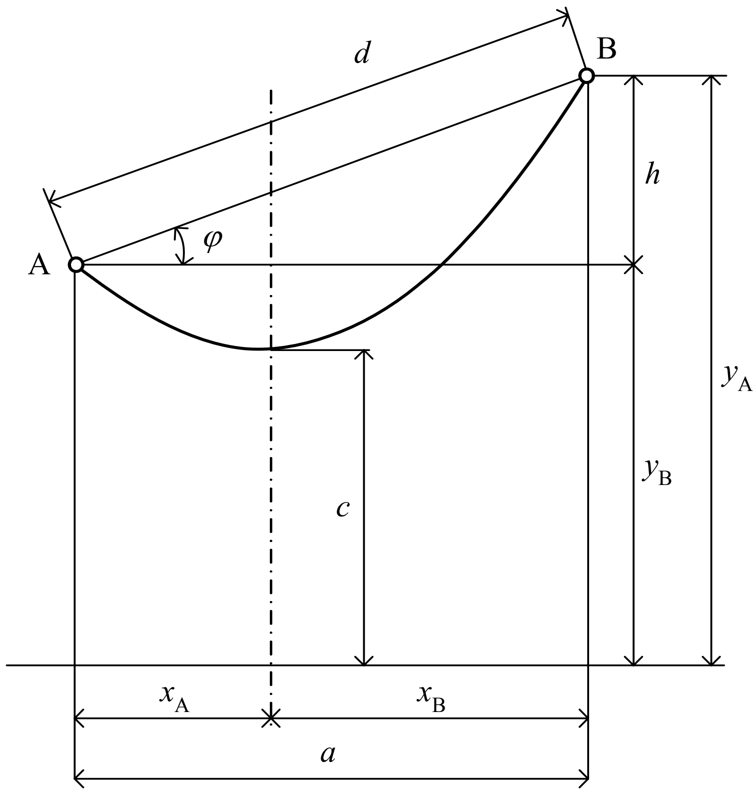
2. Šikmé pole

Určení počátku šikmého pole řetězovky



Obr. 2.1. Souřadnice počátku šikmého pole

Jestliže chceme určit řetězovku, která je zavěšená v bodech A a B a je daná parametrem c, je třeba určit polohu počátku 0 vůči bodům, které mají horizontální vzdálenost *a* a jejich převýšení je *h*. Podle *obr. 2.1* platí

$$h = c\cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c} - c\cosh\frac{x_\mathrm{A}}{c}$$

z toho

$$\frac{h}{c} = \cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c} - \cosh\frac{x_\mathrm{A}}{c}$$

z *obr. 2.1* také vyplývá

$$x_\mathrm{A} = a - x_\mathrm{B}$$

$$\frac{h}{c} = \cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c} - \cosh\frac{a - x_\mathrm{B}}{c}$$

Člen $\cosh\frac{a - x_\mathrm{B}}{c}$ rozepíšeme a dostaneme

$$\frac{h}{c} = \cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c} - \cosh\frac{a}{c}\cdot\cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c} + \sinh\frac{a}{c}\cdot\sinh\frac{x_\mathrm{B}}{c}$$

$$\frac{h}{c} = -\cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c}\left(-1 + \cosh\frac{a}{c}\right) + \sinh\frac{a}{c}\cdot\sinh\frac{x_\mathrm{B}}{c}$$

Dalšími úpravami hyperbolických funkcí vypočítáme hodnotu x_B

$$y_\mathrm{B} = c\cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c}$$

Nyní máme určenu polohu počátku a tím je daná řetězovka s průhybem f_{m}

$$f_{\mathrm{m}} = y_{\mathrm{B}} - c$$

Vrchol řetězovky nemusí být mezi závěsnými body A a B. Jestliže je její vrchol mezi body A a B, platí

$$h < -c + c\cosh\frac{a}{c}$$

pokud

$$h = -c + c\cosh\frac{a}{c}$$

je vrchol právě bod A (nižší závěs). Jestliže je

$$h > -c + c\cosh\frac{a}{c}$$

vrchol řetězovky neleží mezi závěsnými body, ale za závěsným bodem A.

Obvykle však neznáme hodnotu parametru. Na začátku při řešení nesouměrné řetězovky předpokládáme, že tečna v polovině rozpětí je rovnoběžná se spojnicí bodů A a B.

To znamená, že

$$k = \varphi$$

$$y_\mathrm{A} + y_\mathrm{B} = c\left(\cosh\frac{x_\mathrm{A}}{c} + \cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c}\right) = c\left(\cosh\frac{a - x_\mathrm{B}}{c} + \cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c}\right) =$$

$$= c\left[\cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c}\left(1 + \cosh\frac{a}{c}\right) - \sinh\frac{a}{c}\cdot\sinh\frac{x_\mathrm{B}}{c}\right]$$

úpravou dostaneme

$$y_\mathrm{A} + y_\mathrm{B} = c\cdot 2\cosh\frac{a}{c}\left(\cosh\frac{x_\mathrm{B}}{c}\cdot\cosh\frac{a}{2c} - \sinh\frac{x_\mathrm{B}}{c}\cdot\sinh\frac{a}{2c}\right) =$$

$$= c\cdot 2\cosh\frac{a}{2c}\cdot\cosh\left(\frac{x_\mathrm{B}}{c} - \frac{a}{2c}\right) = c\cdot 2\cosh\frac{a}{2c}\cdot\cosh\frac{x_\mathrm{k}}{\mathrm{c}}$$

kde x_k je souřadnice uprostřed rozpětí. Hodnota funkce v bodě se souřadnicí x_k

$$y_\mathrm{k} = c\cos h\frac{x_\mathrm{k}}{c}$$

Určení délky vodiče při šikmém poli

Délka řetězovky mezi závěsnými body A a B

$$l_\mathrm{AB} = \int_{-x_\mathrm{A}}^{0}\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{x_\mathrm{B}}\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

dosadíme za

$$y = c\cosh\frac{x}{c}$$

$$y' = \sinh\frac{x}{c}$$

a dostaneme

$$l_{\mathrm{AB}} = \int_{-x_{\mathrm{A}}}^{0} \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{x_{\mathrm{B}}} \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = c\left(\sinh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c} + \sinh\frac{x_{\mathrm{A}}}{2c}\right) \quad \text{(m)}$$

Použitím předcházejících rovnic dostaneme

$$\left(\frac{l_{\mathrm{AB}}}{c}\right)^2 - \left(\frac{h}{c}\right)^2 = \left(\sinh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c} + \sinh\frac{x_{\mathrm{A}}}{c}\right)^2 - \left(\cosh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c} - \cosh\frac{x_{\mathrm{A}}}{c}\right)^2 =$$

$$= -2 + 2\left(\cosh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c}\cdot\cosh\frac{x_{\mathrm{A}}}{c} + \sinh\frac{x_{\mathrm{B}}}{c}\cdot\sinh\frac{x_{\mathrm{A}}}{c}\right) = 2\cosh\left(\frac{x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}}{c}\right) - 2 =$$

$$= 4\sinh^2\left(\frac{x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}}{2c}\right) = 4\sinh^2\frac{a}{2c}$$

Délka nesouměrné řetězovky je tedy

$$l_{\mathrm{AB}}^2 = h^2 + \left(2c\cdot\sinh\frac{a}{2c}\right)^2$$

protože výraz v závorce je délka souměrné řetězovky, pro nesouměrnou řetězovku platí

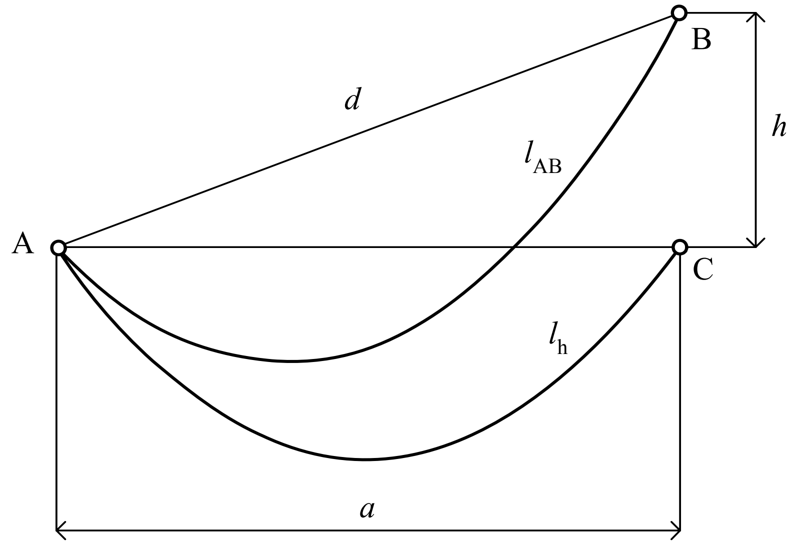
$$l_{\mathrm{AB}}^2 = h^2 + l_{\mathrm{h}}^2$$

z toho

$$l_{\mathrm{AB}}^2 - l_{\mathrm{h}}^2 = h^2$$

Vzorec je rozšířená Pythagorova věta, která platí pro řetězovky a říká (*obr. 2.1*):

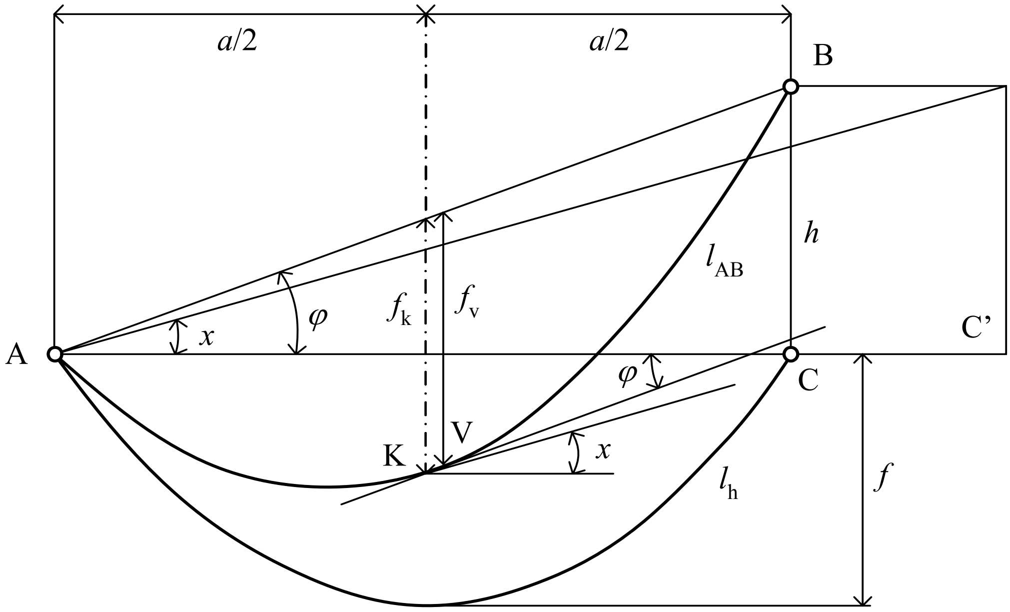
rozdíl čtverců délek souměrné a nesouměrné řetězovky ve stejném rozpětí a se stejným parametrem se rovná čtverci vzdálenosti vyšší podpory od nižší.



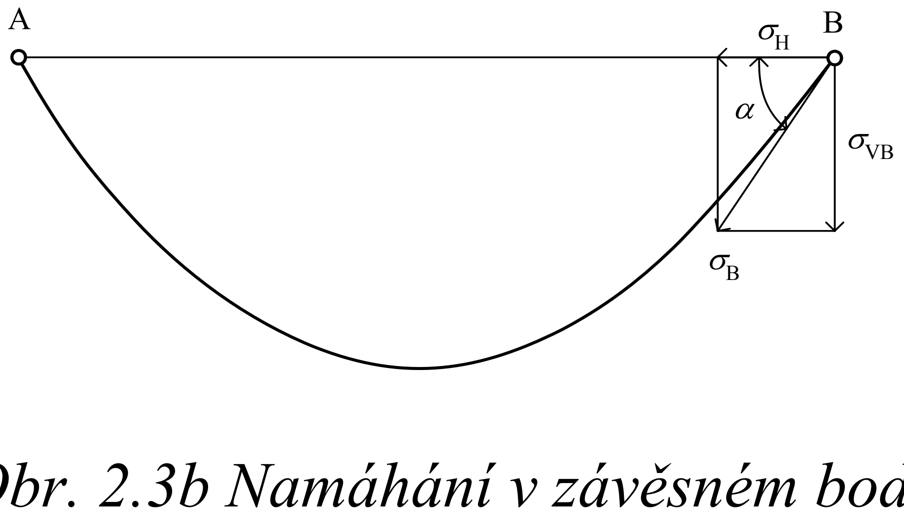
Obr. 2.2. Délka souměrné a nesouměrné řetězovky

Průhyby šikmého pole

Pro nesouměrnou řetězovku musíme ještě definovat a vypočítat následující průhyby:



Obr. 2.3a



Obr. 2.3b Namáhání v závěsném bodě

Charakteristický průhyb je délka svislice spuštěné v polovině rozpětí mezi spojnicí závěsných bodů a křivkou a můžeme ho určit podle rozšířené Pythagorovy věty

$$f_{\mathrm{k}} = f_{\mathrm{h}} \frac{l_{\mathrm{AB}}}{l_{\mathrm{h}}} = f_{\mathrm{h}} \cdot \cosh \frac{x_{\mathrm{k}}}{c}$$

$$x_{\mathrm{k}} = \frac{x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}}{2}$$

Viditelný průhyb je svislá vzdálenost mezi spojnicí závěsů A a B a tečnou k řetězovce. Tangenta

$$y' = \mathrm{tg}\, \varphi = \frac{h}{a} = \sinh \frac{x_{\mathrm{v}}}{c}$$

když předpokládáme rovnici řetězovky v tomto bodě

$$y_{\mathrm{v}} = c \cdot \cosh \frac{x_{\mathrm{v}}}{c}$$

kde x_{v} je souřadnice bodu dotyku a k ní určíme příslušnou souřadnici na spojnici AB na řetězovce, rozdíl obou je viditelný průhyb f_{v}.

3. Namáhání vodiče

Při výpočtu průhybu jsme zjistili, že vodorovná složka namáhání σ_H je v každém bodě, tedy i v závěsném stejná. Výsledné namáhání σ_B v závěsném bodě B leží ve směru tečny k řetězovce v tomto bodě.

Směr tečny svírá v závěsném bodě s osou x úhel α. Platí tedy

$$\sigma_B = \frac{\sigma_H}{\cos\alpha} \quad \text{(MPa)}$$

a pro tečnu v libovolném bodě řetězovky platí

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \sinh\frac{x}{c}$$

a v závěsném bodě $x = \frac{a}{2}$ můžeme psát

$$\operatorname{tg}\alpha = \sinh\frac{a}{2c}$$

úpravou dostaneme

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \cosh\frac{a}{2c}$$

Po dosazení dostaneme

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \sigma_{\mathrm{H}} \cdot \cosh \frac{a}{2c} = \sigma_{\mathrm{H}} \frac{y_{\mathrm{B}}}{\alpha} \quad (\mathrm{MPa})$$

z rovnice průhybu dostaneme

$$\cosh \frac{a}{2c} = \frac{f_{\mathrm{m}}}{c} + 1$$

po dosazení

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \sigma_{\mathrm{H}} \left(\frac{f_{\mathrm{m}}}{c} + 1 \right) = \sigma_{\mathrm{H}} + f_{\mathrm{m}} \gamma z$$

Tím jsme dostali vztah pro namáhání v závěsném bodě řetězovky, který závisí pro daný vodič jen na průhybu f_{m}.

Když vezmeme v úvahu parabolu

$$f_{\mathrm{m}} = \frac{a^2 \gamma z}{8 \sigma_{\mathrm{H}}}$$

a namáhání

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \sigma_{\mathrm{H}} + \frac{a^2 (\gamma z)^2}{8 \sigma_{\mathrm{H}}}$$

bude tah v závěsném bodě

$$F_{\mathrm{B}} = \sigma_{\mathrm{B}} S = \sigma_{\mathrm{H}} \cdot \cosh \frac{a}{2c} \cdot S = \sigma_{\mathrm{H}} S + f_{\mathrm{m}} S \gamma z = \sigma_{\mathrm{H}} \frac{y_{\mathrm{B}}}{\mathrm{c}} S \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{B}} = y_{\mathrm{B}} (q_1 + q_2)$$

Z této rovnice je zřejmé, že tah v závěsném bodě se rovná tíze vodiče délky y_B nebo tahu ve vrcholu F_H a tíze vodiče délky rovnající se průhybu f_m. Svislou složku namáhání σ_{vB} určíme z *obr. 2.3*. Platí

$$\sigma_{vB} = \sigma_H \cdot tg\,\alpha$$

$$tg\,\alpha = \sinh\frac{x}{c}$$

a v závěsném bodě

$$tg\,\alpha = \sinh\frac{a}{2c}$$

tedy

$$\sigma_{vB} = \sigma_H \cdot \sinh\frac{a}{2c}$$

kde je podle (2.45) délka řetězovky

$$l_s = 2c \cdot \sinh\frac{a}{2c}$$

Dosazením

$$\sigma_{vB} = \sigma_H \frac{l_s}{2c} = \sigma_H \frac{l_s \gamma z}{2\sigma_H} = \frac{l_s \gamma z}{2} \qquad (2.61)$$

svislou složku tahu určíme z namáhání

$$F_B = S\,\sigma_{vB} = S\,\sigma_H \cdot \sinh\frac{a}{2c}$$

$$F_{\mathrm{vB}} = \frac{S\,l_{\mathrm{s}}\,\gamma z}{2} = \frac{l_{\mathrm{s}}\left(q_1 + q_2\right)}{2} = \frac{a\left(q_1 + q_2\right)}{2}$$

Svislý tah v závěsném bodě se rovná tíze poloviční délky vodiče, zvětšené o přídavné zatížení. Všechny tyto vztahy platí pro řetězovku i parabolu.

Jen tehdy, je-li v závěsném bodě vodiče mechanické napětí alespoň o 4 % větší než v bodě průhybové křivky, je nutné uvažovat mechanické napětí v závěsném bodě. Tento případ nastává u velkých rozpětí nebo při velkém převýšení závěsů.

4. Odvození stavové rovnice

Předchozí výpočty vznikly za předpokladu, že namáhání napnutého vodiče je konstantní. Ve skutečnosti se však namáhání mění vlivem teploty, námrazku a větru. Jsme v oblasti konstantního průřezu, tzn. platí Hookův zákon.

Nyní uvažujeme dva stavy vedení. Počáteční stav označíme indexem 0 a nový stav označíme indexem 1. Změna délky vodiče Δl_{ϑ} (m) vlivem změny teploty se určí ze vztahu

$$\Delta l_{\vartheta} = \alpha\, l_0 \left(\vartheta_1 + \vartheta_0 \right) \qquad \Delta l_{\vartheta} > 0 \text{ pro } \vartheta_1 > \vartheta_0$$

α - činitel délkové tepelné roztažnosti lana (°C^{-1}),

l_0 - původní délka zavěšeného vodiče (m),

ϑ_0 - původní teplota vodiče (°C^{-1}),

ϑ_1 - nová teplota vodiče (°C^{-1}).

Změna délky vodiče Δl_{σ} (m) vlivem změny namáhání

$$\Delta l_{\sigma} = \frac{l_0}{E} \left(\sigma_{\mathrm{H1}} + \sigma_{\mathrm{H0}} \right) \qquad \Delta l_{\sigma} < 0 \text{ pro } \sigma_{\mathrm{H1}} < \sigma_{\mathrm{H0}}$$

E - modul pružnosti vodiče (MPa),

σ_{H0} - horizontální složka namáhání vodiče v původním stavu (MPa),

σ_{H1} - horizontální složka namáhání vodiče v novém stavu (MPa).

Celková změna z l_0 na l_1 se určí podle vzorce

$$\Delta l = l_1 - l_0 = \Delta l_\vartheta + \Delta l_\sigma = l_0 \left[\alpha \left(\vartheta_1 - \vartheta_0 \right) + \frac{1}{E} \left(\sigma_{\mathrm{H1}} - \sigma_{\mathrm{H0}} \right) \right]$$

Délka lana zavěšeného mezi dvěma stožáry při stavu k se vypočte podle vzorce

$$l_{\mathrm{k}} = a + \frac{a^3 \gamma_{\mathrm{k}}^2}{24 \sigma_{\mathrm{Hk}}^2}$$

a – rozpětí (m).

γ - měrná tíha 1 m vodiče ($\mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{-1}$).

Změna délky vlivem změny namáhání se vypočte podle vzorce

$$\Delta l = l_1 - l_0 = \frac{a^3}{24} \left(\frac{\gamma_1^2}{\sigma_{\mathrm{H1}}^2} - \frac{\gamma_0^2}{\sigma_{\mathrm{H0}}^2} \right)$$

Porovnáním výše uvedených rovnic dostaneme stavovou rovnici

$$l_0\left[\alpha\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)+\frac{1}{E}\left(\sigma_{H1}-\sigma_{H0}\right)\right]=\frac{a^3}{24}\left(\frac{\gamma_1^2}{\sigma_{H1}^2}-\frac{\gamma_0^2}{\sigma_{H0}^2}\right)$$

Protože lze přibližně uvažovat

$$l_0=a$$

potom lze psát stavovou rovnici ve tvaru

$$\alpha\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)+\frac{1}{E}\left(\sigma_{H1}-\sigma_{H0}\right)=\frac{a^2}{24}\left(\frac{\gamma_1^2}{\sigma_{H1}^2}-\frac{\gamma_0^2}{\sigma_{H0}^2}\right)$$

a po úpravě do tvaru kubické rovnice pro výpočet namáhání nového stavu 1

$$\sigma_{H1}^3+\sigma_{H1}^2\left[\frac{E\,a^2\,\gamma_0^2}{24\sigma_{H0}^2}+\alpha E\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)-\sigma_{H0}\right]-\frac{a^2\,\gamma_1^2\,E}{24}=0$$

Pro praxi se γ_0 a γ_1 nahradí pomocí měrné tíhy vodiče γ_v a přetížení vodiče s pomocí následujících rovnic

$$\gamma_1=\gamma_v\,z_1 \qquad \gamma_2=\gamma_v\,z_2$$

potom stavová rovnice přejde na tvar

$$\sigma_{\mathrm{H1}}^{3}+\sigma_{\mathrm{H1}}^{2}\left[\frac{E\gamma_{\mathrm{v}}^{2}}{24}\left(\frac{a\,z_{0}}{\sigma_{\mathrm{H0}}}\right)^{2}+\alpha E\left(\vartheta_{1}-\vartheta_{0}\right)-\sigma_{\mathrm{H0}}\right]-\frac{E\gamma_{\mathrm{v}}^{2}}{24}\left(a\,z_{1}\right)^{2}=0$$