Lineární funkce i omezovací podmínky

$$\underset{\overline{x}\in X}{opt}\ \overline{c}^{t}\,\overline{x}$$

$\overline{x}\in\Re^{\partial\overline{x}}, \overline{x}\geq\overline{0}$, ..vektor proměnných, $\overline{c}\in\Re^{\partial\overline{x}}$.....vektor cen úlohy

$\overline{b}\in\Re^{\partial b}$....vektor limitů (kapacitních), $\overline{a}_{Bi}\in\Re^{\partial\overline{b}}$ $i-tý\ sloupec\ [A]$

$[A]\in\Re^{\partial\overline{b}\times\partial\overline{x}}$...matice strukturálních koeficientů, $\partial\overline{x}>\partial\overline{b}$!

$hod[A]=\partial\overline{b}$

Přípustné řešení	$[A]\overline{x} \overset{®}{=} \overline{b},\ \ \overline{x}\geq\overline{0}$
Přípustná oblast	$X=\left\{\overline{x}:[A]\overline{x}\overset{®}{=}\overline{b}, \overline{x}\geq\overline{0}\right\}$
Optimální řešení	$\overline{x}^{*}=\arg\underset{\overline{x}\in X}{opt}\left\{\overline{c}^{T}.\overline{x}\right\}$
Optimální hodnota	$f\left(\overline{x}^{*}\right)=\overline{c}^{T}\overline{x}^{*}$

Obvyklé tvary úloh:

tvar	opt	relace
základní	**max/min**	$\leq\ \geq\ =$
standardní	**max/min**	$\leq$
kanonický	**max/min**	$=$
normální	**max/min**	$\leq$, $b_i>0$

Vyjádření subvektory (báz. a nebáz.)

B,N	Index bázových a nebázových proměnných
β, ν	Množina indexů veličin B,N

$$[A]=\left[[A_B],[A_N]\right],[A_B]\subset\Re^{\partial\overline{b}\times\partial\overline{b}}, regulární, [A_N]\subset\Re^{\partial\overline{x}-\partial\overline{b}\times\partial\overline{b}}$$

$$\overline{x}^{T}=\left[\overline{x}_B^{T},\overline{x}_N^{T}\right],\overline{c}^{T}=\left[\overline{c}_B^{T},\overline{c}_N^{T}\right],\overline{x}_B,\overline{c}_B\subset\Re^{\partial\overline{b}},\overline{x}_N,\overline{c}_N\subset\Re^{\partial\overline{x}-\partial\overline{b}}$$

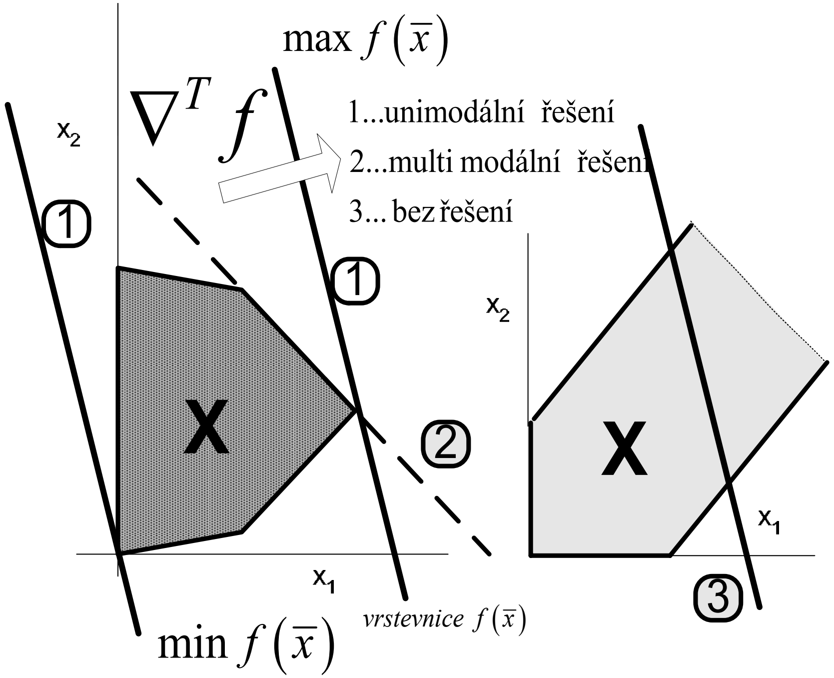
úloha: $$\underset{\overline{x}\in X}{\min}\left\{\left[\overline{c}_B^{T}\ \overline{c}_N^{T}\right].\begin{bmatrix}\overline{x}_B\\ \overline{x}_N\end{bmatrix}^{T}\right\}$$

$$[A]\overline{x}=\left[[A_B]\,[A_N]\right].\begin{bmatrix}\overline{x}_B\\ \overline{x}_N\end{bmatrix},\ \overline{x}=\underbrace{\sum_{i=1}^{\partial\overline{b}}\underbrace{x_i}_{\substack{i-tá\\ souřadnice\,\overline{x}}}\bullet\underbrace{\overline{a}_{Bi}}_{\substack{i-tý\ sloupec\\ báze\,[A_B]}}}_{vyjádření\ vektoru\,v\,bázi\,\overline{A}_B}$$

řešení:
$$\overline{x}_B=\underbrace{\left[A_B^{-1}\right]\overline{b}}_{\tilde{x}_B}-\left[A_B^{-1}\right]\left[A_N\right].\overline{x}_N$$
$$\tilde{x}_B=část\,bázového\ řešení\ při\ \overline{x}_N=\overline{0}$$

výsledné bázové řešení: $$\begin{bmatrix}\tilde{x}_B=\left[A_B^{-1}\right]\overline{b}\\ \overline{x}_N=\overline{0}\end{bmatrix}$$

2-LP-Lineární programování



Řešení existuje   Řešení neexistuje

V jednom z výsledných bázových řešení leží optimální řešení. **Základní věta LP:**Jestliže má úloha LP optimální řešení nabývá cílová funkce své optimální hodnoty v krajních bodech (vrcholů obalu) množiny přípustných řešení.Vrcholy jsou určeny rovnicí:

$$\bar{x}_B = A_B^{-1}\cdot\bar{c}_B, \qquad \bar{x}_N = \bar{0}$$

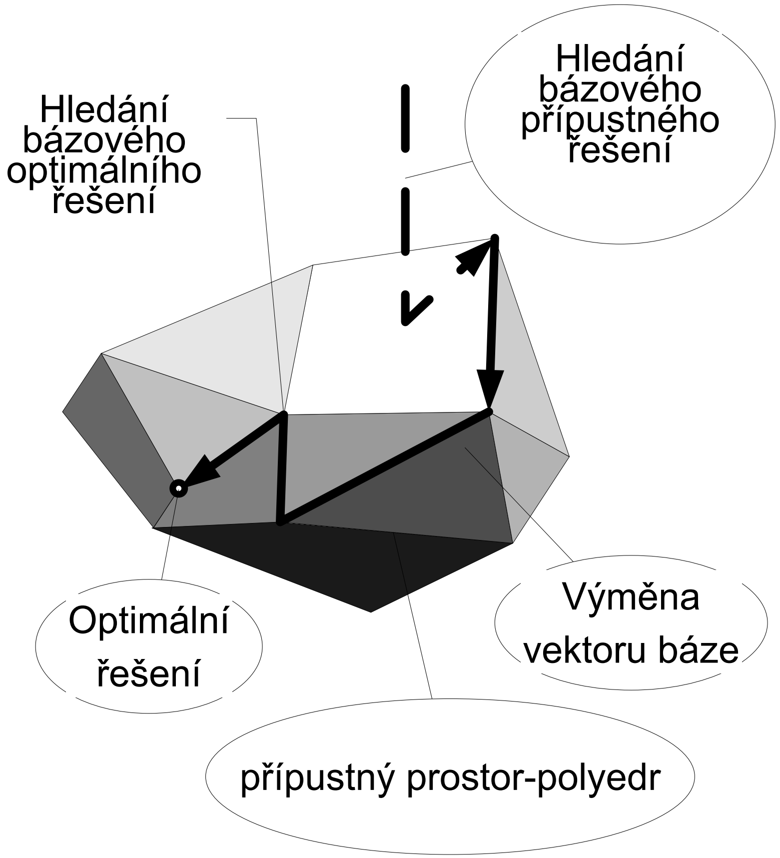
Hledání optimálního řešení je tedy ekvivalentní hledání přípustných bází z konečného počtu možností:.

$$\binom{\partial\bar{b}}{\partial\bar{x}} = \left(\frac{\partial\bar{b}\,!}{\partial\bar{x}\,!\left(\partial\bar{b}-\partial\bar{x}\right)!}\right)$$

2-LP-Lineární programování

Základní algoritmus:

1. **Výběr výchozího přípustného báz. řešení**
2. **if stávající řešení nelze zlepšit pak konec jinak jdi na 3.**
3. **Přechod k lepšímu bázickému řešení, návrat na 2.**



2-LP-Lineární programování

cena řešení:

$$f = \overline{c}^T . \underset{\cdot}{x} = \begin{bmatrix} \overline{c}_B^T & \overline{c}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_B \\ \overline{x}_N \end{bmatrix}$$

$$f = \underbrace{\overline{c}_B^T \left[A_B^{-1} \right] \overline{b} - \overline{c}_B^T \left[A_B^{-1} \right] \left[A_N \right] . \overline{x}_N}_{\overline{c}_B^T \overline{x}_B} + \overline{c}_N^T \overline{x}_N$$

$$f = \overbrace{\overline{c}_B^T \underbrace{\left[A_B^{-1} \right] \overline{b}}_{\tilde{\overline{x}}_b}}^{f_B} + \overbrace{\left(\overline{c}_N^T - \overline{c}_B^T \left[A_B^{-1} \right] \left[A_N \right] \right) \overline{x}_N}^{f_N}$$

$$f = \overbrace{\overline{c}_B^T \underbrace{\left[A_B^{-1} \right] \overline{b}}_{\tilde{\overline{x}}_b}}^{f_B} + \overbrace{\left(\overline{c}_N - \left[A_N \right] \left[A_B^{-T} \right] \overline{c}_B \right)^T \overline{x}_N}^{f_N}$$

f_B	Cena bázového řešení		f_N	Redukovaná cena

V optimálním bodě je $f_N \begin{matrix} \geq 0 \text{ při minimalizaci} \\ \leq 0 \text{ při maximalizaci} \end{matrix}$

2-LP-Lineární programování

Dualita .

- Duální problém je negativní transpozice primárního problému
- Duální problém od duálního je primární

$$P : opt \left\{ \overline{c}^T . \overline{x} \right\} / \left[A \right] . \overline{x} \underset{=}{\square} b, \qquad \overline{x} \geq \overline{0}$$

$$D : dual\, opt \left\{ \overline{\lambda}^T . \overline{b} \right\} / \overline{\lambda}^T \left[A \right]^T \text{@} \ \overline{c}^T, \quad \overline{\lambda} \geq \overline{0}, \text{@..duální omezení}$$

Primarní		**duální**	
maximalizace		minimalizace	
vektor		Transponovaný vektor	
Vektor omezení		Vektor cílové funkce	
=		Bez omezení	
	min $\overline{c}^T \overline{x}$ max	max $\overline{\lambda}^T \overline{b}$ min	
omezení	$[A]\overline{x} \geq \overline{b}$	$\overline{\lambda} \geq \overline{0}$	**proměnné**
	$[A]\overline{x} \leq \overline{b}$	$\overline{\lambda} \leq \overline{0}$	
	$[A]\overline{x} = \overline{b}$	$\overline{\lambda}$ volné	
proměnné	$\overline{x} \geq \overline{0}$	$\overline{\lambda}^T [A] \leq \overline{c}^T$	**omezení**
	$\overline{x} \leq \overline{0}$	$\overline{\lambda}^T [A] \geq \overline{c}^T$	
	$\overline{x}$ volné	$\overline{\lambda}^T [A] = \overline{c}^T$	

Slabá dualita:

$$platí: \quad \bar{c}^{t}\bar{x}^{\odot} \square \; \bar{b}^{t}.\bar{\lambda}^{\odot}$$ $\odot$.......přípustné řešení P,D

důkaz :

$$\left[A\right]\bar{x}^{\odot} \square \; \bar{b} \Rightarrow \bar{x}^{\odot t}\left[A\right]^{t}\bar{\lambda}^{\odot} \square \; \bar{b}^{t}\bar{\lambda}^{\odot}$$

$$\bar{x}^{\odot t}\left[A\right]^{t}\bar{\lambda}^{\odot} \square \; \bar{x}^{\odot t}\bar{c} = \bar{c}^{t}\bar{x}^{\odot}$$

Silná dualita: $\bar{c}^{T}.\bar{x}^{*} = \bar{b}^{T}.\bar{\lambda}^{*}$

Uprava omezení na typ rovnosti

$$\max\left\{\bar{c}^{T}.\bar{x}\right\} / \left[A\right].\bar{x} + \bar{\eta} = b, \quad \bar{x} \geq \bar{0}, \; \bar{\eta} \geq 0$$

$$\min\left\{\bar{b}^{T}.\bar{y}\right\} / \left[A\right]^{T}.\bar{y} - \bar{\zeta} = \bar{c}, \quad \bar{y}, \; \bar{\zeta} \geq \bar{0}$$

podmínky optima obsahují nelineární rovnice:

$$\left[A\right].\bar{x} + \bar{\eta} = b, \quad \left[A\right]^{T}.\bar{y} - \bar{\zeta} = \bar{c},$$

podmínky komplementarity v maticové a μ formulaci :

$$\left[diag\bar{x}\right]\left[diag\bar{\zeta}\right]\bar{❶} = \left\langle \begin{array}{l} \bar{0} \\ \mu❶ \end{array}\right. \quad \left[diag\bar{y}\right]\left[diag\bar{\eta}\right]\bar{❶} = \left\langle \begin{array}{l} \bar{0} \\ \mu❶ \end{array}\right.$$

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{\zeta}, \bar{\eta} \geq \bar{0}$$

Konstrukce duální úlohy

	primární	duální
funkce	$L_P(\bar{x}) = \max\limits_{\bar{\lambda}_R, \bar{\lambda}_N \geq 0}\left\{L\left(\bar{\xi}\right)\right\}$	$L_D\left(\bar{\lambda}_R, \bar{\lambda}_N\right) = \min\limits_{\bar{x}}\left\{L\left(\bar{\xi}\right)\right\}$
úloha	$\min\limits_{\bar{x}}\left\{L_P(\bar{x})\right\}$	$\max\limits_{\bar{\lambda}_R, \bar{\lambda}_N \geq 0}\left\{L_D(\bar{\lambda}_R, \bar{\lambda}_N)\right\}$

$$\min_{\bar{x} \in \Re^{\partial x}} L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)$$

$$L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right) = \bar{c}^{T}.\bar{x} + \bar{\lambda}^{T}.\left(\bar{b} - \left[A\right].\bar{x}\right) =$$

$$\min L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right) = \bar{\lambda}^{T}\bar{b} + \min\left\{\bar{c}^{T} - \bar{\lambda}^{T}\left[A\right]\right\}\bar{x}$$

$$\min L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right) = \bar{\lambda}^{T}\bar{b} + \left\langle \begin{array}{ll} 0 & if\left\{\bar{c}^{T} - \bar{\lambda}^{T}\left[A\right]\right\} \geq 0 \\ -\infty & if\left\{\bar{c}^{T} - \bar{\lambda}^{T}\left[A\right]\right\} < 0 \end{array}\right.$$

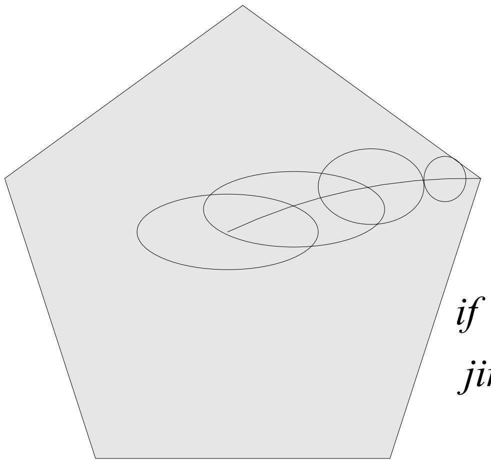
$$\text{Duální:} \quad \max\left\{\bar{\lambda}^{T}\bar{b}\right\} \Big| \bar{c}^{T} \geq \bar{\lambda}^{T}\left[A\right]$$

Metody vnitřního bodu.

- **Afinní cejchování**.

Postup:

1. **k=0, nalezne se striktně vnitřní bod** $\overline{x}_0$
2. **do dovoleného prostoru se vepíše elipsoid E_k se středem ve výchozím bodě. (E_k tvoří redukovaný přípustný prostor na jehož okraji lze najít explicitní řešení** $\overline{x}_k$ **).**



3. $$if\ \overline{x}_k \neq \overline{x}^* \Rightarrow k = k+1, goto\,2$$
$$jinak\,konec$$

Potenciálová redukce

$$P : \min \overline{c}^T \overline{v} \,/ \left[A\right] \overline{v} = \overline{b}, \overline{v} \geq \overline{0}$$

$$D : \max \overline{\lambda}^T \overline{b} \,/\, \overline{\lambda}^T \left[A\right] + \overline{\eta}^T = c^T, \overline{\eta} \geq \overline{0}$$

$$gap = \overline{c}^T \overline{v} - \overline{b}^T \overline{\lambda} = \left(\lambda^T \left[A\right] + \eta^T\right) \overline{v} - \overline{v}^T \left[A^T\right] \overline{\lambda} = \overline{\eta}^T \overline{v}$$

potenciálová funkce:

$$F\left(\overline{\eta}, \overline{v}\right) = q.\log\left(\overline{\eta}^T \overline{v}\right) - \sum_{\forall j} \log v_j - \sum_{\forall j} \log \eta_j, q > n$$

Postupné LP:

$$opt\left\{f(\overline{x}^{(k)}) + \nabla_{\overline{x}}^T f\left(\overline{x}^{(k)}\right) \bullet \Delta\overline{x}\right\}$$ **lin. funkce**

$$\overline{\Gamma}\left(x^{(k)}\right) + \left[J_\Gamma\right] \Delta\overline{x} = \overline{0}$$ **podm. rovnosti**

$$\overline{\Phi}^L \leq \left\{\overline{\Phi}\left(\overline{x}^{(k)}\right) + \left[J_\Phi\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right] \Delta\overline{x}\right\} \leq \overline{\Phi}^U$$ **podm. nerovnosti**

$$\overline{x}^L \leq \overline{x}^{(k)} \leq \overline{x}^U$$ **omezení veličin**

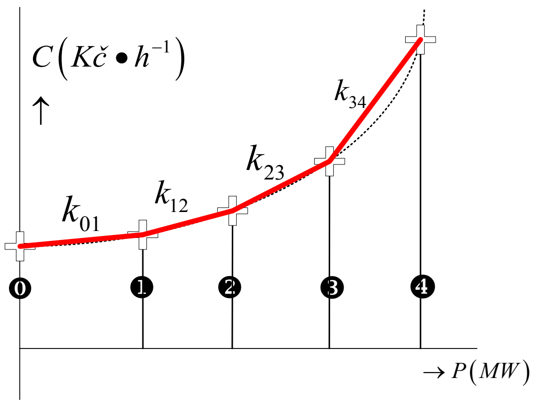
$\left[J_\Gamma\right], \left[J_\Phi\right]$ Jakobiány vektorových funkcí $\overline{\Gamma}\left(\overline{x}\right), \overline{\Phi}\left(\overline{x}\right)$

Algoritmus postupného LP.

1. **iniciace startovacího bodu** $\overline{\xi}^0$ **; k=1**
2. **řešení ustáleného stavu** $\overline{\Gamma}_R(\overline{x}) = \overline{0}$
3. **je li optimalita true pak konec jinak pokračuj**
4. **linearizace fce a omez. podmínek**
5. **k:=k+1;LP řešení nových hodnot** $\overline{\xi}^{(k)}$

2-LP-Lineární programování

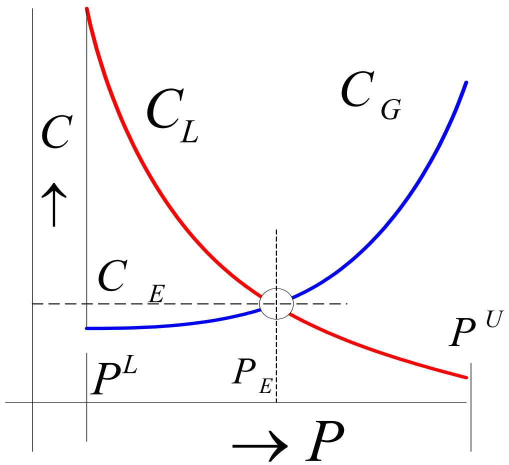
Úlohy s LP.



nákladová křivka:

$$C(P) = C_0 + \sum_{j=1}^{\partial j} k_{j-1,j} P_j$$

$$\sum_{j=1}^{\partial j} P_j = P$$



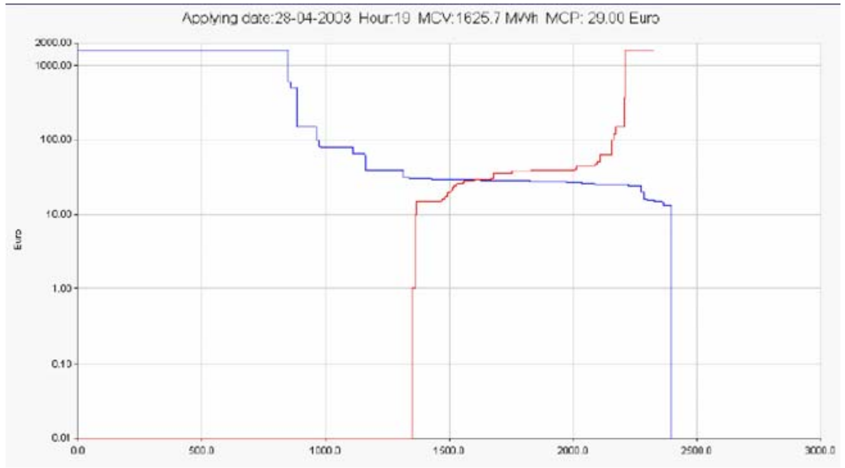
Tržní mechanizmus:

C=G(P)nabídka
generace výkonu
při daných cenách
C=L(P) Poptávka
po odběru výkonu
při daných cenách
C_E..rov. cena
nabídka=poptávce

$$formulace\ rovnovážné\ ceny:$$

$$P_E \rightarrow C_E = \arg\max \left\{ \int_{P^L}^{P^U} \left(C_L\left(P\right) - C_G\left(P\right)\right) dP, \middle| \begin{matrix} P_E = P_L = P_G \\ C_E = C_L = C_G \end{matrix} \right\}$$

2-LP-Lineární programování



Matematická formulace úlohy:

$$\max\left(\sum_{i \subseteq G} P_i C_i - \sum_{j \subseteq L} P_j C_j\right) \ldots \begin{matrix} \text{maximalizace plochy} \\ \text{mezi křivkami} \end{matrix}$$

$$\sum_{i \subseteq G} P_i - \sum_{j \subseteq L} P_j = 0, \qquad P_{i,} P_j \geq 0$$