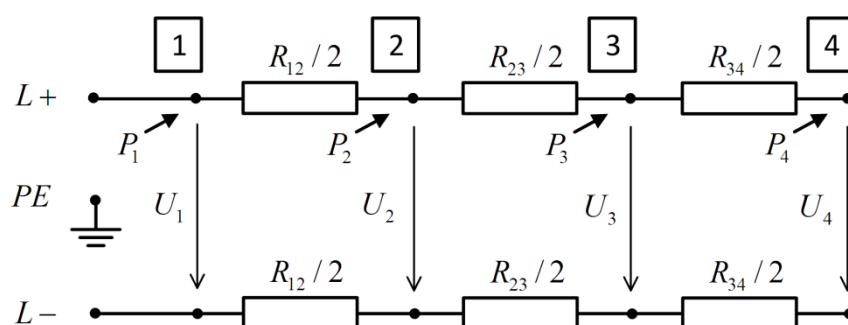


## Optimalizace nelineárních úloh

Pro DC obvod na obrázku pro  $U_1 = 220$  V a  $U_4 = 215$  V dopočítejte napětí  $U_2$  a  $U_3$ , při kterých budou ztráty v síti  $\Delta P_z$  minimální. Řešte pomocí Lagrangeových multiplikátorů metodou Newton Approach

- bez dalších omezujících podmínek
- s omezujícími podmínkami celkového odebíraného výkonu v uzlech 2 a 3  $P_2 + P_3 = -1000$  W.
- s omezujícími podmínkami celkového odebíraného výkonu v uzlech 2 a 3  $P_2 + P_3 \geq -1000$  W.
- úlohy b) a c) řešte místo Lagrangeových multiplikátorů pomocí penalizačních funkcí



$$R_{12} = 1,2 \, \Omega, R_{23} = 0,8 \, \Omega, R_{34} = 1,6 \, \Omega$$

### Návod

#### I. LAGRANGEOVY MULTIPLIKÁTORY, FUNKCE, JEJÍ GRADIENT, HESSIÁN

Hledáme-li

$$\bar{x}^* = \arg \left( \min_{\bar{x} \in D} [f(\bar{x})] \right) \quad D = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}, \bar{h}(\bar{x}) \geq \bar{0} \}$$

Za předpokladu spojitě diferencovatelnosti  $f(\bar{x})$ ,  $\bar{g}(\bar{x})$  a  $\bar{h}(\bar{x})$  jsou Karush-Khun-Thuckerovy (KKT) podmínky pro regulární bod optima  $\bar{x}^*$ :

- $\nabla_{\bar{x}} L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*) = \bar{0}$
- $\bar{g}(\bar{x}^*) = \nabla_{\bar{\lambda}} L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*) = \bar{0}$
- $\bar{h}(\bar{x}^*) = \nabla_{\bar{\nu}} L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*) \geq \bar{0}$  přičemž  $\forall j \in \{1, \dots, \partial \bar{h}\}: \nu_j^* \cdot h_j(\bar{x}^*) = 0$

kde Lagrangeovou funkcí rozumíme:

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) = f(\bar{x}) + \bar{\lambda} \cdot \bar{g}(\bar{x}) + \bar{\nu} \cdot \bar{h}(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{\partial \bar{g}} \lambda_i \cdot g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{\partial \bar{h}} \nu_j \cdot h_j(\bar{x})$$

kde  $\lambda_i \forall i \in \{1, \dots, \partial \bar{g}\}$  a  $\nu_j \forall j \in \{1, \dots, \partial \bar{h}\}$  jsou Lagrangeovy multiplikátory.

Třetí podmínku lze interpretovat jako: je-li jediné omezení typu nerovnost a ostatní typu rovnost pak buď  $\bar{x}^*$  neleží na hranici, kterou vymezuje daná podmínka  $h_j(\bar{x})$ , ale pak musí být  $\nu_j^* = 0$  protože musí platit  $\nu_j^* \cdot h_j(\bar{x}^*) = 0$  (tj. omezení je neaktivní, optimalizace se nezúčastňuje, stačí provést optimalizaci bez tohoto omezení a zkontrolovat jestli  $\nabla_{\nu_j} L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, 0) > 0$ ) nebo  $\bar{x}^*$  leží na hranici, kterou vymezuje daná podmínka  $h_j(\bar{x})$ , pak ale musí platit, že  $h_j(\bar{x}^*) = 0$  (tj. platí, že  $\nabla_{\nu_j} L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, 0) \leq 0$ , omezení je aktivní a chová se jako omezení typu rovnost, optimalizaci je nutné provést znovu s dalším omezením  $h_j(\bar{x}) = 0$ ).

Pro náš případ jsou cílovou funkcí  $f(\bar{x})$  ztráty, které se dají vyjádřit jako:

$$\Delta P_z = \frac{(U_1 - U_2)^2}{R_{12}} + \frac{(U_2 - U_3)^2}{R_{23}} + \frac{(U_3 - U_4)^2}{R_{34}}$$

Proměnné  $\bar{x}$  jsou v našem případě napětí  $U_2$  a  $U_3$  (tj.  $\bar{U}$ )

Výkon  $i$ -tého uzlu (zdrojová orientace):

$$P_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{R_{i,i-1}} + \frac{U_i - U_{i+1}}{R_{i,i+1}}$$

Uvažujeme-li pouze omezení typu rovnost (s omezeními typu nerovnost buď nepočítáme, nebo počítáme jako s dodatečnými omezeními typu rovnost), bude pro Lagrangeovu funkci platit:

$$\nabla L(\bar{U}^*, \bar{\lambda}^*) = \bar{0} \text{ kde } L(\bar{U}, \bar{\lambda}) = \Delta P_z(\bar{U}) + \bar{\lambda} \cdot \bar{g}(\bar{U})$$

Metodou Newton Approach po krocích postupně aktualizujeme původně vybrané proměnné přičtením přírůstku. Pro přírůstek v  $k$ -tém kroku platí:

$$\Delta(\bar{U}_k, \bar{\lambda}_k) = -[\mathbf{W}(\bar{U}_k, \bar{\lambda}_k)] \cdot \nabla L(\bar{U}_k, \bar{\lambda}_k)$$

kde  $[\mathbf{W}]$  je tzv. ovroubený Hesián v  $k$ -tém kroku je

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{W}(\bar{U}_k, \bar{\lambda}_k) \right] &= \nabla^2 L(\bar{U}_k, \bar{\lambda}_k) = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{U}^2} \right] & \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{U} \partial \bar{\lambda}} \right] \\ \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{U} \partial \bar{\lambda}} \right]^T & \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{\lambda}^2} \right] \end{bmatrix}_{\substack{\bar{U}=\bar{U}_k \\ \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_k}} = \\ &= \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{U}^2} \right] & \left[ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{U}} \right] \\ \left[ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{U}} \right]^T & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}_{\substack{\bar{U}=\bar{U}_k \\ \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_k}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{H}] & [\mathbf{J}] \\ [\mathbf{J}]^T & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kde  $[\mathbf{H}]$  je Hessova matice Langrangeovy funkce a  $[\mathbf{J}]$  je Jacobiho funkcionální matice omezujících podmínek

## II. OPTIMALIZACE BEZ OMEZUJÍCÍCH PODMÍNEK

Jedná-li se o optimalizaci bez omezení (úloha a) ) tj.  $U_2, U_3 \in \mathbb{R}$  , je Lagrangeova funkce:

$$L(U_2, U_3) = \Delta P_z(U_2, U_3)$$

její gradient:

$$\nabla L(U_2, U_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta P_z}{\partial U_2} \\ \frac{\partial \Delta P_z}{\partial U_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \left( \frac{U_2 - U_1}{R_{12}} - \frac{U_2 - U_3}{R_{23}} \right) \\ 2 \cdot \left( \frac{U_3 - U_2}{R_{23}} - \frac{U_3 - U_4}{R_{34}} \right) \end{pmatrix}$$

Ovroubený Hesián i Hessova matice jsou identické:

$$\left[ \mathbf{W}(U_2, U_3) \right] = \left[ \mathbf{H}(U_2, U_3) \right] = \nabla^2 L(U_2, U_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta P_z}{\partial U_2^2} & \frac{\partial^2 \Delta P_z}{\partial U_2 \partial U_3} \\ \frac{\partial^2 \Delta P_z}{\partial U_2 \partial U_3} & \frac{\partial^2 \Delta P_z}{\partial U_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{R_{12}} + \frac{2}{R_{23}} & -\frac{2}{R_{23}} \\ -\frac{2}{R_{23}} & \frac{2}{R_{23}} + \frac{2}{R_{34}} \end{bmatrix}$$

Protože pro bod optima  $(U_2, U_3)^*$  musí platit  $\nabla L(U_2, U_3) \stackrel{!}{=} \bar{\mathbf{0}}$  a gradient obsahuje pouze lineární funkce je v tomto případě úloha snadno analyticky ověřitelná.

## III. OPTIMALIZACE S OMEZENÍM TYPU ROVNOST

Jedná-li se o optimalizaci s omezením  $g_1$  (omezení typu rovnost - úloha b) ), je Lagrangeova funkce:

$$L(U_2, U_3, \lambda_1) = \Delta P_z + \lambda_1 \cdot g_1 = \Delta P_z(U_2, U_3) + \lambda_1 \cdot (P_2(U_2, U_3) + P_3(U_2, U_3) + 1000)$$

její gradient:

$$\nabla L(U_2, U_3, \lambda_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial U_2} \\ \frac{\partial L}{\partial U_3} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta P_z}{\partial U_2} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial U_2} \\ \frac{\partial \Delta P_z}{\partial U_3} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial U_3} \\ g_1 \end{pmatrix}$$

a Ovroubený Hesián:

$$[\mathbf{W}(U_2, U_3, \lambda_1)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta P_z}{\partial U_2^2} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial U_2^2} & \frac{\partial^2 \Delta P_z}{\partial U_2 \partial U_3} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial U_2 \partial U_3} & \frac{\partial g_1}{\partial U_2} \\ \frac{\partial^2 \Delta P_z}{\partial U_2 \partial U_3} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial U_2 \partial U_3} & \frac{\partial^2 \Delta P_z}{\partial U_3^2} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial U_3^2} & \frac{\partial g_1}{\partial U_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial U_2} & \frac{\partial g_1}{\partial U_3} & 0 \end{bmatrix}$$

V našem případě jsou Karush-Khun-Thuckerovy (KKT) podmínky pro optimum:

$$\frac{\partial L}{\partial U_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial U_3} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = P_2(U_2, U_3) + P_3(U_2, U_3) + 1000 = 0.$$

#### IV. OPTIMALIZACE S OMEZENÍM TYPU NEROVNOST

Jedná-li se o optimalizaci s omezením  $h_1$  (omezení typu rovnost - úloha c), má Lagrangeova funkce stejný tvar:

$$L(U_2, U_3, \nu_1) = \Delta P_z + \nu_1 \cdot h_1 = \Delta P_z(U_2, U_3) + \nu_1 \cdot (P_2(U_2, U_3) + P_3(U_2, U_3) + 1000)$$

její gradient a Ovroubený Hesián vychází stejně jako v předchozím případě. Rozdílné jsou KKT podmínky. V našem případě jsou KKT podmínky pro optimum:

$$\frac{\partial L}{\partial U_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial U_3} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \nu_1} = P_2(U_2, U_3) + P_3(U_2, U_3) + 1000 \geq 0.$$

Optimum nalezneme tak, že spočteme optimum bez tohoto omezení a bude-li platit  $\frac{\partial L}{\partial \nu_1} \geq 0$ , jsou

splněny KKT podmínky a našli jsme optimum zadané úlohy. Bude-li naopak  $\frac{\partial L}{\partial \nu_1} < 0$ , je třeba novu

spočítat optimum s omezením typu rovnost (tj.  $\nu_1 \rightarrow \lambda_1$  a  $h_1 \rightarrow g_1$ ) tak aby  $\frac{\partial L}{\partial \nu_1} = 0$ . V tomto

případě optimum leží na hraničním bodě množiny dané omezením.

## V. PENALIZAČNÍ FUNKCE

Omezující podmínky můžeme také odstranit tím, že hledáme optimum rozšířené cílové funkce:

$$\Phi(U_2, U_3) = \Delta P_z(U_2, U_3) + F_p(U_2, U_3)$$

kde  $F_p(U_2, U_3)$  je penalizační funkce, která by měla mít hodnotu 0, je-li omezující podmínka splněna a v ideálním případě  $F_p \rightarrow \infty$  jinde. Protože musí být navíc  $F_p$  spojitě diferencovatelná, je praktický požadavek na penalizační funkci mimo  $D: F_p \rightarrow$  co nejvyšší hodnota vzhledem k  $\Delta P_z$ .

Použijeme-li externí penalizaci, může mít penalizační funkce pro omezení typu rovnost tvar:

$$F_p(U_2, U_3) = g_1^2 = (P_2(U_2, U_3) + P_3(U_2, U_3) + 1000)^2$$

pro omezení typu nerovnost:

$$F_p = \{\max[0, h_1]\}^2 \text{ je-li } h_1 \leq 0 \text{ a } F_p = \{\max[0, -h_1]\}^2 \text{ je-li } h_1 \geq 0 \text{ a}$$

v našem případě:

$$F_p(U_2, U_3) = \{\max[0, -h_1]\}^2 = \{\max[0, -(P_2(U_2, U_3) + P_3(U_2, U_3) + 1000)]\}^2$$

## Výsledky

- a)  $U_2 = 218,3 \text{ V}$  a  $U_3 = 217,2 \text{ V}$  ( $\Delta P_z = 6,9 \text{ W}$ ,  $P_2 = P_3 = 0 \text{ W}$ )
- b)  $U_2 = 215,1 \text{ V}$  a  $U_3 = 214,0 \text{ V}$  ( $\Delta P_z = 21,8 \text{ W}$ ,  $P_2 = -578,3 \text{ W}$  a  $P_3 = -421,7 \text{ W}$ )
- c) Protože  $\frac{\partial L}{\partial V_1} = 1000 \geq 0$ , bude optimum stejné jako v a)
- d) Výsledky stejné jako v b) a c) jen výpočetně náročnější