

## 2. Cvičení

Výpočet ustáleného chodu soustavy pomocí Gauss-Seidlový iterační metody

Pro odvození použití Gauss-Seidelovy iterační metody vyjádřením uzlového výkonu pomocí uzlového napětí a uzlového proudu dle rovnice (1). Jedná se o *jednofázovou náhradu*.

$$\hat{S}_i = P_i + jQ_i = \hat{U}_i \hat{I}_i^* \quad (1)$$

Z rovnice (1) si vyjádříme uzlový proud.

$$\hat{I}_i = \frac{P_i - jQ_i}{\hat{U}_i^*} \quad (2)$$

V obecné n-uzlové síti je možné uzlové proudy vyjádřit pomocí napětí v jednotlivých uzlech, admitance konkrétního uzlu vůči zemi a mezi-uzlových admitancí. Uzlový proud bude tedy obecně zadán dle rovnice (3).

$$\hat{I}_i = \hat{U}_i \sum_{j=0}^n \hat{Y}_{ij} - \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{ij} \hat{U}_j \quad j \neq i \quad (3)$$

Pro výpočet napětí v  $i$ -tém uzlu dosadíme do rovnice (3) za uzlový proud rovnici (2). Výsledný vztah pro hledané uzlové napětí v uzlu  $i$  bude daný rovnicí (4).

$$\hat{U}_i^{(k+1)} = \frac{\frac{P_i - jQ_i}{\hat{U}_i^{*(k)} + \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{ij} \hat{U}_j^{(k)}}}{\sum_{j=0}^n \hat{Y}_{ij}} \quad j \neq i \quad (4)$$

Index  $k$  v rovnici (4) představuje číslo iterace. Novou hodnotu hledaného napětí tedy dostaneme dosazením pevných veličin a pak výsledků z předešlé iterace do rovnice (4). Tento výpočet je možné uplatnit u PQ uzlů. Přiblížme si rozdělení typů uzlů:

1. **U $\delta$  (Slack)** – Slack uzel představuje místo v síti, kde je známá velikost i fáze napětí (např. mohutná soustava). V tomto bodě jsou neznámé uzlové výkony **P** a **Q**.
2. **PQ** – známe odběry (dodávky) činného i jalového výkonu. Neznámé hodnoty jsou velikost napětí **U** a jeho fáze  **$\delta$** .
3. **PU** – je známý činný výkon a velikost napětí (např. elektrárna regulující napětí). Hledané veličiny jsou jalový výkon **Q** a fáze napětí  **$\delta$** .

Při výpočtech pro PQ uzly si vystačíme s rovnicí (4). Pro PU a U $\delta$  uzly musíme dodefinovat vztahy pro činné (5) a jalové výkony (6), které získáme vyjádřením z rovnice (4).

$$Q_i^{(k+1)} = -\text{Im} \left\{ \hat{U}_i^{*(k)} \left[ \hat{U}_i^{(k)} \sum_{j=0}^n \hat{Y}_{ij} - \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{ij} \hat{U}_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (5)$$

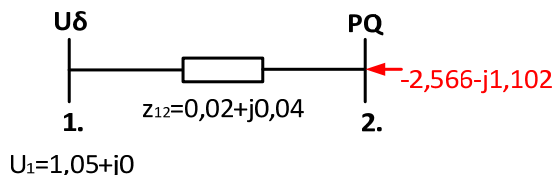
$$P_i^{(k+1)} = \text{Re} \left\{ \hat{U}_i^{*(k)} \left[ \hat{U}_i^{(k)} \sum_{j=0}^n \hat{Y}_{ij} - \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{ij} \hat{U}_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (6)$$

Pro uvedenou konvenci platí, že kladné výkony představují dodávku, záporné výkony odběr.

V následujících částech si ukážeme jednoduché výpočty, na základě kterých pochopíme problematiku.

Řešení problému uzlů U $\delta$  a PQ

Jako nejzákladnější příklad si zvolíme dvojuzlovou síť, kde jeden uzel bude typu U $\delta$  (slack) a druhý bude PQ. Síť je specifikována na obrázku 1, parametry jsou uvedeny v poměrných jednotkách.



Obr. 1: Specifikace zadané sítě

V tomto příkladu je zadáno napětí v uzlu 1 a odběr výkonu v uzlu 2. Naší úlohou bude určit napětí v uzlu 2 a zdánlivý výkon v uzlu 1. Na základě rovnice (4) si vyjádříme napětí v uzlu 2 (7).

$$\hat{U}_2^{(k+1)} = \frac{\frac{P_2 - jQ_2}{\hat{U}_2^{*(k)}} + \hat{Y}_{12}\hat{U}_1}{\hat{Y}_{12}} \quad (7)$$

Definujme si výpočetní postup:

1. Zvolíme odhad napětí v uzlu 2:  $\hat{U}_2 = 1 + j0$  (tj. jmenovité napětí)
2. Dosadíme odhad do rovnice (7)
3. Provedeme kontrolu tolerance řešení podle rovnice:

$$\varepsilon = \text{Abs}(\hat{U}_2^{(k+1)}) - \text{Abs}(\hat{U}_2^{(k)})$$

test  $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$

4. V případě nesplnění opakujeme od bodu 2 s tím, že dál dosazujeme vypočtené hodnoty. Postup opakujeme, dokud nebude odchylka  $\varepsilon$  menší než odchylka stanovená.

Činný a jalový výkon v uzlu 1 si vyjádříme pomocí rovnic (6) a (5) a dostaneme rovnice (8) a (9).

$$P_1^{(k)} = \text{Re} \left\{ \hat{U}_1^* \left[ \hat{U}_1 \hat{Y}_{12} - \hat{U}_2^{(k)} \hat{Y}_{12} \right] \right\} \quad (8)$$

$$Q_1^{(k)} = -\text{Im} \left\{ \hat{U}_1^* \left[ \hat{U}_1 \hat{Y}_{12} - \hat{U}_2^{(k)} \hat{Y}_{12} \right] \right\} \quad (9)$$

Správnost řešení je možné ověřit pomocí jednoduchého postupu. Při znalosti výkonů a napětí ve všech uzlech můžeme použít rovnice (4) až (6). V uzlu 1 spočteme tedy napětí podle rovnice (4) a v uzlu 2 spočteme činný a jalový výkon podle rovnic (6) a (5). Vypočtené hodnoty pak porovnáme s hodnotami zadanými. Jestliže se tyto hodnoty shodují, jedná se o správný výpočet.

Dále je nutno uvést, že výkony v uzlu 1 nejsou potřebné pro výpočet napětí v uzlu 2 a proto je stačí dopočítat až po výpočtech napětí v uzlu 2.

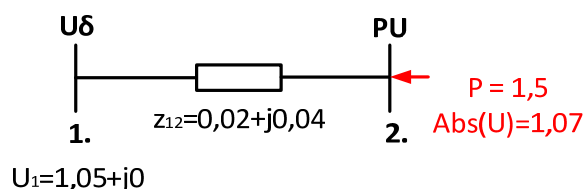
Následuje výpočet se strukturou: číslo iterace, vypočtené napětí v uzlu 2, vypočtený činný a jalový výkonem v uzlu 1 a odchylka napětí uzlu 2 od předešlé iterace.

Iterace	$u_2$ [p.j.]	$p_1$ [p.j.]	$q_1$ [p.j.]	$\epsilon$
0	1	0	0	0
1	$0.9546 - 0.0806 i$	2.6943	1.1571	-0.0420034
2	$0.943692 - 0.0754573 i$	2.70084	1.44017	-0.0112929
3	$0.942764 - 0.0768347 i$	2.73951	1.44519	-0.000813915
4	$0.942554 - 0.0767365 i$	2.73965	1.45063	-0.000217061
5	$0.942536 - 0.0767633 i$	2.7404	1.45073	-0.00001587
6	$0.942532 - 0.0767614 i$	2.7404	1.45083	$-4.23241 \times 10^{-6}$
7	$0.942532 - 0.0767619 i$	2.74042	1.45083	$-3.09531 \times 10^{-7}$
8	$0.942532 - 0.0767619 i$	2.74042	1.45084	$-8.25496 \times 10^{-8}$
9	$0.942532 - 0.0767619 i$	2.74042	1.45084	$-6.03718 \times 10^{-9}$
10	$0.942532 - 0.0767619 i$	2.74042	1.45084	$-1.61007 \times 10^{-9}$

Obr. 2: Výsledky jednotlivých iterací

Řešení problému uzlů U $\delta$  a PU

Jako druhý příklad si ukážeme opět výpočet v dvojuzlové síti, kde bude uzel U $\delta$  (slack) a uzel PU. Výpočty budeme opět realizovat v poměrných jednotkách. Síť je specifikována na obrázku 3.



Obr. 3: Specifikace zadané sítě

V této úloze známe velikost i fázi napětí v uzlu 1 a v uzlu 2 známe odebíraný (dodávaný) činný výkon a velikost napětí. V uzlu 2 budeme dopočítávat fázi napětí a odebíraný (dodávaný) jalový výkon. V rámci znaménkové konvence uvažujeme zdrojový systém, tedy dodávaný výkon má kladné znaménko a odebíraný záporné. Zadaný záporný činný výkon tedy znamená, že z uzlu je odebíráán činný výkon. Jelikož budeme hledat fázi napětí  $\delta$  v uzlu 2, zavedeme si vyjádření napětí v uzlu 2 v exponenciálním tvaru dle rovnice (10).

$$\hat{U}_2 = |\hat{U}_2| e^{j\delta_2} \quad (10)$$

V tomto případě začneme s definováním jalového výkonu v uzlu 2 podle rovnice (11). Děláme tak proto, že na výpočet jalového výkonu potřebujeme znát jen odhad fáze napětí v uzlu 2. Kdybychom začínali výpočtem napětí, museli bychom odhadnout v uzlu 2 nejen fázi napětí, ale i jalový výkon.

$$Q_2^{(k+1)} = -\text{Im} \left\{ \hat{U}_2^{*(k)} \left[ \hat{U}_2^{(k)} \hat{Y}_{12} - \hat{U}_1 \hat{Y}_{12} \right] \right\} = -\text{Im} \left\{ |\hat{U}_2| e^{-j\delta_2^{(k)}} \left[ |\hat{U}_2| e^{j\delta_2^{(k)}} \hat{Y}_{12} - \hat{U}_1 \hat{Y}_{12} \right] \right\} \quad (11)$$

Pro napětí v uzlu 2 budeme uvažovat vztah (12), ze kterého nás bude zajímat úhel, dle vztahu (13).

$$\hat{U}_2^{(k+1)} = \frac{\frac{P_2 - jQ_2^{(k+1)}}{\hat{U}_2^{*(k)}} + \hat{Y}_{12} \hat{U}_1}{\hat{Y}_{12}} = \frac{\frac{P_2 - jQ_2^{(k+1)}}{|\hat{U}_2| e^{-j\delta_2^{(k)}}} + \hat{Y}_{12} \hat{U}_1}{\hat{Y}_{12}} \quad (12)$$

$$\delta_2^{(k+1)} = \text{Arg} \left\{ \frac{P_2 - jQ_2^{(k+1)}}{|U_2|e^{-j\delta_2^{(k)}} + \hat{Y}_{12}\hat{U}_1} \right\} \quad (13)$$

$$\hat{U}_2^{(k+1)} = |\hat{U}_2|e^{j\delta_2^{(k+1)}} \quad (14)$$

Definujme si opět výpočetní postup:

1. Zvolíme odhad fáze napětí v uzlu 2:  $\delta_2 = 0 \text{ rad}$
2. Dosadíme odhad do rovnice (11) a dále dosadíme do rovnice (13)
3. Podle rovnice (10) určíme napětí v uzlu 2
4. Provedeme kontrolu tolerance řešení podle rovnice:

$$\varepsilon = \text{Arg}(\hat{U}_2^{(k+1)}) - \text{Arg}(\hat{U}_2^{(k)})$$

test  $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$

Kontrolu můžeme provést i na základě jalového výkonu v uzlu 2.

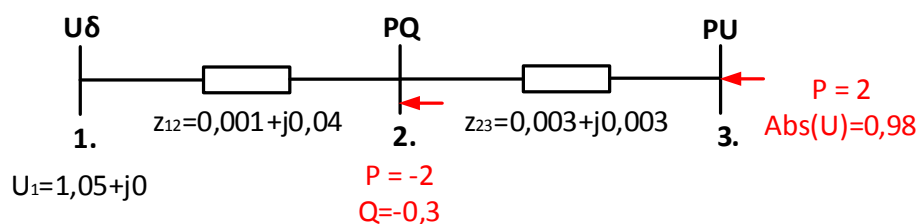
Výkony v uzlu 1 dopočítáme pomocí rovnic (8) a (9).

Obdobně jak v předešlém případě si ukážeme výsledky výpočtů na obrázku 4.

Iterace	$q_2$ [p.j.]	$\delta_2$ [rad]	$u_2$ [p.j.]	$\varepsilon$	$p_1$ [p.j.]	$q_1$ [p.j.]
0	0	0	0	0	0	0
1	0.428	0.0439143	1.06897 + 0.0469732 i	0.0439143	-1.18561	0.0948811
2	-0.0435555	0.0539509	1.06844 + 0.0576995 i	0.0100366	-1.40534	0.218538
3	-0.145151	0.055974	1.06832 + 0.0598609 i	0.00202308	-1.44948	0.24373
4	-0.165348	0.0563696	1.0683 + 0.0602835 i	0.000395616	-1.45811	0.248667
5	-0.169287	0.0564465	1.0683 + 0.0603657 i	0.0000768858	-1.45979	0.249627
6	-0.170052	0.0564614	1.06829 + 0.0603816 i	0.0000149242	-1.46011	0.249813
7	-0.170201	0.0564643	1.06829 + 0.0603847 i	$2.89625 \times 10^{-6}$	-1.46017	0.24985
8	-0.170229	0.0564649	1.06829 + 0.0603853 i	$5.6203 \times 10^{-7}$	-1.46019	0.249857
9	-0.170235	0.056465	1.06829 + 0.0603854 i	$1.09063 \times 10^{-7}$	-1.46019	0.249858
10	-0.170236	0.056465	1.06829 + 0.0603854 i	$2.1164 \times 10^{-8}$	-1.46019	0.249858
11	-0.170236	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	$4.10693 \times 10^{-9}$	-1.46019	0.249858
12	-0.170236	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	$7.9696 \times 10^{-10}$	-1.46019	0.249858
13	-0.170236	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	$1.54652 \times 10^{-10}$	-1.46019	0.249858
14	-0.170236	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	$3.00106 \times 10^{-11}$	-1.46019	0.249858
15	-0.170236	0.056465	1.06829 + 0.0603855 i	$5.82367 \times 10^{-12}$	-1.46019	0.249858

Obr. 4: Výsledky jednotlivých iterací

Řešení problému tří uzlů U $\delta$ , PQ a PU



Obr. 5: Specifikace zadané sítě

Aplikujeme podobný postup podle rovnic (15) až (17).

$$\hat{U}_2^{(k+1)} = \frac{\frac{P_2 - jQ_2}{\hat{U}_2^{*(k)}} + \hat{Y}_{12}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{23}|\hat{U}_3|e^{j\delta_3^{(k)}}}{\hat{Y}_{12} + \hat{Y}_{23}} \quad (15)$$

$$Q_3^{(k+1)} = -\text{Im} \left\{ |\hat{U}_3| e^{-j\delta_3^{(k)}} \left[ |\hat{U}_3| e^{j\delta_3^{(k)}} \hat{Y}_{23} - \hat{U}_2^{(k+1)} \hat{Y}_{23} \right] \right\} \quad (16)$$

$$\delta_3^{(k+1)} = \text{Arg} \left\{ \frac{\frac{P_3 - jQ_3^{(k+1)}}{|\hat{U}_3| e^{-j\delta_3^{(k)}}} + \hat{Y}_{23} \hat{U}_2^{(k+1)}}{\hat{Y}_{23}} \right\} \quad (17)$$

Na obrázku 6 jsou opět výsledky iterací. Je zde patrná velmi pomalá konvergence pro tento konkrétní příklad.

Iterace	Abs(U <sub>2</sub> ) [p.j.]	δ <sub>2</sub> [rad]	δ <sub>3</sub> [rad]	u <sub>2</sub> [p.j.]	u <sub>3</sub> [p.j.]	s <sub>3</sub> [p.j.]
0	1	0	0	0	0	0
1	0.97928	-0.00974069	0.000988826	0.979234 - 0.00953871 i	0.98 + 0.00096905 i	2. - 1.43285 i
2	0.979032	-0.00887761	0.00178917	0.978994 - 0.00869135 i	0.979998 + 0.00175339 i	2. - 1.41183 i
3	0.978979	-0.00814438	0.00252877	0.978946 - 0.00797308 i	0.979997 + 0.0024782 i	2. - 1.41364 i
4	0.97893	-0.00746539	0.00321332	0.978903 - 0.00730802 i	0.979995 + 0.00314905 i	2. - 1.41521 i
5	0.978885	-0.00683691	0.0038469	0.978862 - 0.0066925 i	0.979993 + 0.00376995 i	2. - 1.41666 i
6	0.978843	-0.00625521	0.0044333	0.978824 - 0.00612283 i	0.97999 + 0.00434462 i	2. - 1.41799 i
7	0.978805	-0.0057168	0.00497604	0.978789 - 0.0055956 i	0.979988 + 0.00487649 i	2. - 1.41921 i
8	0.978769	-0.00521847	0.00547834	0.978756 - 0.00510765 i	0.979985 + 0.00536875 i	2. - 1.42033 i
9	0.978736	-0.00475724	0.00594323	0.978725 - 0.00465606 i	0.979983 + 0.00582433 i	2. - 1.42136 i
10	0.978705	-0.00433036	0.00637349	0.978696 - 0.00423813 i	0.97998 + 0.00624597 i	2. - 1.42231 i
11	0.978677	-0.00393527	0.00677168	0.978669 - 0.00385134 i	0.979978 + 0.0066362 i	2. - 1.42319 i
12	0.97865	-0.00356961	0.00714021	0.978644 - 0.00349339 i	0.979975 + 0.00699734 i	2. - 1.42399 i
13	0.978626	-0.00323119	0.00748127	0.978621 - 0.00316212 i	0.979973 + 0.00733157 i	2. - 1.42474 i
14	0.978603	-0.00291798	0.00779691	0.978599 - 0.00285554 i	0.97997 + 0.00764089 i	2. - 1.42542 i
15	0.978583	-0.00262811	0.00808902	0.978579 - 0.00257182 i	0.979968 + 0.00792715 i	2. - 1.42605 i
16	0.978563	-0.00235985	0.00835936	0.97856 - 0.00230926 i	0.979966 + 0.00819208 i	2. - 1.42663 i
17	0.978545	-0.00211157	0.00860954	0.978543 - 0.00206627 i	0.979964 + 0.00843725 i	2. - 1.42717 i
18	0.978529	-0.0018818	0.00884108	0.978527 - 0.0018414 i	0.979962 + 0.00866414 i	2. - 1.42766 i
19	0.978513	-0.00166916	0.00905535	0.978512 - 0.00163329 i	0.97996 + 0.00887412 i	2. - 1.42812 i
20	0.978499	-0.00147237	0.00925364	0.978498 - 0.00144071 i	0.979958 + 0.00906844 i	2. - 1.42854 i
21	0.978486	-0.00129025	0.00943715	0.978485 - 0.00126249 i	0.979956 + 0.00924827 i	2. - 1.42893 i
22	0.978474	-0.0011217	0.00960698	0.978473 - 0.00109756 i	0.979955 + 0.0094147 i	2. - 1.42929 i
23	0.978463	-0.000965725	0.00976414	0.978462 - 0.000944926 i	0.979953 + 0.00956871 i	2. - 1.42962 i
24	0.978452	-0.000821378	0.00990958	0.978452 - 0.000803679 i	0.979952 + 0.00971123 i	2. - 1.42993 i
25	0.978443	-0.000687794	0.0100442	0.978442 - 0.000672967 i	0.979951 + 0.00984313 i	2. - 1.43021 i
26	0.978434	-0.000564171	0.0101687	0.978434 - 0.000552004 i	0.979949 + 0.00996519 i	2. - 1.43047 i
27	0.978425	-0.000449767	0.010284	0.978425 - 0.000440063 i	0.979948 + 0.0100781 i	2. - 1.43072 i
28	0.978418	-0.000343894	0.0103907	0.978418 - 0.000336472 i	0.979947 + 0.0101827 i	2. - 1.43094 i
29	0.978411	-0.000245918	0.0104894	0.978411 - 0.000240608 i	0.979946 + 0.0102794 i	2. - 1.43115 i
30	0.978404	-0.000155248	0.0105807	0.978404 - 0.000151895 i	0.979945 + 0.0103689 i	2. - 1.43134 i
31	0.978398	-0.0000713403	0.0106653	0.978398 - 0.0000697992 i	0.979944 + 0.0104518 i	2. - 1.43151 i
32	0.978392	6.30903 × 10 <sup>-6</sup>	0.0107435	0.978392 + 6.1727 × 10 <sup>-6</sup> i	0.979943 + 0.0105284 i	2. - 1.43168 i
33	0.978387	0.0000781668	0.0108159	0.978387 + 0.0000764774 i	0.979943 + 0.0105994 i	2. - 1.43183 i
34	0.978382	0.000144665	0.0108829	0.978382 + 0.000141538 i	0.979942 + 0.010665 i	2. - 1.43197 i
35	0.978378	0.000206203	0.0109449	0.978378 + 0.000201745 i	0.979941 + 0.0107258 i	2. - 1.4321 i
36	0.978374	0.000263151	0.0110023	0.978374 + 0.00025746 i	0.979941 + 0.010782 i	2. - 1.43221 i
37	0.97837	0.000315851	0.0110554	0.97837 + 0.000309019 i	0.97994 + 0.010834 i	2. - 1.43232 i
38	0.978367	0.00036462	0.0111045	0.978367 + 0.000356732 i	0.97994 + 0.0108822 i	2. - 1.43243 i
39	0.978363	0.000409751	0.01115	0.978363 + 0.000400885 i	0.979939 + 0.0109267 i	2. - 1.43252 i
40	0.97836	0.000451515	0.011192	0.97836 + 0.000441745 i	0.979939 + 0.010968 i	2. - 1.43261 i
41	0.978358	0.000490164	0.011231	0.978357 + 0.000479556 i	0.979938 + 0.0110061 i	2. - 1.43269 i
42	0.978355	0.00052593	0.011267	0.978355 + 0.000514546 i	0.979938 + 0.0110414 i	2. - 1.43276 i
43	0.978353	0.000559028	0.0113004	0.978352 + 0.000546926 i	0.979937 + 0.0110741 i	2. - 1.43283 i
44	0.97835	0.000589657	0.0113312	0.97835 + 0.000576891 i	0.979937 + 0.0111044 i	2. - 1.4329 i
45	0.978348	0.000618001	0.0113598	0.978348 + 0.00060462 i	0.979937 + 0.0111323 i	2. - 1.43295 i
46	0.978346	0.00064423	0.0113862	0.978346 + 0.00063028 i	0.979936 + 0.0111582 i	2. - 1.43301 i
47	0.978345	0.000668502	0.0114107	0.978344 + 0.000654026 i	0.979936 + 0.0111822 i	2. - 1.43306 i
48	0.978343	0.000690964	0.0114333	0.978343 + 0.000676 i	0.979936 + 0.0112044 i	2. - 1.43311 i
49	0.978341	0.00071175	0.0114542	0.978341 + 0.000696335 i	0.979936 + 0.0112249 i	2. - 1.43315 i
50	0.97834	0.000730986	0.0114736	0.97834 + 0.000715152 i	0.979935 + 0.0112439 i	2. - 1.43319 i

Obr. 6: Výsledky jednotlivých iterací