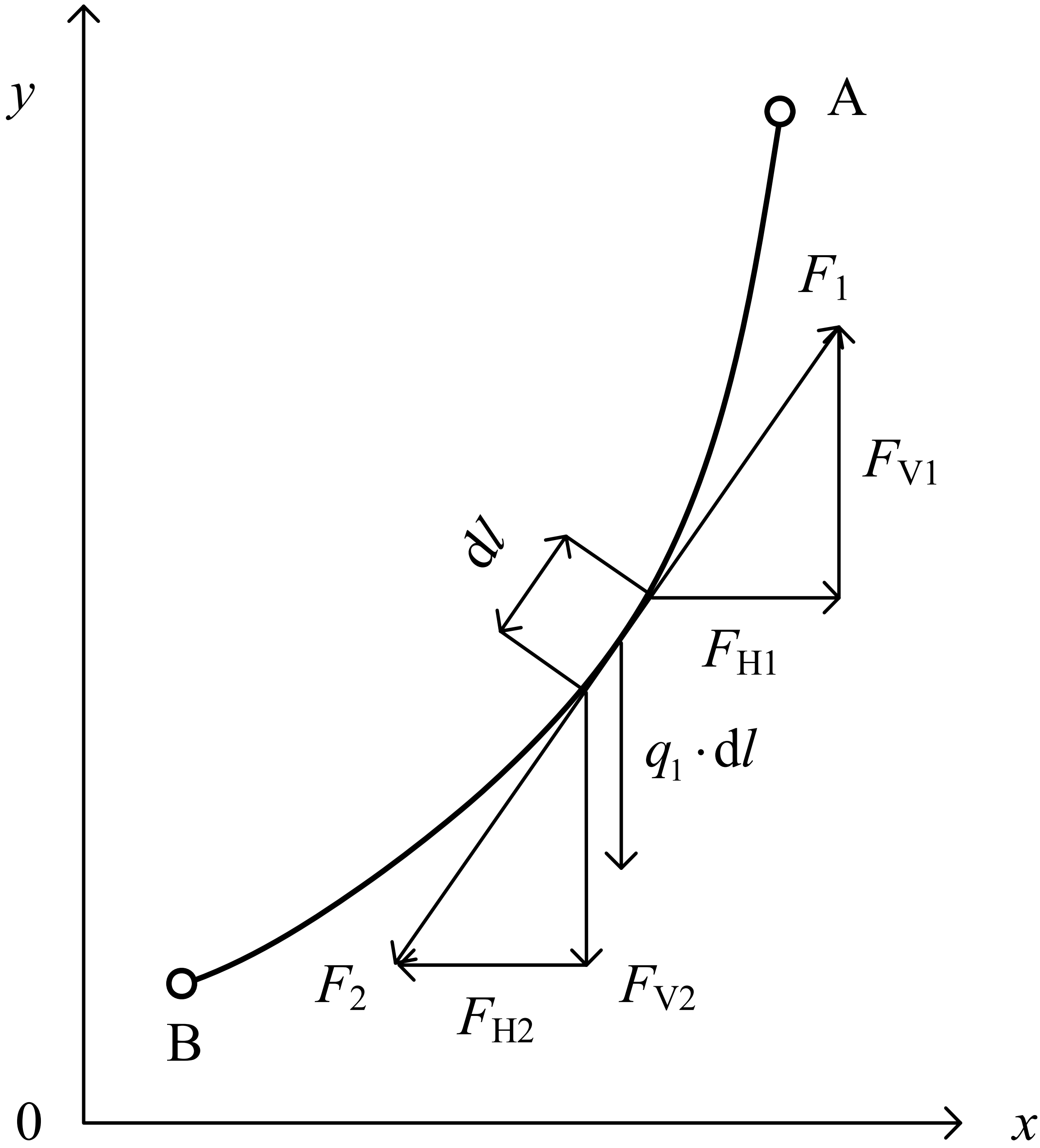
Mechanika zavěšeného vodiče

1. Vodorovné pole

Použité proměnné:

d - průměr vodiče (mm),
S - průřez vodiče (mm^2),
q_1 - tíha 1 m vodiče (N.m^{-1}),
γ - měrná tíha (MPa.m^{-1}),
q_2 - tíha 1 m přídavného zatížení (N.m^{-1}),
z - přetížení vodiče,
σ - namáhání vodiče (MPa),
σ_H - vodorovná složka namáhání (MPa),
σ_V - svislá složka namáhání (MPa),
F - síla (tah) ve vodiči (N),
F_H - vodorovná složka síly (N),
F_V - svislá složka síly (N),
l - délka vodiče (m),
α - rozpětí (m),
f - průhyb vodiče (m),
c - parametr (m),
ϑ - teplota (°C),
α - koeficient tepelné roztažnosti (K^{-1}),
E - modul pružnosti (N.mm^{-2}).

Průhyb vodorovného pole



Obr. 1.1.

Závěsný vodič se zdeformuje do pružné řetězovky. V praxi se však počítá s nepružnou řetězovkou. Při odvození nepružné řetězovky se podle *obr. 1.1* postupuje následovně:
Na element délky vodiče dl působí síly F_1 a F_2 a vlastní tíha vodiče $q_1 \cdot \mathrm{d}l$. Podmínkou pro rovnováhu je, aby se vektorový součet všech sil působících na element délky rovnal nule

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + q_1 \cdot \mathrm{d}l = 0$$

Tato podmínka je splněna za předpokladu, že se rovnají horizontální složky F_{H} a vertikální složka F_{V}

$$F_{\mathrm{H}_1} = F_{\mathrm{H}_2}$$

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{V}} = q_1 \cdot \mathrm{d}l$$

kde

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

po zpětném dosazení

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{V}}}{\mathrm{d}x} = q_1 \cdot \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = q_1 \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}} = q_1 \sqrt{1 + y'^2}$$

Podle *obr. 1.1* platí

$$F_{\mathrm{V}} = F_{\mathrm{H}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{V}}}{\mathrm{d}x} = F_{\mathrm{H}} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = q_1 \sqrt{1 + y'^2}$$

z toho

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{F_{\mathrm{H}}}{q_1} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

Kde

$$\frac{F_{\mathrm{H}}}{q_1} = \frac{F_{\mathrm{H}}}{S} \cdot \frac{S}{q_1} = \frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\gamma}$$

Když zavedeme

$$\frac{F_{\mathrm{H}}}{q_1} = \frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\gamma}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$$

po dosazení dostaneme rovnici

$$\frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\gamma} \cdot \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\gamma}{\sigma_{\mathrm{H}}}\mathrm{d}x$$

integrováním dostaneme tvar

$$\int \frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \int \frac{\gamma}{\sigma_{\mathrm{H}}}\mathrm{d}x$$

$$\arg\sinh\, y' = \frac{\gamma}{\sigma_\mathrm{H}} x + k$$

z toho

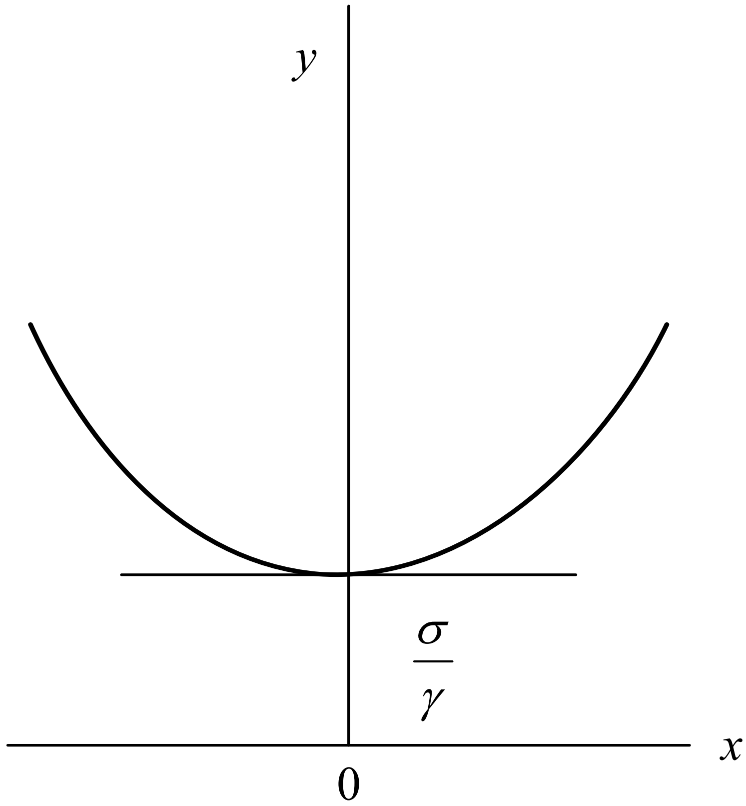
$$y' = \sinh \frac{\gamma}{\sigma_\mathrm{H}} \left(x + k_1 \right)$$

Po integraci této rovnice dostaneme

$$y = \frac{\sigma_\mathrm{H}}{\gamma} \cosh \frac{\gamma}{\sigma_\mathrm{H}} \left(x + k_1 \right) + k_2$$

Konstanty k_1 a k_2 určíme z počátečních podmínek podle obr. 1.2, pro $x = 0$ se $y' = 0$

$$0 = \sinh \frac{\gamma}{\sigma_\mathrm{H}} k_1 \qquad k_1 = 0$$



Obr. 1.2.

Pro konstantu k_2 platí v bodě $x = 0$ a $y = \dfrac{\sigma_H}{\gamma}$

$$\frac{\sigma_H}{\gamma} = \frac{\sigma_H}{\gamma} + k_2 \qquad k_2 = 0$$

Rovnice řetězovky bude mít tedy tvar

$$y = \frac{\sigma_H}{\gamma} \cdot \cosh \frac{x}{\frac{\sigma_H}{\gamma}} \quad (\mathrm{m})$$

označme

$$\frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\gamma} = c$$

po zpětném dosazení dostaneme

$$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c} \quad (\mathrm{m})$$

poté rozepíšeme rovnici do řady

$$y = c \left[1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{c} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{x}{c} \right)^4 + \frac{1}{6!} \left(\frac{x}{c} \right)^6 + ... \right]$$

Pokud uvažujeme i přídavná zatížení

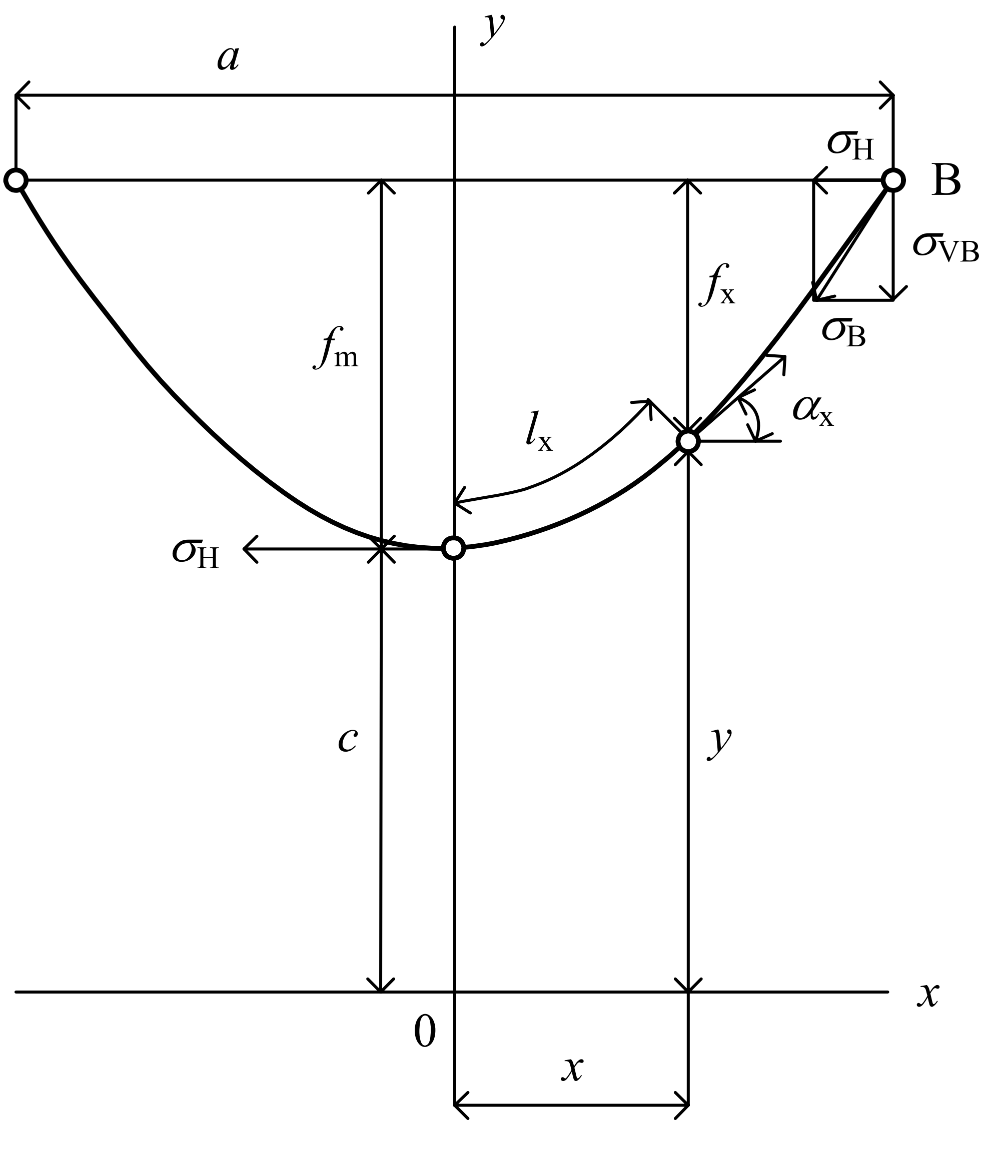
$$c = \frac{F_{\mathrm{H}}}{q_1 + q_2} = \frac{F_{\mathrm{H}} \cdot q_1}{q_1 \left(q_1 + q_2 \right)} = \frac{F_{\mathrm{H}}}{q_1\, z} \cdot \frac{S}{S} = \frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\gamma z} \quad (\mathrm{m})$$

uvažujeme-li jen první dva členy rozepsané řady dostaneme rovnici paraboly, jejíž vrchol je vzdálený od počátku o hodnotu parametru *c*

$$\mathrm{y} = \mathrm{c} + \frac{\mathrm{x}^2}{2\mathrm{c}} = \frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\gamma \mathrm{z}} + \frac{\mathrm{x}^2}{2} \frac{\gamma \mathrm{z}}{\sigma_{\mathrm{H}}}$$

Z *obr. 1.3.* je zřejmé, že maximální průhyb dostaneme, když za x dosadíme poloviční rozpětí $x = \dfrac{a}{2}$

$$f_{\mathrm{m}} = c\cosh\frac{a}{2c} - c = c\left(\cosh\frac{a}{2c} - 1\right)$$



Obr. 1.3. Souměrná řetězovka

průhyb v libovolném bodě

$$f_{\mathrm{k}} = c\cosh\frac{a}{2c} - c\cosh\frac{x}{c} = c\left(\cosh\frac{a}{2c} - \cosh\frac{x}{c}\right)$$

Délka vodorovného pole

$$l_{\mathrm{s}} = 2\int_{0}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + y'^{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$1 + y'^{2} = \cosh^{2}\frac{x}{c}$$

$$l_{\mathrm{s}} = 2\int_{0}^{\frac{a}{2}} \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = 2c\left[\sinh\frac{x}{c}\right]_{0}^{\frac{a}{2}} = 2c\cdot\sinh\frac{a}{2c}$$