i$ udává fázor napětí v uzlu i, $\underline{I}_i$ udává fázor proudu vstupujícího do uzlu i, $\underline{Y}_{ij}$ $(i \neq j)$ záporně vzatou admitanci mezi uzly i a j a $\underline{Y}_{ii}$ součet všech admitancí vycházejících z uzlu i (včetně případné admitance k zemi). Symbol N označuje počet všech uzlů. Matice $[\underline{\boldsymbol{Y}}]$ se nazývá uzlová admitanční matice. Součet všech prvků v libovolném řádku dává případnou admitanci příslušného uzlu k zemi. Pokud žádný uzel v soustavě není takto propojen, je matice singulární a její determinant je nulový. V opačném případě determinant existuje a soustava má řešení ve tvaru

$$[\underline{\boldsymbol{U}}]=[\underline{\boldsymbol{Z}}]\cdot[\underline{\boldsymbol{I}}], \qquad (2.73)$$

kde $[\underline{\boldsymbol{Z}}]$ se nazývá uzlová impedanční matice. Matice $[\underline{\boldsymbol{Y}}]$ je zpravidla řídká. Je-li v systému L větví, má matice $N + 2L$ nenulových prvků (z toho N prvků v hlavní diagonále a po L prvcích v horní i dolní trojúhelníkové matici).

Nyní se musíme propracovat ke vztahu mezi výkony a napětími v jednotlivých uzlech. Pro kterýkoli uzel soustavy lze podle (2.72) psát

$$\underline{I}_i=\underline{Y}_{ii}\cdot\underline{U}_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\underline{Y}_{ij}\cdot\underline{U}_j\,, \qquad (2.74)$$

a po rozepsání admitancí a uzlových napětí do tvaru

$$\underline{Y}_{ij}=Y_{ij}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\theta_{ij}},\;\; \underline{U}_i=U_i\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\delta_i} \qquad (2.75)$$

dostaneme pro výkon přivedený do i-tého uzlu vztah

$$\underline{S}_i = P_i + \mathrm{j} \cdot Q_i = \underline{U}_i \cdot \underline{I}_i^* = U_i \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \delta_i} \left[Y_{ii} \cdot U_i \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot (\delta_i + \theta_{ii})} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} Y_{ij} \cdot U_j \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot (\delta_j + \theta_{ij})} \right]. \tag{2.76}$$

Odtud již snadno vychází

$$\begin{aligned} P_i &= U_i^2 \cdot Y_{ii} \cdot \cos\theta_{ii} + U_i \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} Y_{ij} \cdot U_j \cdot \cos\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}\right), \\ Q_i &= -U_i^2 \cdot Y_{ii} \cdot \sin\theta_{ii} + U_i \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} Y_{ij} \cdot U_j \cdot \sin\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}\right). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Systém rovnic (2.77) lze ovšem zapsat i pomocí složek napětí a admitancí do reálné a imaginární osy a často se rovněž užívá zápis, v němž napětí jsou vyjádřena pomocí (2.75) a admitance pomocí vztahu $\underline{Y}_{ij} = \underline{G}_{ij} + \mathrm{j} \cdot \underline{B}_{ij}$. Cílem je v každém případě z daných výkonových poměrů v jednotlivých uzlech sítě určovat příslušná uzlová napětí nebo naopak.

Rovnice typu (2.77) jsou ovšem nelineární, což může při řešení působit jisté potíže. Jednou z možností je tyto rovnice linearizovat v okolí zvoleného pracovního bodu. Linearizace se provádí pomocí Taylorova rozvoje, v němž se uvažuje člen pouze prvního řádu. Rovnice pro změny veličin pak mají tvar

$$\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{P} \\ \Delta\boldsymbol{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{K} & \boldsymbol{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{U} \\ \Delta\boldsymbol{\delta} \end{bmatrix}, \tag{2.78}$$

kde $\Delta\boldsymbol{P}$ je vektor přírůstků činných výkonů, $\Delta\boldsymbol{Q}$ přírůstků jalových výkonů, $\Delta\boldsymbol{U}$ přírůstků modulů napětí a $\Delta\boldsymbol{\delta}$ přírůstků úhlů. Prvky podmatic $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{K}$ jsou dány vztahy

$$M_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial U_j}, \quad H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_j}, \quad K_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_j}, \quad N_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j}. \tag{2.79}$$

Někdy je zapotřebí veličiny v komplexní rovině převést do os d a q, pro něž byly sestaveny generátorové rovnice. Je-li osa q generátoru posunuta vůči reálné ose komplexní roviny o úhel δ, je libovolný vektor $\boldsymbol{z}_{\mathrm{ri}}$ v komplexní rovině svázán s vektorem $\boldsymbol{z}_{\mathrm{dq}}$ v osách d a q vztahem

$$\boldsymbol{z}_{ri} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{z}_{dq}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -\sin\delta & \cos\delta \\ \cos\delta & \sin\delta \end{bmatrix}, \tag{2.80}$$

přičemž $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{1}$ (matice je unitární). Na tomto místě je třeba si uvědomit, že každý generátor může vůči síti pracovat s jiným úhlem δ a tedy s různě natočenými systémy os d a q.

Problémy ustáleného chodu

Řešení rovnic (2.77) nebo (2.78) poskytuje informaci o stavu sítě při daných podmínkách odběru energie. Napětí a jejich fázové posuvy jsou stavové či nezávislé proměnné, s jejichž pomocí jsme schopni určit všechny ostatní systémové veličiny (toky činných a jalových výkonů, proudů, úbytky napětí, ztráty výkonu atd.). Na počátku analýzy musíme mít k dispozici všechna vstupní data pro sestavení admitanční matice. Výroba a zátěž bývá popsána velikostí dodávaných a odebíraných činných a jalových výkonů spíše než proudů. Generátorové uzly se specifikují jinak než uzly odběrové. Zatímco v případě uzlů odběrových lze predikovat činný i jalový výkon, v případě generátorových uzlů se využije jen rovnice pro činný výkon. Poněvadž na svorkách generátorů je známé napětí stačí určit jen jeho natočení. V případě jednoho z generátorů se pokládají za známé jak napětí, tak i jeho úhel (zpravidla nulový), aby soustava byla jednoznačně řešitelná, zatímco činný a jalový výkon se určuje. Někdy se tento generátor ze soustavy vylučuje. Rovnice (2.77) se zpravidla řeší Newton-Raphsonovou metodou.