Ekonomický dispečink výkonů

Určete optimální rozložení výkonů zdrojů a jejich poměrné přírůstky v bezeztrátové síti, jsou-li jejich nákladové funkce:

$$C_1(P_1) = 10000 + 400.P_1 + 1,2.P_1^2$$
$$C_2(P_2) = 8000 + 500.P_2 + 0,6.P_2^2$$
$$C_3(P_3) = 9000 + 520.P_3 + 0,7.P_3^2$$
$$C_4(P_4) = 9500 + 630.P_4 + 2,4.P_4^2$$

Celkový dodávaný výkon činí: $P_L = 100$ MW

a) Bez omezení výkonu zdrojů
b) Za předpokladu omezení zdrojů $20 \le P_1 \le 60$, $10 \le P_2 \le 40$, $0 \le P_3 \le 10$ a $30 \le P_4 \le 100$

Návod

I. FORMULACE ÚLOHY

Optimalizační úloha má v tomto případě bezeztrátové sítě tvar:

$$\overline{P}^* = \arg\left[\operatorname*{opt}_{\overline{P}\in X}\left(\sum_{i=1}^{N} C_i(P_i)\right)\right] = \arg\left[\operatorname*{opt}_{\overline{P}\in X}\left(\sum_{i=1}^{N} a_{2i}.P_i^2 + a_{1i}.P_i + a_{0i}\right)\right]$$

kde *X* je přípustná oblast (množina daná omezeními) ve tvaru:

$$X = \left\{\overline{P} \in \mathbb{R}^N : \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} P_i = P_L \text{ a } \overline{P}_{\min} \le \overline{P} \le \overline{P}_{\max}\right\}$$

II. OPTIMALIZACE BEZ HORNÍCH A SPODNÍCH OMEZENÍ VÝKONŮ

Protože cílová funkce je součet všech nákladů $f(\overline{P}) = \sum_{i=1}^{N} C_i(P_i)$ a zbývá jediné omezení pro výkony $g_P(\overline{P}) = \sum_{i=1}^{N} P_i - P_L = 0$, bude mít Lagrangeova funkce tvar:

$$L(\overline{P}, \lambda_P) = f(\overline{P}) + \lambda_P.g_P(\overline{P}) = \sum_{i=1}^{N} C_i(P_i) + \lambda_P.\left(\sum_{i=1}^{N} P_i - P_L\right)$$

Protože v optimu musí platit $\nabla L(\overline{P}^*, \lambda_P^*) = \overline{0}$ budou jednotlivé derivace:

$$\frac{\partial L(\overline{P}, \lambda_P)}{\partial P_i} = \frac{\partial C_i(P_i)}{\partial P_i} + \lambda_P = b_i + \lambda_P = 0 \text{ a } \frac{\partial L(\overline{P}, \lambda_P)}{\partial \lambda_P} = \sum_{i=1}^{N} P_i - P_L = 0$$

kde b_i je **poměrný přírůstek** pro *i*-tý zdroj. Z podmínky pro nulový gradient Lagrangeovy funkce vyplývá důležitý vztah:

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_N = -\lambda_P = b$$

tedy, že v bezeztrátové soustavě, ve které nejsou výkony zdrojů omezeny, nastává optimum v případě, že jsou **poměrné přírůstky všech zdrojů stejné**.

Bude-li nákladová funkce každého zdroje ve tvaru $C_i\left(P_i\right) = a_{2i}.P_i^2 + a_{1i}.P_i + a_{0i}$, dá se poměrný přírůstek vyjádřit jako $b = b_i = 2.a_{2i}.P_i + a_{1i} = b_{1i}.P_i + b_{0i}$ a pro *i*-tý výkon bude platit:

$$P_i = \frac{b - b_{0i}}{b_{1i}}$$

Z podmínky pro součet výkonů:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i - P_L = \sum_{i=1}^{N} \frac{b - b_{0i}}{b_{1i}} - P_L = b.\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{b_{1i}} - \sum_{i=1}^{N} \frac{b_{0i}}{b_{1i}} - P_L = 0 \text{ a tedy } b = \frac{P_L + \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{b_{0i}}{b_{1i}}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{b_{1i}}}$$

Tím je dáno rozdělení všech výkonů v optimu.

III. OPTIMALIZACE S RESPEKTOVÁNÍM HORNÍCH A SPODNÍCH OMEZENÍ VÝKONŮ

Lagrangeova funkce má v tomto případě tvar:

$$L\left(\overline{P}, \lambda_P, \overline{\nu}_{\min}, \overline{\nu}_{\max}\right) = \sum_{i=1}^{N} C_i\left(P_i\right) + \lambda_P.\left(\sum_{i=1}^{N} P_i - P_L\right) + \overline{\nu}_{\min}^T.\left(\overline{P} - \overline{P}_{\min}\right) + \overline{\nu}_{\max}^T.\left(\overline{P}_{\max} - \overline{P}\right)$$

S respektováním podmínky pro optimum $\nabla L\left(\overline{P}^*, \lambda_P^*, \overline{\nu}_{\min}^*, \overline{\nu}_{\max}^*\right) = \overline{0}$ budou jednotlivé derivace:

$$\frac{\partial L\left(\overline{P}, \lambda_P, \overline{\nu}_{\min}, \overline{\nu}_{\max}\right)}{\partial P_i} = \frac{\partial C_i\left(P_i\right)}{\partial P_i} + \lambda_P + \nu_{\min i} - \nu_{\max i} = b_i + \lambda_P + \nu_{\min i} - \nu_{\max i} = 0 \text{ a}$$

$$\frac{\partial L\left(\overline{P}, \lambda_P\right)}{\partial \lambda_P} = \sum_{i=1}^{N} P_i - P_L = 0$$

Bude-li splněno $P_{\min i} \le P_i \le P_{\max i}$, bude na základě KKT podmínek $\nu_{\min i} = \nu_{\max i} = 0$. Pro všechny takové výkony bude platit:

$$\frac{\partial C_i\left(P_i\right)}{\partial P_i} + \lambda_P + 0 - 0 = b_i + \lambda_P = b + \lambda_P = 0 \quad \text{a} \quad P_i = \frac{b - b_{0i}}{b_{1i}}$$

V opačném případě bude $\nu_{\min i} \neq 0$, (resp. $\nu_{\max i} \neq 0$) a $P_i = P_{\min i}$, (resp. $P_i = P_{\max i}$). Tím je dáno rozdělení všech výkonů v optimu i v tomto případě. Zbývá najít společnou hodnotu *b*, která bude generovat takové rozdělení výkonů, že $g_P(b) = \sum_{i=1}^{N} P_i(b) - P_L = 0$. Řešení úlohy existuje právě tehdy, když $b \in \langle b_{\min}, b_{\max} \rangle$, přičemž

$$b_{\min} = \min\left[\left\{b_i\left(P_{\min i}\right), i = 1..N\right\}\right] \text{ a } b_{\max} = \max\left[\left\{b_i\left(P_{\max i}\right), i = 1..N\right\}\right]$$

Protože $g_P(b)$ je na intervalu $\langle b_{\min}, b_{\max} \rangle$ spojitá (ale ne spojitě diferencovatelná) a rostoucí, je možné najít řešení $g_P(b) = 0$ např. **metodou dělení intervalu**. Je-li na celém intervalu $g_P(b) < 0$ nebo $g_P(b) > 0$ nemá úloha řešení.

Výsledky

a) Řešíme-li optimalizaci bez omezení, bude:

$$P_1 = 60{,}78 \text{ MW},\ P_2 = 38{,}24 \text{ MW},\ P_3 = 18{,}49 \text{ MW},\ P_4 = -17{,}52 \text{ MW}$$
$$b = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 545{,}9$$

b) Řešíme-li optimalizaci s horními a spodními mezemi výkonů zdrojů, bude:

$$P_1 = 50{,}71 \text{ MW},\ P_2 = 18{,}08 \text{ MW},\ P_3 = 1{,}21 \text{ MW},\ P_4 = 30{,}00 \text{ MW}$$
$$b = b_1 = b_2 = b_3 = 521{,}7,\ b_4 = 774$$