

2. Cvičení

Výpočet ustáleného chodu soustavy pomocí Gauss-Seidlový iterační metody

Pro odvození použití Gauss-Seidelovy iterační metody vyjádřením uzlového výkonu pomocí uzlového napětí a uzlového proudu dle rovnice (1). Jedná se o *jednofázovou náhradu*.

$$\hat{S}_i = P_i + jQ_i = \hat{U}_i \hat{I}_i^* \quad (1)$$

Z rovnice (1) si vyjádříme uzlový proud.

$$\hat{I}_i = \frac{P_i - jQ_i}{\hat{U}_i^*} \quad (2)$$

V obecné n-uzlové síti je možné uzlové proudy vyjádřit pomocí napětí v jednotlivých uzlech, admitance konkrétního uzlu vůči zemi a mezi-uzlových admitancí. Uzlový proud bude tedy obecně zadán dle rovnice (3).

$$\hat{I}_i = \hat{U}_i \sum_{j=0}^n \hat{Y}_{ij} - \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{ij} \hat{U}_j \quad j \neq i \quad (3)$$

Pro výpočet napětí v i -tém uzlu dosadíme do rovnice (3) za uzlový proud rovnici (2). Výsledný vztah pro hledané uzlové napětí v uzlu i bude daný rovnicí (4).

$$\hat{U}_i^{(k+1)} = \frac{\frac{P_i - jQ_i}{\hat{U}_i^{*(k)} + \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{ij} \hat{U}_j^{(k)}}}{\sum_{j=0}^n \hat{Y}_{ij}} \quad j \neq i \quad (4)$$

Index k v rovnici (4) představuje číslo iterace. Novou hodnotu hledaného napětí tedy dostaneme dosazením pevných veličin a pak výsledků z předešlé iterace do rovnice (4). Tento výpočet je možné uplatnit u PQ uzlů. Přiblížíme si rozdělení typů uzlů:

1. **Uδ (Slack)** – Slack uzel představuje místo v síti, kde je známá velikost i fáze napětí (např. mohutná soustava). V tomto bodě jsou neznámé uzlové výkony **P** a **Q**.
2. **PQ** – známe odběry (dodávky) činného i jalového výkonu. Neznámé hodnoty jsou velikost napětí **U** a jeho fáze **δ**.
3. **PU** – je známý činný výkon a velikost napětí (např. elektrárna regulující napětí). Hledané veličiny jsou jalový výkon **Q** a fáze napětí **δ**.

Při výpočtech pro PQ uzly si vystačíme s rovnicí (4). Pro PU a Uδ uzly musíme dodefinovat vztahy pro činné (5) a jalové výkony (6), které získáme vyjádřením z rovnice (4).

$$Q_i^{(k+1)} = -\text{Im} \left\{ \hat{U}_i^{*(k)} \left[\hat{U}_i^{(k)} \sum_{j=0}^n \hat{Y}_{ij} - \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{ij} \hat{U}_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (5)$$

$$P_i^{(k+1)} = \text{Re} \left\{ \hat{U}_i^{*(k)} \left[\hat{U}_i^{(k)} \sum_{j=0}^n \hat{Y}_{ij} - \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{ij} \hat{U}_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (6)$$

Pro uvedenou konvenci platí, že kladné výkony představují dodávku, záporné výkony odběr.

V následujících částech si ukážeme jednoduché výpočty, na základě kterých pochopíme problematiku.

Řešení problému uzlů Uδ a PQ

Jako nejzákladnější příklad si zvolíme dvojuzlovou síť, kde jeden uzel bude typu Uδ (slack) a druhý bude PQ. Síť je specifikována na obrázku 1, parametry jsou uvedeny v poměrných jednotkách.



Obr. 1: Specifikace zadané sítě

V tomto příkladu je zadáno napětí v uzlu 1 a odběr výkonu v uzlu 2. Naší úlohou bude určit napětí v uzlu 2 a zdánlivý výkon v uzlu 1. Na základě rovnice (4) si vyjádříme napětí v uzlu 2 (7).

$$\hat{U}_2^{(k+1)} = \frac{\frac{P_2 - jQ_2}{\hat{U}_2^{*(k)}} + \hat{Y}_{12}\hat{U}_1}{\hat{Y}_{12}} \quad (7)$$

Definujme si výpočetní postup:

1. Zvolíme odhad napětí v uzlu 2: $\hat{U}_2 = 1 + j0$ (tj. jmenovité napětí)
2. Dosadíme odhad do rovnice (7)
3. Provedeme kontrolu tolerance řešení podle rovnice:

$$\varepsilon = \text{Abs}(\hat{U}_2^{(k+1)}) - \text{Abs}(\hat{U}_2^{(k)})$$

test $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$

4. V případě nesplnění opakujeme od bodu 2 s tím, že dál dosazujeme vypočtené hodnoty. Postup opakujeme, dokud nebude odchylka ε menší než odchylka stanovená.

Činný a jalový výkon v uzlu 1 si vyjádříme pomocí rovnic (6) a (5) a dostaneme rovnice (8) a (9).

$$P_1^{(k)} = \text{Re} \left\{ \hat{U}_1^* \left[\hat{U}_1 \hat{Y}_{12} - \hat{U}_2^{(k)} \hat{Y}_{12} \right] \right\} \quad (8)$$

$$Q_1^{(k)} = -\text{Im} \left\{ \hat{U}_1^* \left[\hat{U}_1 \hat{Y}_{12} - \hat{U}_2^{(k)} \hat{Y}_{12} \right] \right\} \quad (9)$$

Správnost řešení je možné ověřit pomocí jednoduchého postupu. Při znalosti výkonů a napětí ve všech uzlech můžeme použít rovnice (4) až (6). V uzlu 1 spočteme tedy napětí podle rovnice (4) a v uzlu 2 spočteme činný a jalový výkon podle rovnic (6) a (5). Vypočtené hodnoty pak porovnáme s hodnotami zadanými. Jestliže se tyto hodnoty shodují, jedná se o správný výpočet.

Dále je nutno uvést, že výkony v uzlu 1 nejsou potřebné pro výpočet napětí v uzlu 2 a proto je stačí dopočítat až po výpočtech napětí v uzlu 2.

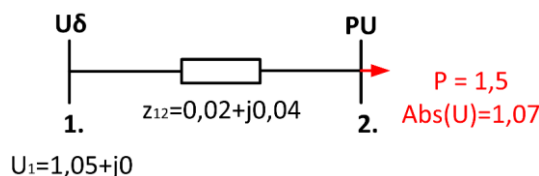
Následuje výpočet se strukturou: číslo iterace, vypočtené napětí v uzlu 2, vypočtený činný a jalový výkonem v uzlu 1 a odchylka napětí uzlu 2 od předešlé iterace.

Iterace	u_2 [p.j.]	p_1 [p.j.]	q_1 [p.j.]	ϵ
0	1	0	0	0
1	$0.9546 - 0.0806 i$	2.6943	1.1571	-0.0420034
2	$0.943692 - 0.0754573 i$	2.70084	1.44017	-0.0112929
3	$0.942764 - 0.0768347 i$	2.73951	1.44519	-0.000813915
4	$0.942554 - 0.0767365 i$	2.73965	1.45063	-0.000217061
5	$0.942536 - 0.0767633 i$	2.7404	1.45073	-0.00001587
6	$0.942532 - 0.0767614 i$	2.7404	1.45083	-4.23241×10^{-6}
7	$0.942532 - 0.0767619 i$	2.74042	1.45083	-3.09531×10^{-7}
8	$0.942532 - 0.0767619 i$	2.74042	1.45084	-8.25496×10^{-8}
9	$0.942532 - 0.0767619 i$	2.74042	1.45084	-6.03718×10^{-9}
10	$0.942532 - 0.0767619 i$	2.74042	1.45084	-1.61007×10^{-9}

Obr. 2: Výsledky jednotlivých iterací

Řešení problému uzlů U δ a PU

Jako druhý příklad si ukážeme opět výpočet v dvojuzlové síti, kde bude uzel U δ (slack) a uzel PU. Výpočty budeme opět realizovat v poměrných jednotkách. Síť je specifikována na obrázku 3.



Obr. 3: Specifikace zadané sítě

V této úloze známe velikost i fázi napětí v uzlu 1 a v uzlu 2 známe odebíraný (dodávaný) činný výkon a velikost napětí. V uzlu 2 budeme dopočítávat fázi napětí a odebíraný (dodávaný) jalový výkon. V rámci znaménkové konvence uvažuje spotřebičový systém, tedy odebíraný výkon má kladné znaménko a dodávaný záporné. Zadaný záporný činný výkon tedy znamená, že do uzlu je dodávaný činný výkon. Jelikož budeme hledat fázi napětí δ v uzlu 2, zavedeme si vyjádření napětí v uzlu 2 v exponenciálním tvaru dle rovnice (10).

$$\hat{U}_2 = |\hat{U}_2| e^{j\delta_2} \quad (10)$$

V tomto případě začneme s definováním jalového výkonu v uzlu 2 podle rovnice (11). Děláme tak proto, že na výpočet jalového výkonu potřebujeme znát jen odhad fáze napětí v uzlu 2. Kdybychom začínali výpočtem napětí, museli bychom odhadnout v uzlu 2 nejen fázi napětí, ale i jalový výkon.

$$Q_2^{(k+1)} = -\text{Im} \left\{ \hat{U}_2^{*(k)} \left[\hat{U}_2^{(k)} \hat{Y}_{12} - \hat{U}_1 \hat{Y}_{12} \right] \right\} = -\text{Im} \left\{ |\hat{U}_2| e^{-j\delta_2^{(k)}} \left[|\hat{U}_2| e^{j\delta_2^{(k)}} - \hat{U}_1 \hat{Y}_{12} \right] \right\} \quad (11)$$

Pro napětí v uzlu 2 budeme uvažovat vztah (12), ze kterého nás bude zajímat úhel, dle vztahu (13).

$$\hat{U}_2^{(k+1)} = \frac{\frac{P_2 - jQ_2^{(k+1)}}{\hat{U}_2^{*(k)}} + \hat{Y}_{12} \hat{U}_1}{\hat{Y}_{12}} = \frac{\frac{P_2 - jQ_2^{(k+1)}}{|\hat{U}_2| e^{-j\delta_2^{(k)}}} + \hat{Y}_{12} \hat{U}_1}{\hat{Y}_{12}} \quad (12)$$

$$\delta_2^{(k+1)} = \text{Arg} \left\{ \frac{\frac{P_2 - jQ_2^{(k+1)}}{|\hat{U}_2| e^{-j\delta_2^{(k)}}} + \hat{Y}_{12} \hat{U}_1}{\hat{Y}_{12}} \right\} \quad (13)$$

Definujme si opět výpočetní postup:

1. Zvolíme odhad fáze napětí v uzlu 2: $\delta_2 = 0 \text{ rad}$
2. Dosadíme odhad do rovnice (11) a dále dosadíme do rovnice (13)
3. Podle rovnice (10) určíme napětí v uzlu 2
4. Provedeme kontrolu tolerance řešení podle rovnice:

$$\varepsilon = \text{Arg}(\hat{U}_2^{(k+1)}) - \text{Arg}(\hat{U}_2^{(k)})$$

$$\text{test } \varepsilon < \varepsilon_{\max}$$

Kontrolu můžeme provést i na základě jalového výkonu v uzlu 2.

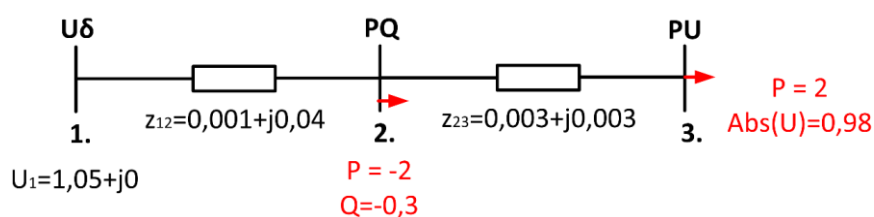
Výkony v uzlu 1 dopočítáme pomocí rovnic (8) a (9).

Obdobně jak v předešlém případě si ukážeme výsledky výpočtů na obrázku 4.

Iterace	q_2 [p.j.]	δ_2 [rad]	u_2 [p.j.]	ε	p_1 [p.j.]	q_1 [p.j.]
0	0	0	0	0	0	0
1	0.428	0.0439143	$1.06897 + 0.0469732 i$	0.0439143	-1.18561	0.0948811
2	-0.0435555	0.0515584	$1.06858 + 0.055143 i$	0.00764408	-1.35307	0.188861
3	-0.121143	0.0529471	$1.0685 + 0.056627 i$	0.00138877	-1.38342	0.206072
4	-0.135094	0.0532009	$1.06849 + 0.0568981 i$	0.000253782	-1.38896	0.209222
5	-0.137639	0.0532473	$1.06848 + 0.0569477 i$	0.0000464224	-1.38998	0.209798
6	-0.138104	0.0532558	$1.06848 + 0.0569568 i$	8.49322×10^{-6}	-1.39016	0.209903
7	-0.138189	0.0532574	$1.06848 + 0.0569585 i$	1.55393×10^{-6}	-1.3902	0.209923
8	-0.138205	0.0532577	$1.06848 + 0.0569588 i$	2.84311×10^{-7}	-1.3902	0.209926
9	-0.138208	0.0532577	$1.06848 + 0.0569588 i$	5.20184×10^{-8}	-1.39021	0.209927
10	-0.138208	0.0532577	$1.06848 + 0.0569588 i$	9.51743×10^{-9}	-1.39021	0.209927
11	-0.138208	0.0532577	$1.06848 + 0.0569588 i$	1.74133×10^{-9}	-1.39021	0.209927
12	-0.138208	0.0532577	$1.06848 + 0.0569588 i$	3.18599×10^{-10}	-1.39021	0.209927
13	-0.138208	0.0532577	$1.06848 + 0.0569588 i$	5.82919×10^{-11}	-1.39021	0.209927
14	-0.138208	0.0532577	$1.06848 + 0.0569588 i$	1.06653×10^{-11}	-1.39021	0.209927
15	-0.138208	0.0532577	$1.06848 + 0.0569588 i$	1.95131×10^{-12}	-1.39021	0.209927

Obr. 4: Výsledky jednotlivých iterací

Řešení problému tří uzlů U δ , PQ a PU



Obr. 5: Specifikace zadané sítě

Aplikujeme podobný postup podle rovnic (14) až (16).

$$\hat{U}_2^{(k+1)} = \frac{\frac{P_2 - jQ_2}{\hat{U}_2^{*(k)}} + \hat{Y}_{12}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{23}|\hat{U}_3|e^{j\delta_3^{(k)}}}{\hat{Y}_{12} + \hat{Y}_{23}} \quad (14)$$

$$Q_3^{(k+1)} = -\text{Im} \left\{ |\hat{U}_3| e^{-j\delta_3^{(k)}} \left[|\hat{U}_3| e^{j\delta_3^{(k)}} \hat{Y}_{23} - \hat{U}_2^{(k+1)} \hat{Y}_{23} \right] \right\} \quad (15)$$

$$\delta_3^{(k+1)} = \text{Arg} \left\{ \frac{\frac{P_3 - jQ_3^{(k+1)}}{|\bar{U}_3|e^{-j\delta_3^{(k)}}} + \bar{Y}_{23}\bar{U}_2^{(k+1)}}{\bar{Y}_{23}} \right\} \quad (16)$$

Na obrázku 6 je opět výsledků iterací.

Iterace	Abs(\bar{U}_2) [p.j.]	δ_2 [rad]	δ_3 [rad]	u_2 [p.j.]	u_3 [p.j.]	s_3 [p.j.]
0	1	0	0	0	0	0
1	0.97928	-0.00974069	-0.0651825	0.979234 - 0.00953871 i	0.977919 - 0.0638336 i	2. + 21.2842 i
2	0.98354	-0.0699324	-0.0838665	0.981136 - 0.0687252 i	0.976556 - 0.0820928 i	2. + 6.63894 i
3	0.984449	-0.08674	-0.087996	0.980748 - 0.0852841 i	0.976208 - 0.0861248 i	2. + 2.42217 i
4	0.984629	-0.0904299	-0.0888334	0.980606 - 0.0889186 i	0.976136 - 0.0869423 i	2. + 1.48941 i
5	0.984664	-0.0911762	-0.0889991	0.980575 - 0.0896536 i	0.976121 - 0.087104 i	2. + 1.30025 i
6	0.984671	-0.0913237	-0.0890316	0.980568 - 0.0897989 i	0.976119 - 0.0871358 i	2. + 1.26283 i
7	0.984673	-0.0913527	-0.089038	0.980567 - 0.0898275 i	0.976118 - 0.087142 i	2. + 1.25547 i
8	0.984673	-0.0913584	-0.0890393	0.980567 - 0.0898331 i	0.976118 - 0.0871433 i	2. + 1.25403 i
9	0.984673	-0.0913596	-0.0890395	0.980567 - 0.0898342 i	0.976118 - 0.0871435 i	2. + 1.25374 i
10	0.984673	-0.0913598	-0.0890396	0.980567 - 0.0898344 i	0.976118 - 0.0871435 i	2. + 1.25369 i
11	0.984673	-0.0913598	-0.0890396	0.980567 - 0.0898345 i	0.976118 - 0.0871435 i	2. + 1.25368 i
12	0.984673	-0.0913598	-0.0890396	0.980567 - 0.0898345 i	0.976118 - 0.0871436 i	2. + 1.25367 i
13	0.984673	-0.0913598	-0.0890396	0.980567 - 0.0898345 i	0.976118 - 0.0871436 i	2. + 1.25367 i
14	0.984673	-0.0913598	-0.0890396	0.980567 - 0.0898345 i	0.976118 - 0.0871436 i	2. + 1.25367 i
15	0.984673	-0.0913598	-0.0890396	0.980567 - 0.0898345 i	0.976118 - 0.0871436 i	2. + 1.25367 i

Obr. 6: Výsledky jednotlivých iterací