2. Základní pojmy a definice

K popisu náhodných dějů (*random events*) nelze použít běžné matematické prostředky (*common mathematical means*). Přesto však lze náhodu kvantifikovat. Souvisejícími otázkami se zabývají dvě matematické disciplíny (*disciplines*): teorie pravděpodobnosti (*probability theory*) a matematická statistika (*mathematical statistics*).

Teorie pravděpodobnosti řeší problém, kdy určitý jev může mít řadu následků (*consequences*). Náhoda (*accident*) určuje, který z těchto následků nastane. Matematická statistika řeší problém opačný (*opposite*), kdy se k danému jevu určují možné příčiny (*causes*) a hledá se ta nejvěrohodnější (*the most likely*) z nich. Obě tyto disciplíny jsou založeny na dobře propracovaných matematických teoriích (analýza, lineární algebra (*linear algebra*), teorie množin, teorie míry (*measure theory*) atd.). Přestože tyto teorie nepřinášejí v tomto případě (až na výjimky) nové postupy, dávají již známým metodám novou interpretaci (*interpretation*).

Náplní tohoto kurzu je aplikace teorie pravděpodobnosti v určité oblasti projektové činnosti (*design activity*), kde je nutno respektovat vlivy různých nejistot. Nejistota se vyskytuje (*occurs*) ve třech základních podobách (*in three basic ways*). Nastává jednak tehdy, měříme-li nějakou veličinu, nebo předpovídáme-li další závislosti z měřených dat (*measured data*). Chyby (errors) měření (nejistoty) se ovšem často neberou v úvahu. Další nejistota spočívá v tom, že jistá událost může či nemusí nastat, nebo nevíme, kdy nastane. Jako příklad lze uvést dobu, za niž dojde k výpadku transformátoru (*outage of a transformer*) v rozvodně. Konečně třetí nejistota je spojena s nedokonalostí často značně zjednodušených modelů, které užíváme k řešení většiny složitých technických problémů.

A nyní již přikročme ke klasické definici (*classical definition*) pravděpodobnosti (pochází od Laplacea (*by Laplace*)).

Def. 02.01: *Může-li vykázat určitý jev N (N konečné) různých, vzájemně se vylučujících (mutually exclusive) výsledků, které jsou stejně možné (ať už na základě symetrie, homogenity apod.), a má-li M těchto výsledků nevyhnutelně (inevitably) za následek realizaci jevu A, přičemž zbylých N - M výsledků tuto realizaci vylučuje, pak pravděpodobnost P, že nastane jev A, je dána vztahem (given by relation)*

$$P(A) = \frac{M}{N}. \qquad (02.01)$$

Tuto definici lze ovšem využít jen v omezeném množství (*limited amount*) případů. Nelze ji například využít tehdy, jestliže:

- všech možností je nekonečně mnoho ($N \to \infty$),
- výsledky nejsou "stejně" možné (pak je nutno definovat, co znamená, že nejsou "stejně" možné, a s definicí se dostáváme do uzavřeného kruhu).

Z těchto důvodů nelze klasickou definici pravděpodobnosti pokládat za definici matematickou. Lze ji však v mnoha případech použít jakožto algoritmus výpočtu. V takovém případě se hodnoty N a M často určují na základě známých kombinatorických vzorců (*combinatorial formulas*), jež následují.

Uspořádaný výběr (*ordered selection*) **(variace) bez opakování** (*repetition*)**:** je dána skupina n prvků $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Ze skupiny se vybírá k-krát po sobě po jednom prvku, a vybraný prvek se už nevrací. Počet všech různých k-tic, které lze takto utvořit je $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Je-li $k = n$, jedná se o permutaci (*permutation*): počet všech takových n-tic je $n!$

Uspořádaný výběr (variace) s opakováním: je dána skupina n prvků $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Ze skupiny se vybírá k-krát po sobě po jednom prvku, a vybraný prvek se vždy před novým výběrem vrátí. Počet všech různých k-tic, které lze takto utvořit je n^k.

Neuspořádaný výběr bez opakování (kombinace (*combination*))**:** je dána skupina n prvků $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Počet různých podskupin po k prvcích, které lze z této skupiny vybrat, je roven $\binom{n}{k}$.

Neuspořádaný výběr s opakováním: je dána skupina n prvků $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Ze skupiny se postupně vybere k-krát po jednom prvku, který se poté vrátí. Počet různých podskupin po k prvcích, které lze takto ze skupiny vybrat, je roven $\binom{n+k-1}{k}$.

Pokusme se nyní vybudovat matematický model pravděpodobnosti. Mějme N vzájemně se vylučujících výsledků (N konečné či nekonečné). Označme Ω množinu všech těchto výsledků. Každý prvek této množiny (označme jej ω_i, $i = 1,\ldots,N$) nyní představuje jakýsi nejjednodušší jev (nazýváme jej elementárním jevem). Tyto elementární jevy nemusí být stejně možné (snadno pochopíme, představíme-li si nesymetrickou kostku (*unsymmetrical cube*) na házení o různé velikosti stěn).

Tahám kartu z mariášové hry (*marriage card deck*). Jev, že vytáhnu žaludské eso (*club ace*), je elementární. Jev, že vytáhnu jakékoli eso, již elementární není (mohu vytáhnout žaludské, zelené (*spade*), kulové (*diamond*) či červené (*heart*) eso) a sestává ze čtyř elementárních jevů.

Množina Ω může mít diskrétní nebo spojitý (*continuous*) charakter. V diskrétní množině je každý jev diskrétní entitou (*discrete entity*), přičemž počet vzorků (*number of samples*) může být konečný či nekonečný (*finite or infinite*). Příkladem konečné diskrétní množiny je množina výsledků získaných při hodu kostkou (*dice rolling*), příkladem nekonečné diskrétní množiny může být množina přirozených čísel (*set of the natural numbers*). Ve spojité množině je vždy nekonečný počet jevů (např. směr větru (*wind direction*), jenž se mění spojitě).

Každý jev A (ať už elementární, či nikoli), jehož pravděpodobnost chceme stanovit, lze pak vyjádřit jakožto podmnožinu množiny Ω. Označme δ systém všech podmnožin množiny Ω. Pravděpodobnost P bude pro nás nyní funkce, která jevům $A \in \delta$ přiřazuje reálná čísla $P(A)$ tak, že

$$P(A) \in \langle 0,1 \rangle, \quad P(\Omega) = 1, \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i), \tag{02.02}$$

přičemž poslední rovnost nastává tehdy, jsou-li $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ různé, navzájem disjunktní prvky (*disjunct elements*) z δ. Nyní již tedy můžeme axiomaticky definovat pravděpodobnostní model.

Def. 02.02: *Pravděpodobnostním modelem nazýváme trojici (Ω, δ, P), kde*

- *Ω je množina všech různých, vzájemně se vylučujících výsledků (elementárních jevů ω_i, $i = 1,\ldots,N$),*
- *δ je takový systém podmnožin (subsets) množiny Ω (jevů), pro nějž platí*

$$\Omega \in \delta, \quad A \in \delta \Rightarrow \Omega - A \in \delta, \quad A_1,\ldots,A_k \in \delta \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \delta, \tag{02.03}$$

- *funkce P z $\delta \to \langle 0,1 \rangle$, kterou nazýváme pravděpodobnostní mírou, či krátce pravděpodobností, má vlastnosti (properties)*

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\Omega - A) = P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i), \tag{02.04}$$

přičemž poslední rovnost nastává tehdy, jsou-li $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ různé, navzájem disjunktní prvky z δ. $\overline{A}$ je doplňkový jev (complementary event) k A vzhledem k Ω.

K předchozí definici ještě dvě poznámky (*remarks*). Každý systém δ, který splňuje podmínky (02.03), nazýváme σ-algebrou (systém δ přitom vůbec nemusí obsahovat všechny podmnožiny množiny Ω, ale jen některé). Rovnice (02.04) může splňovat celá řada funkcí, avšak jen jedna z nich odpovídá dané realitě (*corresponds to the given reality*).

Z předchozí definice okamžitě plynou tyto důsledky:

platí-li pro dva jevy $A, B \in \delta$ relace $A \subset B$, pak $P(A) \le P(B)$,

platí-li pro dva jevy $A, B \in \delta$ relace $A \subset B$, pak $P(B-A) = P(B) - P(A)$, (02.05)

pro libovolné dva jevy $A, B \in \delta$ platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dále lze využít obecnější de Morganovy formule ve tvaru

$$\overline{\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{\mathrm{n}}\right)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{\mathrm{n}}}, \quad \overline{\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{\mathrm{n}}\right)} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_{\mathrm{n}}} \qquad (02.06)$$

a vztah

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\mathrm{n}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} P(A_i) - \sum P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{\mathrm{n}-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n). \qquad (02.07)$$

Abychom mohli počítat pravděpodobnosti výskytu různých jevů, musíme ještě umět určovat pravděpodobnost elementárních jevů. Tuto pravděpodobnost lze určovat buď subjektivně (*subjectively*) (intuice (*intuition*), předchozí zkušenosti), nebo prováděním experimentů (*by performing experiments*). Nejintuitivnější způsob přiřazování pravděpodobnosti určitým jevům je prostřednictvím relativní četnosti (*relative frequency*). Představme si, že testujeme N vzorků, z nichž M vyhovuje našim požadavkům (jev A). Pak poměr M/N určuje relativní četnost jevu A. Pro N rostoucí do nekonečna pak lze tuto relativní četnost nazvat pravděpodobností $P(A)$. Tedy

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{M}{N}. \qquad (02.08)$$

Tento způsob určování pravděpodobnosti se jeví jako přijatelný (zejména pokud se nejedná o destruktivní zkoušky (*destructive tests*)) a úzce souvisí s její klasickou definicí. Problémem bývá skutečnost, že některé jevy se vyskytují extrémně zřídka (*extremely rarely*). Zde se velmi obtížně hovoří o relativní četnosti (nelze o nich dost dobře ani uvažovat). Přesto však se souvisejícími nejistotami musíme počítat. Uvažujme například problém, který musí řešit projektant ochran (*protection device designer*), který potřebuje odhadnout pravděpodobnost, že vypínač nesepne, když má. Ačkoli se jedná o velmi řídký jev, občas se přihodí. Pak lze vzít v úvahu subjektivní pravděpodobnost, kterou je jeho víra (*belief*), že k jevu může dojít.

Další alternativou, jak definovat pravděpodobnost, je nezáporná míra (*non-negative measure*) spojená s libovolným jevem, která má určité vlastnosti a splňuje určitá pravidla (*certain rules*). To však již patří do sofistikovanější (*more sophisticated*) matematické teorie.

Příklad 2.1

Část bezpečnostního systému (*safety system*) jaderné elektrárny sestává ze čtyř dieselagregátů (*diesel generator*) pro dodávku energie pro dvě vodní čerpadla (*water pumps*) v případě nouze (*emergency*). Ve skutečnosti však pracují vždy jen dva dieselagregáty. Nechť i označuje počet poškozených (*damaged*) agregátů a j počet poškozených čerpadel. Množina

$$\Omega \equiv \left\{A_{ij} : i = 0,1,2,3,4;\ j = 0,1,2\right\}$$

pak obsahuje $i{\cdot}j$ elementárních jevů, kde A_{ij} označuje jev současné poruchy i agregátů a j čerpadel. Nyní lze specifikovat dílčí jevy:

- nejvýše jeden agregát je v provozu: $\left\{A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{40}, A_{41}, A_{42}\right\}$,
- právě jedno čerpadlo je v provozu: $\left\{A_{01}, A_{11}, A_{21}, A_{31}, A_{41}\right\}$,

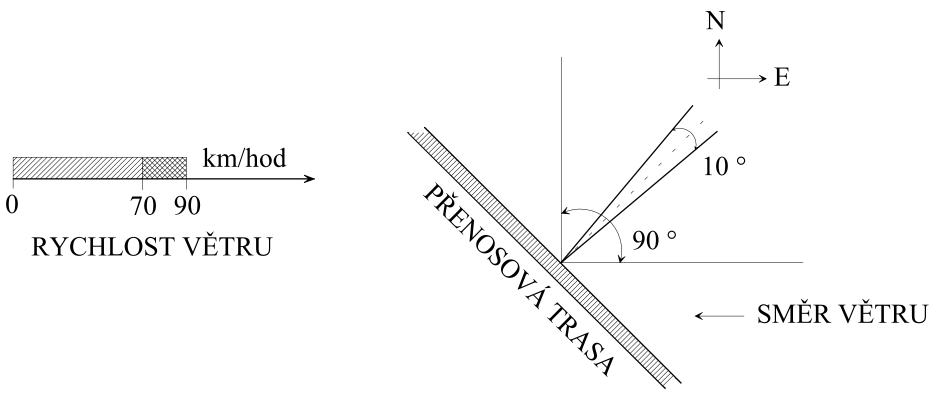
- počet porouchaných částí je menší než 3: $\{A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}, A_{20}, A_{02}\}$.

Příklad 2.2

Při plánování přenosových tras se využívá záznamů o počasí (*weather records*), které obsahují rychlost větru a jeho směr v oblasti, kde bude trasa vybudována. Trasa bude zbudována ze severozápadu (*north-west*) na jihovýchod (*south-east*). Vítr může vát (*blow*) z východu až ze severu (0 - 90°) a jeho rychlost se mění od 0 - 90 km/hod. Návrhář potřebuje znát následující pravděpodobnosti:

- že rychlost větru bude vyšší než 70 km/hod,
- že směr větru (*wind direction*) se bude pohybovat v intervalu -5° až 5° od kolmice (*perpendicular line*) k vedení.

V tomto případě se jedná o dva jevy a příslušný prostor (*sample space*) bude sestávat ze všech možných dvojic (*pairs*) směrů větru a jeho rychlosti. Nás však zajímají tyto jevy jednotlivě. Pokud je pravděpodobnost všech směrů a všech rychlostí stejná, je pravděpodobnost, že rychlost větru bude vyšší než 70 km/hod (90-70)/90 = 2/9 a pravděpodobnost, že vítr bude foukat z daného směru 10/90 = 1/9 (uvažujeme desetistupňovou oblast, přičemž celkový rozsah (*total range*) je 90°, viz obr. 2.1).



Obr. 2.1: K příkladu 2.2

Příklad 2.3

Stovka dřevěných stožárů (*wood poles*) byla podrobena destruktivním testům, aby se zjistil jejich modul v lomu (*modulus of rupture*). Výsledky jsou v tabulce:

jev	modul v lomu	počet pozorování	četnost
A_1	2.0 - 2.9	7	0.07
A_2	3.0 - 3.9	35	0.35
A_3	4.0 - 4.9	43	0.43
A_4	5.0 - 5.9	15	0.15

Pokud by bylo k dispozici více vzorků, mohlo by být jevů více (i s modulem nižším než 2.0 či vyšším než 6). Nyní však můžeme usoudit, že jejich počet by zřejmě nebyl příliš velký. Pravděpodobnost, že modul nebude menší než 4 nyní odhadneme na (43 + 15)/100 = 0.58 (ve skutečnosti (*in fact*) se jedná o četnost pro případ 100 vzorků).

Příklad 2.4

Uvažujme elektrárnu sestávající ze čtyř parních jednotek (*steam units*). Množina Ω sestává z počtu porouchaných (*damaged*) jednotek. Tedy

$$\Omega = \{0,1,2,3,4\}.$$

Jestliže A_1 je jev, kdy alespoň jedna jednotka pracuje (elementární jevy {0,1,2,3}), a A_2 je jev, kdy alespoň 3 jednotky pracují (jevy {0,1}), je $A_1 \cup A_2 \equiv \{0,1,2,3\}$, $A_1 \cap A_2 \equiv \{0,1\}$.

Příklad 2.5

Testy napěťové odolnosti (*voltage endurance*) izolátorů (10 kusů v krabici) byly prováděny tímto způsobem, že z každé krabice byly vyzkoušeny dva náhodně vybrané izolátory (*randomly taken insulators*). Pokud byly oba dobré, krabice byla přijata (*accepted*). Je třeba nalézt pravděpodobnost, že krabice bude přijata, obsahuje-li k (k = 0,…,8) vadných (*substandard*) izolátorů.

Množina Ω obsahuje všechny dvojice izolátorů v krabici. Těchto dvojic (neuspořádaný výběr bez opakování - kombinace) je $\binom{10}{2}$ = 45. V krabici po úspěšné kontrole může ovšem zůstat k špatných izolátorů (*failed insulators*). Počet dobrých izolátorů v krabici je pak 10 - k, a počet dobrých dvojic je (10 - k)·(9 - k)/2. Ostatní jsou nepříznivé (*unfavourable*). V dalším je uvedena příslušná tabulka (*table*).

k =	0	1	2	3	4	5	6	7	8
počet dobrých dvojic	45	36	28	21	15	10	6	3	1
počet špatných dvojic	0	9	17	24	30	35	39	42	44
pravděpodobnost	1	0.8	0.622	0.467	0.333	0.222	0.133	0.066	0.022

Tak například u krabice, v níž jsou 2 špatné izolátory, je pravděpodobnost jejího přijetí 0.622 (je příliš vysoká, a proto tuto metodu nelze pokládat za přijatelnou).

Příklad 2.6

Předpokládejme, že generátor může selhat buď v důsledku poruchy na svorkách (*fault at the terminals*), nebo v důsledku poruchy v obvodu buzení (*excitation circuit*). Nechť A a B označují tyto poruchové jevy. Předpokládejme, že $P(A) = p$, $P(B) = q$ a pravděpodobnost, že oba jevy nastanou současně $P(A \cap B) = r$. Je třeba určit:

- jev, že generátor selže výlučně (*exclusively*) v důsledku poruchy na svorkách je $E = A \cap \overline{B}$, odkud $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = p - r$,
- jev, že generátor vůbec neselže (*will not fail*) v důsledku žádné poruchy, je $F = \overline{A} \cap \overline{B} = \left(\overline{A \cup B}\right)$, a protože $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - p - q + r$,
- jev, že generátor selže v důsledku právě jedné poruchy (*exactly one fault*): $G = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cup \overline{B}\right)$ a $P(G) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(A \cap \overline{B}\right) - P\left(\overline{A} \cap B \cap A \cap \overline{B}\right) = q - r + p - r = p + q - 2r$.

Podmíněná pravděpodobnost (*conditional probability*) **a nezávislost jevů**

Často nás zajímá odhad pravděpodobnosti jevu současně se znalostí, zda mohl nastat (*occur*) ještě i jiný jev (nebo nemohl nastat). Chceme například odhadnout pravděpodobnost, že systém zůstane stabilní (*stable*) za předpokladu, že na konkrétním vedení vznikne trojfázový zkrat (*three-phase fault*). Tato pravděpodobnost bude jistě jiná, pokud by tento zkrat byl jednofázový (*one-phase fault*).

Def. 02.03: *Nechť A_1 a A_2 jsou dva jevy z množiny Ω a nechť $P(A_2) > 0$. Podmíněnou pravděpodobnost, že nastane A_1 (nastal-li již jev A_2), označujeme $P(A_1|A_2)$ a tato pravděpodobnost znamená, že se realizuje jev A_1, který patří do A_2. To znamená, že pravděpodobnost jevu A_1 vztahujeme na (relate to) pravděpodobnost A_2. Je tedy*

$$P\left(A_1|A_2\right)=\frac{P\left(A_1\cap A_2\right)}{P\left(A_2\right)},$$

takže

$$P\left(A_1\cap A_2\right)=P\left(A_1|A_2\right)\cdot P\left(A_2\right). \quad (02.09)$$

Následující vlastnosti podmíněných pravděpodobností lze snadno odvodit z definice (*may easily be derived from the definition*).

$$P\left(A\,|\,B\right)\in\left\langle 0,1\right\rangle, \quad (02.10)$$

$$B\subset A\Rightarrow P\left(A\,|\,B\right)=1. \quad (02.11)$$

Def. 02.04: *Úplným souborem (complete set) jevů nazýváme konečnou množinu $\left\{B_1,\dots,B_{\mathrm{n}}\right\}\in\delta$ takovou, že platí*

$$B_i\cap B_j=\varnothing \text{ pro } i\neq j,\;\; P\left(B_i\right)>0 \text{ pro } \forall i,\;\; P\left(\bigcup_{i=1}^{\mathrm{n}}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}P\left(B_i\right)=1. \quad (02.12)$$

Nyní již lze vyslovit větu:

Věta 02.01 (o úplné pravděpodobnosti): *Nechť $\left\{B_1,\dots,B_{\mathrm{n}}\right\}\in\delta$ je úplný soubor jevů. Nechť $A\in\delta$ je libovolný jev. Pak*

$$P\left(A\right)=\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}P\left(A\,|\,B_i\right)\cdot P\left(B_i\right). \quad (02.13)$$

Věta 02.02 (Bayesova): Nechť $\left\{B_1,\dots,B_{\mathrm{n}}\right\}\in\delta$ *je úplný soubor jevů, $A\in\delta$ je libovolný jev. Pak pro k = 1,...,n platí*

$$P\left(B_k\,|\,A\right)=\frac{P\left(A\,|\,B_k\right)\cdot P\left(B_k\right)}{P\left(A\right)}, \quad (02.14)$$

kde $P(A)$ je dáno vztahem (02.13).

Vskutku (*indeed*), $P\left(B_k\,|\,A\right)\cdot P\left(A\right)=P\left(A\,|\,B_k\right)\cdot P\left(B_k\right)=P\left(A\cap B_k\right)$.

Def. 02.05: *O jevech A_1 a A_2 říkáme, že jsou nezávislé (independent), jestliže*

$$P\left(A_1\cap A_2\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right). \quad (02.15)$$

Jevy jsou nezávislé, jestliže výskyt jednoho nemá vliv na výskyt (*occurrence*) druhého. Z předchozích vztahů lze odvodit, že

$$P\left(A_1\cap\dots\cap A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2|A_1\right)\cdot P\left(A_3|A_1\cap A_2\right)\cdot\dots\cdot P\left(A_n|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}\right) \quad (02.16)$$

a pokud jsou jevy nezávislé, platí

$$P\left(A_1\cap\dots\cap A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(A_3\right)\cdot\dots\cdot P\left(A_n\right). \quad (02.17)$$

Pozor, jsou-li jevy A a B na sobě nezávislé, nemohou být disjunktní a naopak.

Příklad 2.7

Uvažujme 150 km dlouhé venkovní vedení, které prochází homogenním terénem (*uniform terrain*). Porucha může vzniknout v jeho libovolném bodě (*at any point*). Porucha, která vznikne blízko konců vedení, má ovšem daleko závažnější (*more severe*) důsledky, než porucha ve střední oblasti (*middle section*). Definujme dva následující jevy: A - porucha nastane do 40 km od konce (nebezpečná) a B - porucha nastane ve střední části o délce 90 km (méně nebezpečná (*less dangerous*), na každé straně nastává 10 km přesah). Je zřejmé, že $P(A)$ =

80/150, $P(B)$ = 90/150. Předpokládejme nyní, že nastal jev B a určeme pravděpodobnost, že nastal současně v uvedeném 10 km přesahu. Chceme tedy zjistit podmíněnou pravděpodobnost

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{20/150}{90/150}=\frac{2}{9}.$$

Příklad 2.8

Předpokládejme, že pravděpodobnost poruchy přenosové trasy mezi dobami (*times*) t_1 a t_2 je dána funkcí

$$F\left(t_1,t_2\right)=\int_{t_1}^{t_2}0.001\cdot e^{-0.001t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Je třeba určit

- pravděpodobnost, že k poruše nedojde prvních tisíc hodin: rovná se 1 - F(0,1000) = 1 - $\left[-e^{-0.001t}\right]_0^{1000}$ = 1 + e^{-1} - 1 = 1/e.
- pravděpodobnost, že nedojde k poruše mezi 1000 a 3000 hodinou provozu (*operation*), nenastala-li porucha během prvních 1000 hodin: jedná se o podmíněnou pravděpodobnost, přičemž označíme A jev, kdy nedošlo k poruše během prvních 1000 hodin a B jev, kdy nedojde k poruše ani v dalších 2000 hodinách. Jev $A\cap B$ pak označuje, že k poruše nedošlo během prvních 3000 hodin. Pak

$$P\left(B\mid A\right)=\frac{P\left(B\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\frac{1+\left[e^{-0.001t}\right]_0^{3000}}{1+\left[e^{-0.001t}\right]_0^{1000}}=\frac{e^{-3}}{e^{-1}}=e^{-2}.$$

Příklad 2.9

U daného typu izolátoru se může objevit výrobní vada (*production fault*) s pravděpodobností p_1 = 0.01. Dostane-li se takový izolátor do provozu, je pravděpodobnost, že během záruční doby (*period of guarantee*) dojde k jeho poruše q_2 = 0.08, zatímco u zdravých výrobků je tato pravděpodobnost q_1 = 0.005. Je třeba určit pravděpodobnost, že izolátor, jenž se během záruční doby porouchá, měl uvedenou výrobní vadu.

Označme B_1 izolátory bez vady a B_2 izolátory s vadou. Dále označíme A izolátory, které se poškodí během záruční doby. Podle Bayesovy věty platí:

$$P\left(B_2\mid A\right)=\frac{P\left(A\mid B_2\right)\cdot P\left(B_2\right)}{P\left(A\mid B_1\right)\cdot P\left(B_1\right)+P\left(A\mid B_2\right)\cdot P\left(B_2\right)}=\frac{q_2\cdot p_1}{q_1\cdot\left(1-p_1\right)+q_2\cdot p_1}=$$

$$=\frac{0.08\times0.01}{0.005\times0.99+0.08\times0.01}=\frac{0.0008}{0.00575}=0.1391.$$

Příklad 2.10

Operátor řízení systému (*system control operator*) odhaduje, že denně v něm může dojít až k pěti poruchám, a to při těchto pravděpodobnostech:

- žádná porucha - P = 0.1489 (jev B_1),
- jedna porucha - P = 0.7 (jev B_2),
- dvě poruchy - P = 0.1 (jev B_3),
- tři poruchy - P = 0.05 (jev B_4),
- čtyři poruchy - P = 0.001 (jev B_5),
- pět poruch - P = 0.0001 (jev B_6).

Přitom se odhaduje, že s 50% pravděpodobností bude porucha trvat dlouho, tzn. že příslušná část systému se bude muset opravit (*repair*). Je třeba nalézt pravděpodobnost, že během dne nastanou nejvýše dvě poruchy trvalejšího charakteru (*of permanent character*).

Označme B_1 až B_6 příslušné navzájem se vylučující jevy množství poruch a A je jev, kdy jsou nejvýš (*no more than*) dvě poruchy trvalého charakteru. Podle věty o úplné pravděpodobnosti lze psát

$$P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$

a nyní nezbývá než určit jednotlivé hodnoty $P(A|B_i)$. Platí:
$P(A|B_1) = 1$ (nedojde-li k poruše, nemůže mít žádná z nich trvalý charakter),
$P(A|B_2) = 1$ (dojde-li jen k jedné poruše, nemohou mít více než dvě trvalý charakter),
$P(A|B_3) = 1$ (dojde-li ke dvěma poruchám, rovněž nemohou mít více než dvě trvalý charakter),
$P(A|B_4)$ již musíme spočítat. Dochází zde ke třem poruchám. Z toho $\binom{3}{0}$ poruch mohou být krátkodobé, v případě $\binom{3}{1}$ poruch může být 1 trvalá, v případě $\binom{3}{2}$ poruch dvě trvalé a v případě $\binom{3}{3}$ poruch tři trvalé (zde už jsme mimo hru). Odtud

$$P(A \mid B_4) = \frac{\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}}{\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}} = \frac{7}{8}.$$

Podobně
$$P(A \mid B_5) = \frac{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}}{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}} = \frac{11}{16}$$

a

$$P(A \mid B_6) = \frac{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}}{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

Po dosazení do (*after substituting into*) vztahu pro $P(A)$ vychází: $P(A) = 1{\cdot}0.1489 + 1{\cdot}0.7 + 1{\cdot}0.1 + 7/8{\cdot}0.05 + 11/16{\cdot}0.001 + 1/2{\cdot}0.0001 = 0.9934$.

Příklad 2.11

Má se rozhodnout, jaký typ spojení (*communication link*) má být zřízen mezi rozvodnou a řídicím střediskem (*control centre*). Možnosti jsou následující:

a) využití stávající telefonní linky (*telephone line*) pro přenos řídicích signálů (*control signals*) (jev B_1),
b) vybudování linky na bázi optokabelu (*fibre optic link*) (jev B_2),
c) využití mikrovlnného přenosu (*microwave transmission*) (jev B_3).

S ohledem na spolehlivost a cenu mají alternativy a), b) a c) šance k přijetí 1:2:3. Svou roli ovšem hraje i čas. Rozhodneme-li se pro alternativu a) bude připravena včas na 100%. Alternativa b) pouze na 75% a c) na 80%. Nyní je třeba zodpovědět tyto otázky:

- jaká je pravděpodobnost, že spojení bude hotovo včas?
- bude-li spojení hotovo včas, jaká je pravděpodobnost, že to bude telefonní linka?

- pokud nebude zvolena telefonní linka, jaká je pravděpodobnost, že se zvolí mikrovlnný systém?

Je zřejmé, že s ohledem na spolehlivost a cenu je pravděpodobnost pořízení alternativy a) $P(B_1) = 1/6$, b) $P(B_2) = 2/6 = 1/3$ a c) $P(B_3) = 3/6 = 1/2$. Jev, že spojení bude zajištěno včas, označme A a jeho pravděpodobnost můžeme určit z věty o úplné pravděpodobnosti

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0.8167 .$$

Pravděpodobnost, že se spojení realizuje prostřednictvím telefonní linky, spočteme z Bayesovy věty (*the Bayes Theorem*)

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{6}}{0.8167} = 0.2041 .$$

Nebude-li zvolena telefonní linka a šance na výběr mezi optickým kabelem a mikrovlnným zařízením zůstane 2:3, pak pravděpodobnost, že bude vybráno mikrovlnné zařízení, je

$$\frac{3}{2+3} = 0.6$$

(v tomto případě jsme ovšem nehleděli na časový faktor (*time factor*)).

Příklad 2.12

Byl objednán (*ordered*) soubor nových distančních ochran (*distance protections*). Existují tři dodavatelé (*suppliers*) X, Y a Z. Testy těchto ochran, týkající se jejich nastavení (*setting*), ukázaly, že: nastavení ochran od dodavatelů X a Y je s 5% pravděpodobností mimo povolené rozmezí (*allowable range*), u relé od dodavatele Z s 10% pravděpodobností. Dodávky o stejném množství ochran ($n > 3$) od dvou z těchto dodavatelů putovaly do oblasti, v níž 4 z nich byly instalovány na trasu. Během jejich provozu se přišlo na to, že právě jedna ochrana byla špatně nastavena. Je třeba určit pravděpodobnost, že jedním z dodavatelů je právě Z.

Označme jev B_1, že dodávka (*delivery, shipment*) byla realizována firmami X a Y a B_2 že byla realizována (*realised*) firmami X a Z nebo Y a Z. Pak $P(B_1) = 1/3$ a $P(B_2) = 2/3$. Označme jev, kdy právě jedno relé ze 4 je nastaveno špatně, jako A.

Pravděpodobnost, že právě jedno špatné relé je od firem X a Y je (z binomického rozvoje) $4 \cdot 0.05 \cdot 95^3 = 0.1715$, je-li od firem X a Z nebo Y a Z, je střední pravděpodobnost, že relé je špatně nastaveno, 7.5% a pravděpodobnost, že od těchto firem pochází je pak $4 \cdot 0.075 \cdot 925^3 = 0.2374$.

Podle věty o úplné pravděpodobnosti je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) = 0.1715 \cdot \frac{1}{3} + 0.2374 \cdot \frac{2}{3} = 0.2154$$

a podle Bayesovy věty

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{0.2374 \cdot \frac{2}{3}}{0.2154} = 0.7347 .$$

Příklad 2.13

Z důvodů vysokých nákladů (*high costs, large expenditures*) se kontroluje napájecí kabel (*feeding cable*) pro silnoproudý rozvod. Jeden z hlavních parametrů ovlivňujících zatížitelnost kabelu (*cable ampacity*) je tepelná vodivost půdy (*soil thermal resistivity*). Z literatury se zjistilo, že materiál, jímž se kabel zasypává (*backfill material*), má vyšší tepelnou vodivost, než se předpokládá v návrhu. Pokud je tomu tak, zatížitelnost kabelu může vzrůst a pokládku silnějšího (a také dražšího) kabelu lze odložit (*postpone*), což může přinést výrazné úspory (*significant savings*). Pravděpodobnost, že materiál má vyšší tepelnou vodivost, je 0.7 (a nižší 0.3). Ovšem naopak (*on the contrary*), je-li tato hodnota nižší, než se předpokládá, měl by se kabel nahradit (*the cable should be replaced*).

Proto bylo rozhodnuto zajímat se o to, na čem závisí tepelná vodivost půdy. Ukazuje se, že hlavně na vlhkosti (*moisture*) a kompaktnosti (*compactness*). I když měření se plánují v nejsušším (*the driest*) měsíci, lze usuzovat, že parametry půdy budou ovlivněny výběrem vzorků, dopravou (*transport*) a měřením. Je-li skutečná tepelná vodivost půdy nízká, je z 80% nízká i změřená vodivost (a vysoká 20%). Na druhé straně, pokud je skutečná vodivost vysoká, potvrdí ji testy v 70% (a ve 30% nepotvrdí). Předpokládejme, že výsledky testů naznačily nízkou tepelnou vodivost. Má se nalézt pravděpodobnost toho, že tato vodivost je skutečně nízká.

Označme B_1 jev, kdy je skutečná tepelná vodivost nízká a B_2 jev, kdy je vysoká. Nechť A je jev, že změřená vodivost je nízká. Tedy $P(A|B_1) = 0.8$, $P(A|B_2) = 0.3$, $P(B_1) = 0.3$, $P(B_2) = 0.7$. Pak $P(A) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.45$. Podle Bayesovy věty

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.45} = 0.533 .$$

Poněvadž projektant vidí, že pravděpodobnost, že vodivost je nižší, se zvýšila (také zřejmě díky atmosférickým podmínkám (*atmospheric conditions*) v době testu), provede další test, přičemž vyšly stejné hodnoty $P(A|B_1) = 0.8$, $P(A|B_2) = 0.3$. Nyní však už uvažuje $P(B_1) = 0.533$, $P(B_2) = 0.467$. Po opakovaném výpočtu zjistí, že

$$P'(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = 0.7527 .$$

Příklad 2.14

Plánuje se výstavba (*building*) elektrárny se třemi jednotkami. Časový horizont (*horizon*) je 10 let. Vzhledem k mnoha nejistotám, jež se mohou objevovat během schvalování (*approval process*), dodávek materiálu (*shipment of material*) a zařízení (*equipment*) může dojít k různým posuvům doby zahájení provozu. Za 10 let tedy:

- každý generátor bude definitivně v provozu (jev A),
- každý generátor může být v provozu (*in service*) (jev B),
- každý z generátorů bude ještě mimo provoz (*not in service*) (jev C).

Je třeba popsat všechny možné situace jednotlivých generátorů za 10 let a určit pravděpodobnost, že alespoň dva generátory budou definitivně za 10 let v provozu za předpokladu, že všechny stavy jsou přibližně stejně pravděpodobné.

Označme A – generátor po 10 letech v provozu, N – generátor mimo provoz

Gen. 1	Gen. 2	Gen. 3
A	A	A
A	N	A
A	A	N
A	N	N
N	A	A
N	A	N
N	N	A
N	N	N

Počet různých kombinací stavů $n = 8$. Počet kombinací m, kde se objevují alespoň 2 stavy typu A, je 4. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P = \frac{4}{8} = 0.5.$$

Příklad 2.15

Na venkovním vedení dojde k jedné poruše za rok s 30% pravděpodobností a ke dvěma poruchám s 10% pravděpodobností. Pravděpodobnost, že dojde k více poruchám, je zanedbatelná. Dojde-li k poruše, je pravděpodobnost 0.2, že bude trvalého (*permanent*) charakteru (znovuzapnutí (*re-switching on*) tuto poruchu neodstraní (*remove*)). Výpadky jsou na sobě nezávislé. Je třeba určit

- jaká je pravděpodobnost, že během roku nenastane žádná trvalá porucha na vedení,
- pokud je zátěž napájena dvěma takovými vedeními (přičemž stačí jedno), jaká je pravděpodobnost, že dojde k trvalému přerušení dodávky? Předpokládejme, že nastane-li na jednom vedení trvalejší porucha, na druhém vznikne trvalejší porucha s pravděpodobností 0.5.

Jev B_1 (0 poruch za rok) - $P(B_1) = 0.6$, jev B_2 (1 porucha za rok) - $P(B_2) = 0.3$, jev B_3 (2 poruchy za rok) - $P(B_3) = 0.1$, jev A - během roku na vedení nenastane žádná trvalejší porucha.

Podle věty o úplné pravděpodobnosti platí $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$, přičemž

$P(A|B_1) = 1$ (nedojde-li vůbec k poruše, nemůže být žádná trvalá),
$P(A|B_2) = 0.8$ (dojde-li k 1 poruše, není trvalá s pravděpodobností 0.8),
$P(A|B_3) = 0.64$ (dojde-li ke dvěma poruchám, pravděpodobnost, že žádná z nich není trvalá, je $0.8 \cdot 0.8 = 0.64$).
Pak $P(A) = 1 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 + 0.64 \cdot 0.1 = 0.904$.

Pravděpodobnost, že během roku dojde alespoň k jedné dlouhodobé poruše na jednom vedení, je naopak rovna $1 - P(A) = 1 - 0.904 = 0.096$. Pokud máme dvě taková vedení, pravděpodobnost, že dojde k dlouhodobé poruše na obou z nich je $0.096 \cdot 0.096 = 0.009216$. Pravděpodobnost, že k nim dojde současně je $0.009216 \cdot 0.5 = 0.004608$.

Příklad 2.16

Zátěž, která je napájena ze dvou paralelně provozovaných transformátorů, může podléhat (*subject*) výrazným fluktuacím (*fluctuations*). Transformátory jsou navrženy tak, aby každý z nich byl schopen pokrýt (*cover*) celou zátěž po 90% doby, kdy je druhý transformátor mimo provoz (*out of operation*). Pravděpodobnost poruchy každého z transformátorů je 0.05 a pravděpodobnost, že se porouchají současně je 0.01. Je třeba stanovit celkovou spolehlivost systému (pravděpodobnost dodávky).

Pravděpodobnost, že oba transformátory pracují bez poruchy je $p_1 = 0.95 \cdot 0.95 = 0.9025$. Pravděpodobnost, že jeden z nich nebo oba jsou porouchané, je $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0.9025 = 0.0975$, z toho je pravděpodobnost $p_3 = 0.01$, že se porouchají současně a $p_4 = 0.0875$ pravděpodobnost, že ne současně (ale zdravý vydrží jen 90% doby výpadku porouchaného). Dodávka se tedy udrží s pravděpodobností $p_1 + p_4 \cdot 0.9 = 0.98125$.

Příklad 2.17

Analýza poruch na venkovním vedení ukazuje, že jednofázové zkraty (*one-phase faults*) J jsou třikrát častější než dvojfázové D a ty jsou čtyřikrát častější než trojfázové T. Poměr četností je tedy J:D:T = 12:4:1 a tedy P(J) = 12/17, P(D) = 4/17 a P(T) = 1/17. Jaká je pravděpodobnost, že vyskytne-li se vícefázový zkrat, že se jedná o zkrat trojfázový?

$$P = \frac{\frac{1}{17}}{\frac{4}{17}+\frac{1}{17}} = \frac{1}{5} = 0.2\,.$$

Příklad 2.18

Doba potřebná pro opravu poškozeného vedení (*restore of a damaged line*) po kalamitě (*calamity*) je 2 až 3 dny, přičemž pravděpodobnost, že oprava potrvá 2 dny je dvakrát větší, než 3 dny. Počet poruch v systému po kalamitě je také různý a z pozorování plyne, že

počet poškozených vedení	počet pozorování	relativní četnost
0	2	0.10
1	5	0.25
2	8	0.40
3	3	0.15
4	2	0.10
	celkem 20	

Předpokládejme, že je k dispozici jediná montážní četa (*repair crew*) a že doba opravy vedení (*repair time*) nezávisí na počtu poruch, které na něm nastaly. Je třeba určit:

- Jaká je pravděpodobnost, že ještě pět dní po kalamitě některé vedení nebude fungovat?
- V jednom dni vznikla dvě tornáda (*tornadoes*). Po ranním byla poškozena dvě vedení a začala se hned opravovat. Po večerním tornádu byla poškozena další linka. Jaká je pravděpodobnost, že vše bude opraveno do 7 dnů?

Označme B_1 jev, kdy není poškozeno žádné vedení - $P(B_1) = 0.1$, B_2 jev, kdy je poškozeno jedno vedení - $P(B_2) = 0.25$, B_3 jev, kdy jsou poškozena dvě vedení - $P(B_3) = 0.4$, B_4 jev, kdy jsou poškozena tři vedení - $P(B_4) = 0.15$ a B_5 jev, kdy jsou poškozena čtyři vedení - $P(B_5) = 0.1$. Dále označme písmenem A jev, kdy za 5 dní po kalamitě nebude některé vedení ještě fungovat. Pak:

$P(A \mid B_1) = 0$ (nebylo poškozeno ani jedno vedení),

$P(A \mid B_2) = 0$ (jedno vedení se opraví nejvýše do tří dnů),

$P(A \mid B_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (dvě vedení se opraví za více než 5 dní s pravděpodobností $\frac{1}{9}$),

$P(A \mid B_4) = 1$ (tři vedení se opraví minimálně za 6 dní),

$P(A \mid B_5) = 1$ (čtyři vedení se opraví minimálně za 8 dní).

Odtud (viz věta o úplné pravděpodobnosti)

$$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(A \mid B_i)\cdot P(B_i) = 0\cdot 0.1 + 0\cdot 0.25 + \frac{1}{9}\cdot 0.4 + 1\cdot 0.15 + 1\cdot 0.1 = 0.2944.$$

Po prvním tornádu byla poškozena 2 vedení. Po druhém tornádu bylo poškozeno další vedení, ale toto vedení mohlo být už jednou poškozeno předcházejícím tornádem. Celkově tedy mohla být poškozena 2 vedení (jev B_1), nebo 3 vedení (jev B_2). Označme písmenem A jev, kdy všechno bude opraveno do sedmi dnů.

Pravděpodobnost, že byla poškozena 2 nebo 3 vedení (tedy jevů B_1 a B_2) je 0.5 (po prvním tornádu jsou dvě vedení poškozená a dvě zdravá, a pravděpodobnost, že druhé tornádo zasáhne zdravou či poškozenou linku, je proto stejná). Pak:

$P(A \mid B_1) = 1$ (dvě vedení se opraví nejvýše za 6 dní),

$P(A \mid B_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 0.7407$ (oprava všech tří vedení zabere nejvýš 7 dní).

Odtud (viz věta o úplné pravděpodobnosti)

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) = 1 \cdot 0.5 + 0.7407 \cdot 0.5 = 0.8704.$$

Příklad 2.19

Dva systémy A a B jsou propojeny přenosovou trasou (*transmission link*) s přenositelným výkonem (*capacity*) 50 MW. Pravděpodobnost poruchy této trasy je 0.015. Systém A sestává z pěti 40 MW jednotek, z nichž každá se může porouchat s pravděpodobností 0.01 a jedné 60 MW jednotky (pravděpodobnost poruchy 0.05). Špičkové zatížení (*peak load*) systému je 180 MW. Systém B sestává ze tří 25 MW jednotek (pravděpodobnost poruchy 0.1) a má špičkové zatížení 65 MW. Je třeba určit:

- Pravděpodobnost, že zátěž přesáhne (*exceeds*) vyrobený výkon jak v systému A, tak v B za předpokladu, že nejsou propojeny.
- Stanovte výhodu propojení (*interconnection*) v místě B za předpokladu, že v případě nedostatku výkonu (*lack of power*) v systému B systém A vypomůže.

Samostatný systém A: výroba dodá požadovaný výkon, jestliže

- pracuje všech 6 jednotek ($p = 0.99^5 \cdot 0.95 = 0.9034$),
- pracuje 5 jednotek po 40 MW, jednotka 60 MW nepracuje ($p = 0.99^5 \cdot 0.05 = 0.0475$),
- pracují 4 jednotky po 40 MW i jednotka 60 MW ($p = 5 \cdot 0.99^4 \cdot 0.01 \cdot 0.95 = 0.0456$),
- pracují 3 jednotky po 40 MW i jednotka 60 MW ($p = 10 \cdot 0.99^3 \cdot 0.01^2 \cdot 0.95 = 0.0009$).

Systém A nedodá požadovaný výkon s pravděpodobností 1 - 0.9034 - 0.0475 - 0.0456 - 0.0009 = 0.0026.

Samostatný systém B: zátěž přesáhne vyrobený výkon, jestliže pracují jen dvě jednotky, jedna jednotka, nebo žádná jednotka.

- pravděpodobnost, že pracují dvě jednotky: $3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$,
- pravděpodobnost, že pracuje jedna jednotka: $3 \cdot 0.9 \cdot 0.1^2 = 0.027$,
- pravděpodobnost, že nepracuje žádná jednotka: $0.1^3 = 0.001$.

Pravděpodobnost, že systém B nedodá požadovaný výkon, je 0.243 + 0.027 + 0.001 = 0.271.

Existuje-li propojení, pak požadovaný výkon v místě B (65 MW) můžeme dostat jako:

- výkon jednoho bloku 25 MW a výkon do 50 MW dodaný vedením ($p = 3 \cdot 0.9 \cdot 0.1^2 \cdot 0.985 = 0.0266$),
- výkon dvou bloků 25 MW a výkon do 50 MW dodaný vedením ($p = 3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 \cdot 0.985 = 0.2394$),
- výkon tří bloků 25 MW bez vedení ($p = 0.9^3 \cdot 0.015 = 0.0109$),
- výkon tří bloků 25 MW s vedením ($p = 0.9^3 \cdot 0.985 = 0.7181$).

Pravděpodobnost, že systém B nedodá požadovaný výkon, je 1 - 0.0266 - 0.2394 - 0.0109 - 0.7181 = 0.005. Je zřejmé, že spolehlivost systému se výrazně zvýší.

Při velmi přesném výpočtu bychom ještě museli stanovit, s jakou pravděpodobností systém A opravdu dodá výkon 40 MW do vedení. Tato pravděpodobnost se však již velmi blíží (*approaches*) k 1 (pracuje alespoň jedna jednotka 40 MW, $p = 1 - 0.01^5 \cdot 0.05 \cong 1$), takže ji není třeba do výpočtu zahrnout.