Průmyslová energetika
X15PEN

přednáška č. 6

Jan Špetlík

spetlij@fel.cvut.cz - v předmětu emailu „PEN”

Katedra elektroenergetiky, Fakulta elektrotechniky ČVUT, Technická 2, 166 27 Praha 6

Modální analýza

1. volné proudy
2. modální analýza
3. módy operátorové [Z] matice
4. dva mag. vázané obvody
   - odstranění převodu
   - normalizace
5. módy[Z] matice synchr stroje
6. výpočet parametrů synchr. stroje
7. přehled časových konstant stroje

Volné proudy

systém 2.řádu:

$$a_2 y^{\bullet\bullet} + a_1 y^{\bullet} + a_0 y = b_2 u^{\bullet\bullet} + b_1 u^{\bullet} + b_0 u$$

$$\left(a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) y(s) - \left(a_2 s \;\; + a_1\right) y^0 =$$

$$= \left(b_2 s^2 + b_1 s + b_0\right) u(s) - \left(b_2 s + b_1\right) u^0$$

$$y(s) = \underbrace{\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}_{\text{vnucené}} u(s) + \underbrace{\frac{\left(a_2 s \;\; + a_1\right) y^0 - \left(b_2 s + b_1\right) u^0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}_{\text{volné}}$$

$\Rightarrow$ Vnucené řešení je přenosová funkce mezi u(s) a y(s)

$\Rightarrow$ Volné veličiny (např. proudy) jsou přechodným dějem závislým na počátečních podmínkách

Stavová reprezentace systému

- Obecný popis lineárního dynamického systému:

stavová (systémová) matice

vstupní matice

stavové proměnné

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}(t).\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}(t).\boldsymbol{u}(t)$$

vst. proměnné ("budící")

výst. proměnné

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \mathbf{C}(t).\boldsymbol{y}(t) + \mathbf{D}(t).\boldsymbol{u}(t)$$

výstupní matice

přechodová matice

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_k(t) \end{bmatrix}$$

- Nevyskytují-li se y(t) ani u(t), je systém *autonomní*:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}(t).\boldsymbol{x}(t)$$

Stavová reprezentace systému

- Je-li systém nelineární:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \mathbf{h}\left(\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t)\right)$$

- Autonomní systém:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{x}(t)\right)$$

- $\boldsymbol{x}^*$ pro které $\mathbf{f}\left(\boldsymbol{x}^*\right) = \mathbf{0}$ nazýváme *ekvilibrium* systému
- Obsahuje-li systém navíc algebraické rovnice:

$$[x]^\bullet = \vec{f}\left([x],[y]\right)$$ **diferenciální rovnice (x.. stavové veličiny, y …nestavové veličiny)**

$$[0] = \vec{g}\left([x],[y]\right)$$ **algebraické rovnice**

Stavová reprezentace systému

- Provedeme-li linearizaci prvních rovnic:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1(1)} \\ \dots \\ \dot{x}_{n(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{x}_{1(2)} \\ \dots \\ \dot{x}_{n(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_{(1)} \to \boldsymbol{x}_{(2)}} \begin{bmatrix} x_{1(1)} - x_{1(2)} \\ \dots \\ x_{n(1)} - x_{n(2)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{y}_{(1)} \to \boldsymbol{y}_{(2)}} \begin{bmatrix} y_{1(1)} - y_{1(2)} \\ \dots \\ y_{n(1)} - y_{n(2)} \end{bmatrix}$$

- Ve zkráceném zápise $\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right].\Delta\boldsymbol{x} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{y}}\right].\Delta\boldsymbol{y}$

Stavová reprezentace systému

- Celkově:

$$\Delta[x]^{\bullet}=\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial[x]}\right)\Delta[x]+\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial[y]}\right)\Delta[y],\quad [0]=\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial[x]}\right)\Delta[x]+\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial[y]}\right)\Delta[y]$$

- Eliminace alg. rovnic a vytvoření autonomního systému:

$$\Delta[y]=-\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial[y]}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial[x]}\right)\Delta[x]$$

$$\Delta[x]^{\bullet}=\underbrace{\left\{\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial[x]}\right)-\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial[y]}\right)\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial[y]}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial[x]}\right)\right\}}_{[A]}\Delta[x]$$

$$\det\left\{[A]-\lambda[1]_{d}\right\}=0\quad \textit{charakteristická rovnice}$$

Modální analýza systému

ν…. řád [A]

i= 1:ν počítací index **λ_i… vlastní číslo**

$[m_i]$ pravostranný vlastní vektor

$[n_i]$ levostranný vlastní vektor

$[\Lambda_d]$ diagonální matice vlastních čísel

$[M]=[[m_1]\ldots[m_\nu]]$,

$$[N]=\begin{bmatrix} [n_1]^T \\ \bullet \\ [n_\nu]^T \end{bmatrix}$$

Modální analýza systému

$$[A].[m_i] = \lambda_i [m_i] \qquad [n_i]^T.[A] = \lambda_i [n_i]^T$$

$$[A].[M] = [M][\Lambda_d] \qquad [N].[A] = \Lambda_d.[N]$$

$$[M]^{-1}[A].\underbrace{[M][M]^{-1}}_{[1_d]} = [M]^{-1}[M][\Lambda_d][M]^{-1} \Rightarrow \textit{porovnáním}$$

$$[N] = [M]^{-1} \Rightarrow [n_i][m_i] = 1 \Rightarrow [n_i] \perp [m_i]$$

$$[A] = [M][\Lambda_d][M]^{-1} = [M][\Lambda_d][N]$$

Modální analýza systému

$$[\Delta x]^{\bullet} = [A][\Delta x] = [M][\Lambda_d]\underbrace{[N][\Delta x]}_{[Z]}$$

$$[Z]^{\bullet} = [\Lambda_d][Z], \quad [Z_0] = [N][\Delta x_0]$$

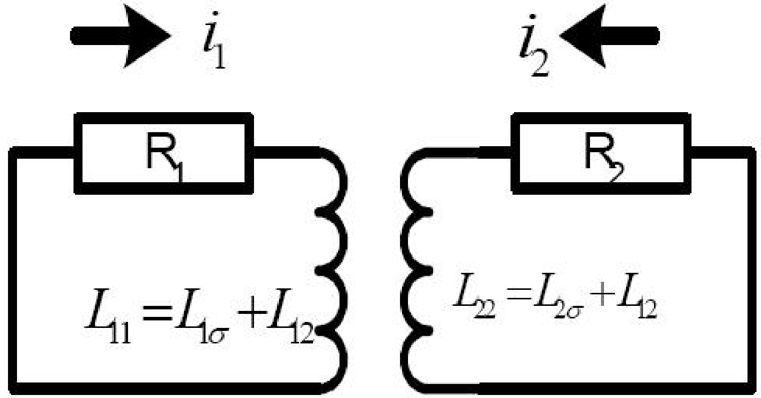
$$\left[Z(t)\right] = e^{[\Lambda_d]t}.[Z_0]$$

$$\left[\Delta x(t)\right] = [M]e^{[\Lambda_d]t}[N][\Delta x_0]$$

Módy mag. vázaných obvodů

Vlastní čísla λ operátorové impedanční matice Z(s) určují časové konstanty volných proudů !

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 + s\,L_{11} & s\,L_{12} \\ s\,L_{12} & R_2 + s\,L_{22} \end{bmatrix}}_{Z(s)=\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} i_{v1} \\ i_{v2} \end{bmatrix} = 0$$



$$význam:\ T_1 = \frac{L_{11}}{R_1}, \quad T_2 = \frac{L_{22}}{R_2} \quad \text{, časové konstanty vinutí}$$

$$\sigma_{12} = 1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11}\,L_{22}}, \quad 0 \le \sigma \le 1 \quad \text{,činitel rozptylu}$$

Módy mag. vázaných obvodů

$$\det Z(s) = \sigma_{12} T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1 = 0,$$

$$q = \sqrt{1 - \frac{4\sigma_{12} T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2}}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(T_1 + T_2)(1 \mp q)}{2\sigma_{12} T_1 T_2} \text{ vlastní čísla},$$

$$(T_1 + T_2)^2 = (T_1 - T_2)^2 + 4T_1 T_2, \Rightarrow$$

$$4\sigma T_1 T_2 < (T_1 + T_2)^2 \Rightarrow q \in \{\Re\}$$

$$T' = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{2\sigma_{12} T_1 T_2}{(T_1 + T_2)(1 - q)} = \frac{(1 + q)(T_1 + T_2)}{2} \text{ přechodná}$$

$$T'' = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{2\sigma_{12} T_1 T_2}{(T_1 + T_2)(1 + q)} \qquad \text{rázová}$$

$$T' + T'' = T_1 + T_2, \qquad T'' \langle\langle T'$$

Módy mag. vázaných obvodů

$$\frac{K_{21}}{K_{11}} = a = \frac{R_1 T' - L_1}{L_{12}} = \frac{L_{11}}{L_{12}}\left(\frac{T'}{T_1} - 1\right),$$

$$\frac{K_{22}}{K_{12}} = b = \frac{R_1 T'' - L_1}{L_{12}} = \frac{L_{11}}{L_{12}}\left(\frac{T''}{T_1} - 1\right),$$

systém rovnic: $K_{11} + K_{12} = i_{v10}, \quad a K_{11} + b K_{12} = i_{v20},$

$$K_{11} = \frac{b}{b-a} i_{v10} - \frac{1}{b-a} i_{v20},$$

$$K_{12} = i_{v10} - K_{11},$$

Módy mag. vázaných obvodů

výsledek:

$$T_\Delta = T_1 + T_2 - 2T'' \,, \quad \text{pomocná konstanta}$$

$$K_{11} = \frac{T_1 - T''}{T_\Delta} i_{v10} + \frac{L_{12}}{L_{11}} \cdot \frac{T_1}{T_\Delta} i_{v20} \,,$$

$$K_{12} = \frac{T_2 - T''}{T_\Delta} i_{v10} + \frac{L_{12}}{L_{11}} \cdot \frac{T_1}{T_\Delta} i_{v20} \,.$$

$$\frac{K_{12}}{K_{22}} = c = \frac{R_2 T'' - L_{22}}{L_{12}} \,,$$

$$\frac{K_{11}}{K_{21}} = d = \frac{R_2 T' - L_{22}}{L_{12}} \,,$$

systém rovnic:

$$K_{21} + K_{22} = i_{v20} \,, \quad d\, K_{21} + c\, K_{22} = i_{v10} \,,$$

Módy mag. vázaných obvodů

$$K_{21} = \frac{c}{c-d} i_{v20} - \frac{1}{c-d} i_{v10},$$

$$K_{22} = i_{v20} - K_{21},$$

$$K_{21} = \frac{T_2 - T''}{T_\Delta} i_{v20} + \frac{L_{12}}{L_2} \cdot \frac{T_2}{T_\Delta} i_{v10}.$$

$$\begin{bmatrix} i_{v1} \\ i_{v2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{T'}} \\ e^{-\frac{t}{T''}} \end{bmatrix}$$