VYSOKONAPĚŤOVÉ ZKUŠEBNICTVÍ

#2 Nejistoty měření

Přesnost měření

- Klasický způsob vyjádření přesnosti měření – chyba měření:

Absolutní chyba

$$\Delta(X) = X(M) - X(S)$$

Relativní chyba

$$\delta(X) = \frac{X(M)}{X(S)}$$

- X(M) je naměřená hodnota

- X(S) je pravá (správná) hodnota, která není známá a využívá se tzv. konvenčně správná hodnota

Nejistota měření

- Skutečná hodnota leží s určitou pravděpodobností v „toleračním pásmu“ okolo výsledku měření - šířku tohoto pásma charakterizuje nejistota měření
- Mezinárodní úřad pro míry a váhy (BIPM) JCGM 100:2008 - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (definice pojmů a vztahů, příklady jejich aplikace)

Základní definice

- Měřená hodnota
  - Střední prvek souboru, který reprezentuje měřenou veličinu
- Nejistota měření
  - Parametr přiřazený k výsledku měření charakterizující rozptýlení hodnot, které lze odůvodněně pokládat za hodnotu veličiny, jež je objektem měření

Kvantitativní popis nejistoty měření

- Standardní nejistota = standardní (směrodatná) odchylka veličiny, pro níž je nejistota udávána
  - Standardní nejistota typu A – u_A
    - Vyhodnocena ze statistického rozložení výsledků měření
    - Charakterizována experimentální standardní odchylkou
  - Standardní nejistota typu B – u_B
    - Vznikající ze známých a odhadnutelných příčin
    - Vyhodnocena z předpokládaného pravděpodobnostního rozdělení

Kvantitativní popis nejistoty měření

– Kombinovaná standardní nejistota – u_C

$$u_C = \sqrt{{u_A}^2 + {u_B}^2}$$

– Rozšířená standardní nejistota - U

$$U(x) = k_r\, u_C(x)$$

– Koeficient rozšíření – k_r

- k_r = 2 odpovídá 95 % pravděpodobnosti výskytu skutečné hodnoty v intervalu <– U(x), + U(x)>
- k_r = 3 odpovídá 99,7 % pravděpodobnosti výskytu skutečné hodnoty v intervalu <– U(x), + U(x)>
- u nejistoty musí být vždy udán koeficient rozšíření!

Standardní nejistota typu A

- Směrodatná odchylka výběrových průměrů

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

- Neplatí pro méně jak 10 vzorků měření!
- Pokud neumíme provést kvalifikovaný odhad na základě zkušeností, lze nejistotu s méně jak 10 vzorky měření stanovit přibližně ze vztahu s korekčním činitelem

Standardní nejistota typu A

$$u_A(x) = k_S \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

- Tabulka pro určení korekčního činitele

n	2	3	4	5	6	7	8	9
k_s	7	2,3	1,7	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2

- Pro n < 5 je nejistota neúměrně veliká a měření je tudíž pouze informativní

Standardní nejistota typu B

- Postup při stanovení nejistoty typu B
  - Stanoví se možné zdroje nejistot Z_j (použité metody, měřící přístroje, nepřesné konstanty a etalony, …)
  - Odhadne se maximální rozsah odchylek $\pm z_{j,max}$ od správné hodnoty, aby jeho překročení bylo málo pravděpodobné
  - Odhadne se jakému rozdělení pravděpodobnosti odpovídají odchylky Δz_j v intervalu $<-z_{j,max}, +z_{j,max}>$

Standardní nejistota typu B

- Obvykle výpočet z více zdrojů nejistot

$$u_B(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} {u_{x,z_j}}^2}$$

$$u_{x,z_j} = \frac{\Delta z_{j,max}}{m}$$

- Hodnota m závisí na druhu rozdělení
  - m = 3 Gaussovo rozdělení
  - m = √6 trojúhelníkové rozdělení
  - m = √3 rovnoměrné rozdělení
  - …

Standardní nejistota typu B

- Pokud neumíme odpovědně rozhodnout o tom jaké rozdělení použít, využijeme rovnoměrné rozdělení – nejjednodušší a nejčastější
- Použití rovnoměrného rozdělení přináší vyšší hodnotu nejistoty (v celém intervalu $< -z_{j,max}$, $+ z_{j,max} >$ je stejná pravděpodobnost výskytu správné hodnoty měřené veličiny)

Standardní nejistota typu B – příklad 1

- Měřené střídavé napětí 60 V analogovým voltmetrem rozsahu 100 V
  - Od výrobce údaj přesnosti: TP = 0,5 (0,5%)
  - Výpočet $u_{B,U}$

$$\Delta z_{j,max} = \frac{TP \cdot rozsah}{100} = \frac{0{,}5 \cdot 100}{100} = 0{,}5\ V$$

$$u_{B,U} = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} = 0{,}289\ V$$

Standardní nejistota typu B – příklad 2

- Měření DC pomocí číslicového multimetru

Section 1: DC Voltage

DC Voltage

Range	Full Scale	Maximum Resolution	Input Impedance	Temperature Coefficient (ppm of Reading + ppm of Range) / °C	
				Without ACAL[1]	With ACAL[2]
100 mV	120.00000	10 nV	> 10 GΩ	1.2 + 1	0.15 + 1
1 V	1.20000000	10 nV	> 10 GΩ	1.2 + 0.1	0.15 + 0.1
10 V	12.0000000	100 nV	> 10 GΩ	0.5 + 0.01	0.15 + 0.01
100 V	120.000000	1 μV	10 MΩ ± 1%	2 + 0.4	0.15 + 0.1
1000 V	1050.00000	10 μV	10 MΩ ± 1%	2 + 0.04	0.15 + 0.01

Accuracy[3] [ppm of Reading (ppm of Reading for Option 002) + ppm of Range]

Range	24 Hour[4]	90 Day[5]	1 Year[5]	2 Year[5]
100 mV	2.5 + 3	5.0 (3.5) + 3	9 (5) + 3	14 (10) + 3
1 V	1.5 + 0.3	4.6 (3.1) + 0.3	8 (4)+ 0.3	14 (10) + 0.3
10 V	0.5 + 0.05	4.1 (2.6) + 0.05	8 (4) + 0.05	14 (10) + 0.05
100 V	2.5 + 0.3	6.0 (4.5) + 0.3	10 (6)+ 0.3	14 (10) + 0.3
1000 V[6]	2.5 + 0.1	6.0 (4.5) + 0.1	10 (6) + 0.1	14 (10) + 0.1

Standardní nejistota typu B – příklad 2

- Měření DC napětí 7,5 V na rozsahu 10 V číslicového multimetru
  - Od výrobce údaj přesnosti (accuracy) pro rozsah (range) 10 V: 14 ppm ze čtení (readings) + 0,05 ppm z rozsahu (range)
  - Výpočet u_B

$$u_{B,U} = \frac{\frac{14}{10^6} \cdot 7{,}5 + \frac{0{,}05}{10^6} \cdot 10}{\sqrt{3}} = 60{,}9 \cdot 10^{-6}\ V$$

Pozn.: ppm = parts per million (miliontina celku)

Standardní nejistota typu B – příklad 3

- Měření pomocí číslicového multimetru (AC and DC)

A ⎓ and ~	40 mA	400 mA	10 A
Voltage drop (1)	200 mV	1 V	400 mV
Digital resolution	1 µA	10 µA	1 mA
Bargraph resolution	0.1 mA	1 mA	100 m A
Accuracy in DC	± 0.5% rdg ± 5 counts		± 1.5% rdg ± 10 counts
Accuracy (2) in AC	± 0.9% rdg ± 10 counts		± 1.5% rdg ± 5 counts
Protection (3)	Fuse 0.5 A HBC		Fuse 12 A HBC

Standardní nejistota typu B – příklad 3

- Měření DC proudu 3,2 A na rozsahu 10 A číslicového multimetru
  - Od výrobce údaj přesnosti (accuracy) pro rozsah (range) 10 A: 1,5 % ze čtení (reading) + 10 kvantizačních kroků (counts)
  - Rozlišení (digital resolution) na rozsahu 10 A:
    1 mA (1 mA = 1 kvantizační krok přístroje)
  - Upravený zápis přesnosti: 1,5 % ze čtení + (10 · 1mA)
  - Výpočet u_B

$$u_{B,I} = \frac{\frac{1{,}5}{10^2} \cdot 3{,}2 + (10 \cdot 0{,}001)}{\sqrt{3}} = 0{,}033\ A$$

Standardní nejistota typu B – příklad 4

- Kalibrace analogového voltmetru přesnějším analogovým voltmetrem
- Dva zdroje nejistot typu B
  - Chyba čtení ze stupnice voltmetru 0,5 dílku (odhad) na rozsahu 100 voltů (100 dílků stupnice)
  - Nejistota přesného voltmetru dána kalibračním listem: U = 0,2 % (k_r = 2) na rozsahu 100 V

Standardní nejistota typu B – příklad 4

$$u_{B,V1} = \frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0,288\ V$$

$$u_{B,V2} = \frac{0,2}{2 \cdot 100} \cdot 100 = 0,1\ V$$

Potom celková nejistota typu B:

$$u_{B,V} = \sqrt{{u_{B,V1}}^2 + {u_{B,V2}}^2} = \sqrt{0,288^2 + 0,1^2}$$

$$= 0,305\ V$$

Nejistoty při nepřímých měřeních

- Nejistota veličiny, která je funkcí více proměnných (funkce více měřených veličin)
  - Platí pouze při vzájemné nezávislosti měřených veličin x_i !

$\hat{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$ *… vektor proměnných*

$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$ *… funkční závislost*

Kombinovaná standardní nejistota veličiny y:

$$u_y(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\bar{x}}^{2} {u_{x_i}}^{2}}$$

u_{x_i} *… standardní kombinovaná nejistota i-té měřené veličiny* x_i

Zjednodušení výpočtu nejistot nepřímých měřeních

Násobení konstantou	$\boldsymbol{V = aX}$	$\boldsymbol{u_V = a u_X}$
Součet/ Rozdíl	$\boldsymbol{V = X \pm Y}$	$\boldsymbol{u_V} = \sqrt{u_X^2 \pm u_Y^2}$
Součin	$\boldsymbol{V = XY}$	$\boldsymbol{u_V = XY}\sqrt{\left(\frac{u_x}{X}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{u_y}{Y}\right)^{\mathbf{2}}}$, $\boldsymbol{u_{r,V}} = \sqrt{u_{r,X}^2 + u_{r,Y}^2}$
Podíl	$\boldsymbol{V = \frac{X}{Y}}$	$\boldsymbol{u_V = \frac{X}{Y}}\sqrt{\left(\frac{u_x}{X}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{u_y}{Y}\right)^{\mathbf{2}}}$, $\boldsymbol{u_{r,V}} = \sqrt{u_{r,X}^2 + u_{r,Y}^2}$
Mocnina	$\boldsymbol{V = X^k}$	$\boldsymbol{u_{r,V} = k u_{r,X}}$

kde $u_{r,X} = \frac{u_X}{X}$, $u_{r,Y} = \frac{u_Y}{Y}$, $u_{r,V} = \frac{u_V}{V}$ *jsou relativní nejistoty měření*

Nejistoty při nepřímých měřeních – příklad 1

- Výpočet a určení standardní nejistoty odporu
  - Navázáno na předchozí příklady – měření DC napětí (7,5 V) a proudu (3,2 A)

Výpočet odporu ze změřeného I a U:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{7,5}{3,2} = 2,3438\ \Omega$$

Nejistoty při nepřímých měřeních – příklad 1

Kombinovaná standardní nejistota veličiny R:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} u_I\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{I} u_U\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2} u_I\right)^2}$$

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{1}{3{,}2} \cdot 60{,}9 \cdot 10^{-6}\right)^2 + \left(\frac{7{,}5}{3{,}2^2} \cdot 0{,}033\right)^2}$$

$$= 0{,}0242\ \Omega$$

Nejistoty při nepřímých měřeních – příklad 1

Relativní hodnota u_R: 1,05 % z hodnoty 2,34 Ω

Zjednodušený výpočet:

$$u_{r,R} = \sqrt{{u_{r,U}}^2 + {u_{r,I}}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{60{,}9 \cdot 10^{-6}}{7{,}5}\right)^2 + \left(\frac{0{,}033}{3{,}2}\right)^2} = 0{,}01031$$

$$u_{r,R} \doteq 1{,}03\ \%$$

$$u_R = 0{,}01031 \cdot 2{,}3438 = 0{,}0242\ \Omega$$

Zápis výsledků měření

- Výsledná hodnota veličiny V se zapisuje ve tvaru:

$$V = (\bar{V} \pm U_V) \cdot jednotka$$

- S pravidly:
  - Nejistota měření U_V se vždy zaokrouhluje na jedno platné místo (kromě hodnot, které mají na druhém desetinném místě číslici 1 nebo 2, ty se zaokrouhlují na dvě platná místa)
  - Počet cifer aritmetického průměru se omezí tak, aby řád jeho poslední cifry byl shodný s řádem poslední číslice nejistoty, zaokrouhlujeme vždy směrem nahoru

Zápis výsledků měření - příklady

- Příklad 1:

Zjištěné hodnoty napětí:

$$\overline{U_p} = 15{,}0321\ kV, U_{U_p} = 0{,}0567\ kV$$

Zapsaný výsledek měření:

$$U_p = (15{,}04 \pm 0{,}06)\ kV$$

- Příklad 2:

Zjištěné hodnoty napětí:

$$\bar{I} = 1{,}5361\ mA, U_I = 0{,}413\ mA$$

Zapsaný výsledek měření:

$$I = (1{,}54 \pm 0{,}42)\ mA$$