3. Jednoduché náhodné proměnné

Přímým výsledkem experimentu obecně (*generally*) nemusí být číslo. Pokud tomuto výsledku nějakým způsobem (*in some way*) číslo přiřadíme (*assign*), definovali jsme náhodnou veličinu (náhodnou proměnnou). Lze tedy říci, že náhodná veličina (náhodná proměnná) X je funkce která přiřazuje reálné číslo jakémukoli prvku z množiny (*set*) Ω. Je zřejmé (*obvious*), že v souladu s tím, zda je množina Ω konečná či nekonečná, může být tato funkce diskrétní či spojitá (*discrete or continuous*).

Def. 03.01: *Náhodná veličina je zobrazení (mapping) X: $\Omega \to R$ takové, že pro libovolné $t \in R$ platí*

$$X^{-1}\left((-\infty, t\rangle\right) = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le t\right\} \in \delta .$$

Zavedení (*introduction*) náhodné proměnné sjednocuje (*unifies*) studium pravděpodobnosti, poněvadž pravděpodobnost je nyní definována vždy na podmnožinách (*subsets*) z R.

Nejdůležitějším nástrojem pro popis náhodných veličin je distribuční funkce (*distribution function*).

Def. 03.02: *Nechť X je náhodná veličina. Reálnou funkci $F(t)$ definovanou pro každé $t \in R$ vztahem $F(t) = P[X \le t]$ nazveme distribuční funkcí náhodné veličiny X.*

Tato funkce má kumulativní (*cumulative*) charakter a z její definice plynou následující vlastnosti:

$$0 \le F(t) \le 1,$$

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0, \ \lim_{t \to \infty} F(t) = 1,$$

$$t_1 \le t_2 \Rightarrow F(t_1) \le F(t_2),$$

$$F(t) \text{ je zprava spojitá} \Rightarrow \lim_{t \to a+} F(t) = F(a) \text{pro } a \in R,$$

$$F(t) \text{má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti},$$

$$P(t_1 \le X \le t_2) = F(t_2) - F(t_1).$$

Příklad 3.1

Systém sestává ze čtyř nezávisle pracujících prvků. Pravděpodobnost poruchy každého prvku je 0.1. Úkolem je nalézt distribuční funkci náhodné veličiny, která popisuje počet poškozených prvků.

Náhodná veličina popisující počet poškozených prvků má 5 hodnot: X = 0, 1, 2, 3 a 4.

P [X = 0] (žádná porucha) $P(0) = 0.9^4 = 0.6561$,
P [X = 1] (jedna porucha) $P(1) = 4\cdot 0.1\cdot 0.9^3 = 0.2916$,
P [X = 2] (dvě poruchy) $P(2) = 6\cdot 0.1^2\cdot 0.9^2 = 0.0486$,
P [X = 3] (tři poruchy) $P(3) = 4\cdot 0.1^3\cdot 0.9 = 0.0036$,
P [X = 4] (čtyři poruchy) $P(4) = 1\cdot 0.1^4 = 0.0001$.

Pak

$$F(t) = 0 \text{ pro } t < 0,$$

$$F(t) = 0.6561 \text{ pro } 0 \le t < 1,$$

$$F(t) = 0.9477 \text{ pro } 1 \le t < 2,$$

$$F(t) = 0.9963 \text{ pro } 2 \le t < 3,$$

$$F(t) = 0.9999 \text{ pro } 3 \le t < 4,$$

$$F(t) = 1 \text{ pro } 4 \le t.$$

Příklad 3.2

V elektrárně jsou instalovány tři bloky o 100 MW (pravděpodobnost poruchy 0.05) a jeden 200 MW (pravděpodobnost poruchy 0.1). Zakreslete (*depict*) náhodnou veličinu, odpovídající pravděpodobnosti a příslušnou distribuční funkci.

Za náhodnou veličinu bereme všechny dosažitelné (*available*) výkony:

$X = 0$ MW (vše poškozeno): $p = 0.05^3 \cdot 0.1 = 0.0000125$,

$X = 100$ MW (1x100 MW v provozu): $p = 3 \cdot 0.95 \cdot 0.05^2 \cdot 0.1 = 0.0007125$,

$X = 200$ MW (2x100 MW nebo 1x200 MW v provozu): $p = 3 \cdot 0.95^2 \cdot 0.05 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.05^3 = 0.01365$,

$X = 300$ MW (3x100 MW nebo 200 + 100 MW v provozu): $p = 0.95^3 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.95 \cdot 0.05^2 \cdot 0.9 = 0.09215$,

$X = 400$ MW (2x100+200 MW v provozu): $p = 3 \cdot 0.95^2 \cdot 0.05 \cdot 0.9 = 0.1218375$,

$X = 500$ MW (3x100+200 MW v provozu): $p = 0.95^3 \cdot 0.9 = 0.7716375$.

Odtud

$$F(t) = 0 \text{ pro } t < 0,$$

$$F(t) = 0.0000125 \text{ pro } 0 \le t < 100,$$

$$F(t) = 0.000725 \text{ pro } 100 \le t < 200,$$

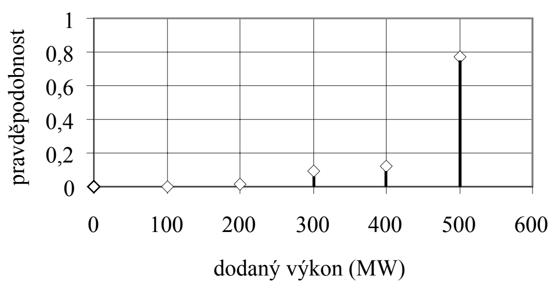
$$F(t) = 0.014375 \text{ pro } 200 \le t < 300,$$

$$F(t) = 0.106525 \text{ pro } 300 \le t < 400,$$

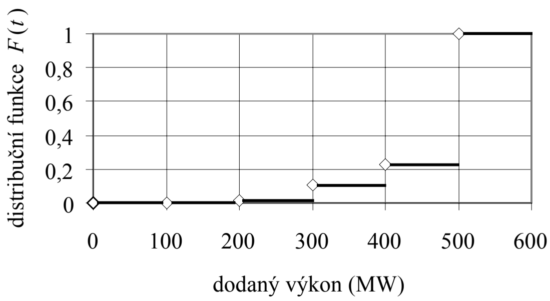
$$F(t) = 0.2283625 \text{ pro } 400 \le t < 500,$$

$$F(t) = 1 \text{ pro } 500 \le t.$$

Výsledky jsou znázorněny na obr. 3.1 a 3.2.



Obr. 3.1: Rozložení pravděpodobnosti



Obr. 3.2: Distribuční funkce

Věta 03.01: *Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny definované na stejné množině Ω elementárních jevů a $F_1, F_2, \dots, F_n$ jsou jejich distribuční funkce. Nechť $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou nezáporná reálná čísla (non-negative real numbers) taková, že jejich součet (sum) je roven* 1 *(jedná se tedy o váhy (weights)). Pak funkce G definovaná jako*

$$G(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(t) \text{ pro } \forall t \in R$$

je rovněž distribuční funkce náhodné veličiny definované na Ω.

Def. 03.03: *Rozdělení náhodné veličiny X se nazývá diskrétní, existuje-li konečná (finite) nebo spočetná (countable) množina reálných čísel* $\{t_1, t_2, \ldots t_n\}$ *takových, že pro každé* t_i *z této množiny je* $P[X = t_i] = p_i > 0$ *a distribuční funkce F náhodné veličiny X je dána vztahem*

$$F(t) = \sum_{i:t_i \le t} p_i \,.$$

Funkce P(t) pro $t \in R$ *se nazývá pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny X.*

Z definice plyne, že

$$p_j = F(t_j) - \lim_{t \to t_j -} F(t) = F(t_j) - F(t_{j-1}).$$

Dále zřejmě platí:

$$P[X = a] = P(a),$$
$$P[X < a] = F(a) - P(a),$$
$$P[X \le a] = F(a),$$
$$P[X > a] = 1 - F(a),$$
$$P[X \ge a] = 1 - F(a) + P(a).$$

Def. 03.04: *Nechť pro distribuční funkci F(t) náhodné veličiny X existuje nezáporná reálná funkce f(t) taková, že pro každé* $x \in R$ *platí*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pak X se nazývá absolutně spojitou (absolutely continuous) náhodnou veličinou a f(t) její hustotou.

Z definice okamžitě plyne

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

a dále

$$P[X \in A] = \int_A f(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

Kromě toho platí:

$$P[X = a] = 0 \text{ pro } \forall a \in R,$$
$$P[X < a] = P[X \le a] = F(a),$$
$$P[X > a] = P[X \ge a] = 1 - F(a),$$
$$P[a < X < b] = P[a \le X < b] = P[a < X \le b] = F(b) - F(a).$$

Def. 03.05: *Jestliže lze distribuční funkci F náhodné veličiny X vyjádřit jako směs (combination) distribuční funkce* F_1 *diskrétní náhodné veličiny* X_1 *a distribuční funkce* F_2 *absolutně spojité náhodné veličiny* X_2*, pak nazveme X náhodnou veličinou se smíšeným rozdělením (mixed distribution).*

V takovém případě zpravidla používáme větu 3.1 pro $n = 2$:

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2,$$
$$F(t) = F_1(t) + (1-\alpha) F_2(t).$$

Příklad 3.3

Má se určit rozložení pravděpodobnosti nejvyšší roční rychlosti větru. Tato rychlost může být na základě mnoha měření popsána funkcí:

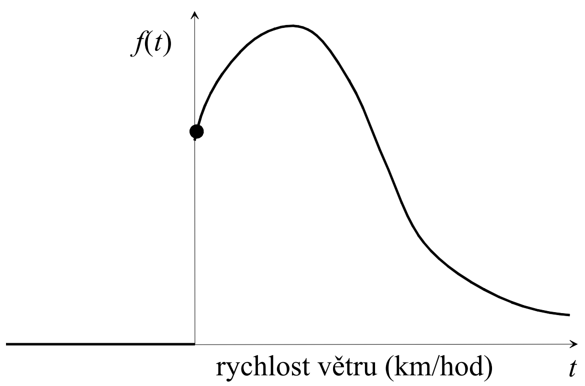
$$F(t) = 0 \text{ pro } t < 0,$$
$$F(t) = e^{-e^{-\alpha(t-u)}} \text{ pro } t \geq 0.$$

Přitom veličiny α a u jsou kladné a jejich velikost závisí na místě, kde se rychlost větru měří. Je třeba si všimnout (*notice*), že $F(t)$ v bodě $t = 0$ nezačíná od nuly (*does not start from zero*), ale od nějakého velmi malého čísla (náhrada fyzikální reality (*physical reality*) aproximující funkcí). Ve sledované oblasti je $\alpha = 0.11$ hod/km, $u = 74.5$ km/hod. Stanovme pravděpodobnost, že rychlost větru přesáhne 80 km/hod a stanovme hustotu pravděpodobnosti $f(t)$.

Požadovaná pravděpodobnost je 1 - $F(80)$ = 1 - 0.5792 = 0.4208. Hustota pravděpodobnosti

$$f(t) = 0 \text{ pro } t < 0,$$
$$f(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha e^{-\alpha(t-u)} e^{-e^{-\alpha(t-u)}} \text{ pro } t \geq 0.$$

Rozložení $f(t)$ je znázorněno na obr. 3.3.



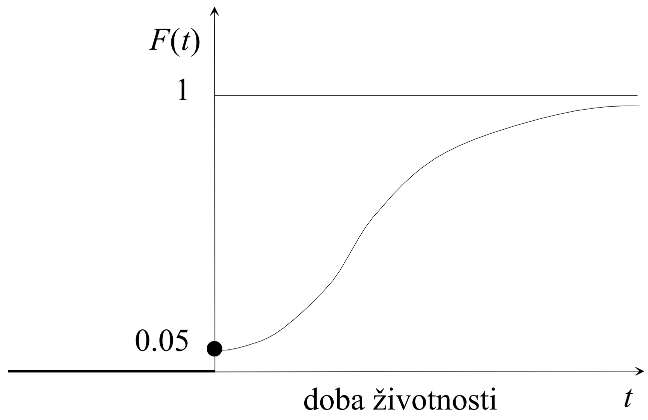
Obr. 3.3: Hustota pravděpodobnosti rychlosti větru

Příklad 3.4

Výrobce dodává relé (*relays*), z nichž 5% je od počátku vadných. Životnost (*lifetime*) zbývajících má rozdělení, jež je dáno hustotou (jedná se o logaritmicko-normální rozdělení (*logarithmic-normal distribution*), čísla μ a σ jsou parametry)

$$f(t) = 0 \text{ pro } t \leq 0,$$
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ pro } t > 0.$$

Většinou se zvlášť popisuje rozdělení na dobrá a špatná relé a pro dobrá se pak popisuje životnost. Všechna relé se však mohou uvažovat dohromady, přičemž životnost špatných se položí rovna nule. Tak obdržíme typické smíšené rozdělení, jehož distribuční funkce plyne z obrázku 3.4.



Obr. 3.4: Distribuční funkce životnosti relé

Číselné charakteristiky náhodných veličin

Při řešení mnoha praktických problémů často stačí, když náhodná veličina není popsána kompletním rozložením pravděpodobnosti či její hustoty, ale pouze určitými klíčovými hodnotami (*characteristic measures, key descriptors*). Nejdůležitější je střední hodnota (*mean value*) náhodné veličiny a její rozptyl (*variance*), které i laikovi dají dobrou představu (*good idea*) o rozložení náhodné veličiny.

Medián

Medián (*median*) X_m je taková hodnota náhodné veličiny, že pod ní a nad ní jsou výsledky stejně pravděpodobné (50% výsledků odpovídá nižším hodnotám než X_m a 50% vyšším). Jedná se tedy o hodnotu, pro niž

$$F\left(X_m\right) = 0.5. \tag{03.01}$$

Modus

Modus (*mode*) $\widehat{X}$ je taková hodnota, kterou náhodná veličina nabývá s nejvyšší pravděpodobností.

Střední hodnota náhodné veličiny

Jedná se o vážený průměr (*weighted average*) hodnot náhodné veličiny, přičemž váhami jsou příslušné pravděpodobnosti. V případě diskrétního rozdělení se jedná o hodnotu

$$E\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i, \tag{03.02}$$

zatímco u spojitého rozdělení

$$E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f\left(x\right) \mathrm{d}x. \tag{03.03}$$

$E(X)$ je vlastně hodnota, která naznačuje (*indicates*), jaký by měl být statistický průměr mnoha pozorování (*observation*) náhodné veličiny X. Přitom u diskrétního rozdělení $E(X)$ nemusí být totožný (*identical*) s žádnou hodnotou X_i. V literatuře se střední hodnota označuje jako $E(X)$, μ_X nebo $\overline{X}$. Z definice střední hodnoty plynou následující jednoduché závěry (*conclusions*) (X, Y náhodné proměnné, a, b konstanty):

$$\begin{aligned} &E\left(a\right) = a, \\ &E\left(aX + bY\right) = aE\left(X\right) + bE\left(Y\right). \end{aligned} \tag{03.04}$$

Věta 03.02: *Nechť X je náhodná veličina, h: R → R reálná funkce. Je-li X diskrétní, pak* $E\left(h\left(X\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot h\left(X_i\right)$, *je-li spojitá,* $E\left(h\left(X\right)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)h\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Rozptyl náhodné veličiny a směrodatná odchylka

Rozptyl (*variance*) náhodné veličiny X je definován jako

$$\operatorname{var}\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^2\right]=E\left(X^2\right)-E^2\left(X\right)$$

a hodnota $\sigma_{\mathrm{X}}=\sqrt{\operatorname{var}\left(X\right)}$ se nazývá směrodatná odchylka (*standard deviation*). Zatímco střední hodnota E je zobecněním (*generalisation*) aritmetického průměru, rozptyl je zobecněním průměrné čtvercové odchylky (*square deviation*) od střední hodnoty (a je vždy nezáporný). Z definice rozptylu okamžitě plyne, že (a je konstanta)

$$\begin{aligned}&\operatorname{var}\left(a\right)=0,\\&\operatorname{var}\left(X+a\right)=\operatorname{var}\left(X\right),\\&\operatorname{var}\left(aX+b\right)=a^2\operatorname{var}\left(X\right).\end{aligned}\tag{03.05}$$

Konečně se zavádí činitel δ_{X} jakožto variační koeficient (*coefficient of variation*) náhodné proměnné X vůči její střední hodnotě:

$$\delta_{\mathrm{X}}=\frac{\sigma_{\mathrm{X}}}{E\left(X\right)}.\tag{03.06}$$

Příklad 3.5

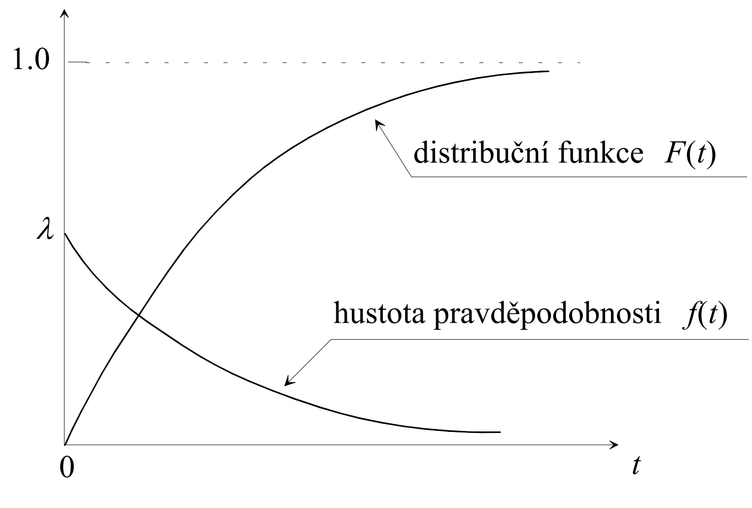
Předpokládejme, že dobu t (v letech) mezi dvěma poruchami na venkovním vedení lze popsat hustotou pravděpodobnosti (exponenciální rozdělení (*exponential distribution*), λ je konstanta)

$$f\left(t\right)=\lambda e^{-\lambda t}\ \text{pro}\ t\geq 0.$$

Distribuční funkce má v tomto případě tvar

$$F\left(t\right)=\int_0^t f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t=1-e^{-\lambda t}.$$

Obě tyto funkce jsou načrtnuty v obr. 3.5.



Obr. 3.5: Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce k příkladu 3.5

Je třeba určit střední hodnotu, modus, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku náhodné veličiny a odpovídající variační koeficient.

Střední hodnota náhodné veličiny X má velikost

$$E(X)=\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda},$$

modus $\widehat{X}=0$ (v tomto bodě je hustota pravděpodobnosti rovna λ,
medián X_m se určí ze vztahu

$$F(X_\mathrm{m})=1-e^{-\lambda X_\mathrm{m}}=0.5\Rightarrow X_\mathrm{m}=-\frac{\ln 0.5}{\lambda}=\frac{0.693}{\lambda}=0.693\cdot E(X),$$

rozptyl je dán vztahem

$$\mathrm{var}(X)=\int_0^\infty\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^2\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda^2},$$

směrodatná odchylka $\sigma_\mathrm{X}=\sqrt{\mathrm{var}(X)}=\frac{1}{\lambda}=E(X)$ a variační koeficient $\delta_\mathrm{X}=\frac{\sigma_\mathrm{X}}{E(X)}=1.$

Rozdělení podmíněné pravděpodobnosti

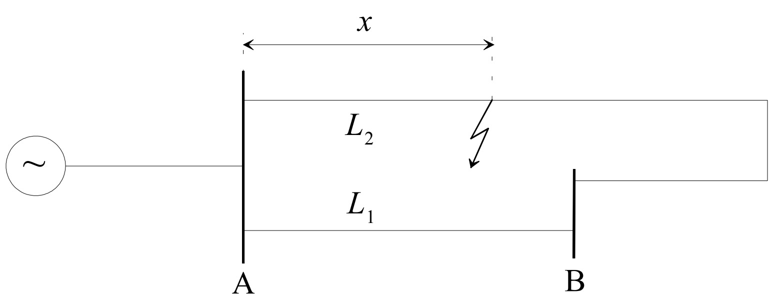
Věta 03.03: *Nechť X, Y, E(X,Y) a var(X,Y) jsou náhodné proměnné. Pak*

$$E(X)=E\big(E(X\,|\,Y)\big),\qquad \mathrm{var}(X)=\mathrm{var}\big(E(X\,|\,Y)\big)+E\big(\mathrm{var}(X\,|\,Y)\big).$$

Příklad 3.6

Při mnoha analýzách je třeba vyšetřit účinky (*investigate effects*) poruch vzniklých na jednotlivých prvcích systému. Čím blíže (*the closer*) je např. místo zkratu u přípojnic, tím vážnější (*the more serious*) důsledky zde mohou nastat. Místo zkratu je náhodná proměnná. Spočtěme její charakteristiky při následujícím zadání:

Dvě vedení o délce L_1 a L_2 ($L_1 > L_2$) spojují dvě rozvodny A a B (obr. 3.6).



Obr. 3.6: Nákres uspořádání

Předpokládejme, že porucha může vzniknout na každém vedení, a to s pravděpodobností úměrné (*proportional*) délce vedení. Označíme X náhodnou veličinu, která udává vzdálenost poruchy na příslušném vedení od místa A. Označme Y náhodnou veličinu, která udává číslo vedení (1 a 2). Pak hustota pravděpodobnosti poruchy na každém vedení je

$$f_{\mathrm{X}|1}(x)=\frac{1}{L_1}\text{ pro }0\le x\le L_1,\quad f_{\mathrm{X}|2}(x)=\frac{1}{L_2}\text{ pro }0\le x\le L_2.$$

Pravděpodobnost, že porucha nastane na prvním a druhém vedení je

$$p_1=\frac{L_1}{L_1+L_2},\quad p_2=\frac{L_2}{L_1+L_2}.$$

Dále

$$E(X\,|\,Y=1)=\int_0^{L_1}x\frac{1}{L_1}\mathrm{d}x=\frac{L_1}{2},\quad E(X\,|\,Y=2)=\int_0^{L_2}x\frac{1}{L_2}\mathrm{d}x=\frac{L_2}{2},$$

$$\operatorname{var}(X \mid Y=1)=\int_0^{L_1}\left(x-\frac{L_1}{2}\right)^2 \frac{1}{L_1}\mathrm{d}x=\frac{L_1^2}{12},\quad \operatorname{var}(X \mid Y=2)=\int_0^{L_2}\left(x-\frac{L_2}{2}\right)^2 \frac{1}{L_2}\mathrm{d}x=\frac{L_2^2}{12}.$$

A nyní již lze psát

$$E(X)=E\big(E(X \mid Y)\big)=p_1 E(X \mid Y_1)+p_2 E(X \mid Y_2)=\frac{L_1^2+L_2^2}{2(L_1+L_2)},$$

$$\operatorname{var}(X)=\operatorname{var}\big(E(X \mid Y)\big)+E\big(\operatorname{var}(X \mid Y)\big),$$

kde

$$\operatorname{var}\big(E(X \mid Y)\big)=E\big(E^2(X \mid Y)\big)-E^2\big(E(X \mid Y)\big)=\frac{L_1^2}{4}p_1+\frac{L_2^2}{4}p_2-\left(\frac{L_1}{2}p_1+\frac{L_2}{2}p_2\right)^2=$$

$$=\frac{L_1L_2(L_1-L_2)^2}{4(L_1+L_2)^2},\quad E\big(\operatorname{var}(X \mid Y)\big)=\frac{L_1^2}{12}p_1+\frac{L_2^2}{12}p_2.$$

Výsledkem je již dosti složitý (*complex*) výraz.

Některé další charakteristiky náhodných veličin

Často používanými charakteristikami náhodných veličin jsou momenty (*moments*).

Def. 03.06: *Nechť X je náhodná veličina. Číslo* $m_k = EX^k$ *nazveme k-tý obecný moment (general moment) a číslo* $\mu_k = E(X - EX)^k$ *k-tý centrální moment (central moment) náhodné veličiny X.*

Střední hodnota je tedy m_1, rozptyl $\mu_2 = m_2 - m_1^2$. Obecně lze jakýkoli centrální moment vyjádřit (*express*) pomocí určité kombinace obecných momentů a samozřejmě naopak (*vice versa*).

Def. 03.07: *Číslo*

$$v=\frac{\sqrt{\mu_2}}{m_1}$$

se nazývá variační koeficient náhodné veličiny X, číslo

$$\gamma_1=\frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}$$

se nazývá šikmost (skewness) a číslo

$$\gamma_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

špičatost (kurtosis).

Variační koeficient udává podíl směrodatné odchylky a střední hodnoty náhodné veličiny. Směrodatná odchylka je výhodná především v případě, že její velikost zůstává konstantní (měříme s konstantní absolutní chybou). Variační koeficient je zase vhodný tam, kde měříme s konstantní relativní chybou.

Šikmost udává míru asymetrie (*asymmetry measure*) křivky hustoty pravděpodobnosti, tedy její naklonění na jednu stranu. Špičatost udává, je-li hustota pravděpodobnosti špičatější či plošší, než je tomu u normálního rozdělení (pro normální rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ je přitom $\gamma_1 = 0$ a $\gamma_2 = 3$).

Def. 03.08: *Náhodná veličina X má spojité symetrické rozdělení, jestliže pro její hustotu f(x) platí*

$$f\left[E(X)-t\right]=f\left[E(X)+t\right] \quad pro \ \forall t>0$$

a nazývá se normovaná (standardised), jestliže $E(X)=0$ *a* $\operatorname{var}(X)=1$.

***Věta 03.04**: Nechť X je náhodná veličina. Pak náhodná veličina definovaná jako*

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}$$

je normovaná.

Teoretická rozložení pravděpodobnosti

V problémech, kde se setkáváme s diskrétní náhodnou veličinou, získá se většinou rozložení pravděpodobnosti z předpokladů (*assumptions*) a fyzikálního popisu (*physical description*) problému. V případě spojité proměnné se rozložení hustoty pravděpodobnosti předpokládá ve tvaru určité funkce. Ta reflektuje (*reflects*) známá fakta a zpravidla se neodvozuje z žádného fyzikálního modelu. Pokud se jedná o problémy z oblasti energetických systémů, většinou se uplatňuje jen několik málo typických diskrétních a spojitých rozdělení.

Diskrétní rozdělení

Diskrétní rozdělení se generují testováním pravděpodobnosti spojené s výskytem či nevýskytem určitých jevů nebo jejich posloupností. V těchto případech se přijímají určité předpoklady, jež vedou k jednoduchým rozdělením. Tyto předpoklady následují:

- jev se buď vyskytne, nebo nevyskytne (jiná možnost není),
- pravděpodobnost každého výsledku je stejná,
- různé jevy daného typu jsou statisticky nezávislé.

Jevy, které vyhovují těmto předpokladům (*events satisfying these assumptions*), se nazývají (*are called*) Bernoulliho jevy (*Bernoulli trials*).

Binomické rozdělení (*binomial distribution*)

Je-li pravděpodobnost výskytu jevu v jednom pokusu p (a nevýskytu 1 - p), pak pravděpodobnost, že se během n nezávislých pokusů jev vyskytne k-krát, je

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{03.07}$$

Důležité hodnoty:

$$E(X) = np, \quad \operatorname{var}(X) = np(1-p). \tag{03.08}$$

Příklad 3.7

Řídicí mechanismus (*control mechanism*) obsahuje několik relé, z nichž každé spíná s pravděpodobností $p = 0.9$. Kolik těchto relé musí být zapojeno paralelně, aby došlo k sepnutí s minimální pravděpodobností $P = 0.9999$?

Musí platit

$$P(X = n) = \binom{n}{0}(1-p)^{\mathrm{n}} \le 0.0001 \Rightarrow 0.1^{\mathrm{n}} \le 0.0001 \Rightarrow n \ge 4.$$

Binomické rozložení lze často využít i v případě spojitého rozložení prostřednictvím vhodné diskretizace.

Příklad 3.8

Při návrhu venkovních vedení (*overhead lines*) hraje značnou roli rychlost větru. Předpokládejme, že pravděpodobnost, že rychlost větru přesáhne určitou hodnotu, je 0.05 za rok. Jaká je pravděpodobnost, že tato rychlost nebude překročena více než jednou za příštích 5 let (*next five years*)?

Rychlost nebude překročena vůbec, nebo jen jednou, takže

$$P(X=0)+P(X=1)=0.95^5+\binom{5}{1}\cdot 0.95^4\cdot 0.05=0.9774.$$

Geometrické rozdělení (*geometric distribution*)

V tomto případě se pokusy opakují, dokud se poprvé nevyskytne určitý jev (*until a specific event occur for the first time*). Realizuje-li se jev v j-tém pokusu, nesmí se vyskytnout v předchozích j-1 pokusech. Označíme-li p pravděpodobnost, že požadovaný jev nastane, a q = 1 - p pravděpodobnost, že nenastane, pak pravděpodobnost, že jev nastane při prvním pokusu $P(X = 1) = p$, při druhém $P(X = 2) = pq$, při j-tém $P(X = j) = pq^{j-1}$.

Pak

$$E(X)=\sum_{j=1}^{\infty}X_jP_j=\sum_{j=1}^{\infty}jpq^{j-1}=\frac{1}{p},$$

$$\operatorname{var}(X)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(X_j-E(X)\right)^2pq^{j-1}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(j-\frac{1}{p}\right)^2pq^{j-1}=\frac{q}{p^2}.$$

Příklad 3.9

Stožár vedení *vvn* (*a high-voltage transmission tower*) je navržen na 50-letý vítr, tedy na nejvyšší rychlost větru za 50 let. Jaká je pravděpodobnost, že tato rychlost nebude překročena do 5 let po výstavbě vedení (*after completion of the line*)? Jaká je pravděpodobnost, že k překročení rychlosti v prvních pěti letech dojde právě jednou?

Pravděpodobnost jevu, že rychlost větru bude překročena už v prvním roce, je p = 1/50 = 0.02 a odpovídající q = 0.98. Pravděpodobnost, že nebude překročena v 5 nejbližších letech je

$$P(X>5)=1-P(X\le 5)=1-\sum_{j=1}^{5}pq^{j-1}=0.904.$$

Také lze vyjít z předpokladu že v prvních pěti letech nebude rychlost větru překročena s pravděpodobností

$$P=q^5=0.98^5=0.904.$$

Pravděpodobnost, že k překročení rychlosti větru v prvních pěti letech dojde právě jednou, činí

$$P=\binom{5}{1}0.02\cdot 0.98^4=0.092.$$

Pascalské rozdělení (*Pascal distribution*)

Nechť X_k je počet pokusů, které se musí provést (*that have to be done*), aby jev nastal k-krát. Předpokládejme, že k-tý jev nastal při j-tém pokusu. Je-li pravděpodobnost toho, že jev nastane, p a že nenastane q, je tato pravděpodobnost

$$P=p^kq^{j-k}$$

(k úspěšných (*successful*) a j neúspěšných (*unsuccessful*) výsledků). Poněvadž je jedno, v jakém pořadí úspěšné a neúspěšné jevy nastávaly, je těchto možností $\binom{j-1}{k-1}$ (neboť v předchozích (*preceding*) j - 1 pokusech jich muselo bez ohledu na pořadí být k - 1 úspěšných). Tedy

$$P\left(X_k = j\right) = \binom{j-1}{k-1} p^k q^{j-k}, \quad j \geq k\,.$$

Příklad 3.10

Během výpadku vedení vyvolaném bleskem (*caused by a lightning*) pracuje vypínač (který má poruchu vypnout) korektně s pravděpodobností 0.85. Provozovatel vypínač vymění pokud selže (*if it fails to operate*) 5-krát po sobě. Jaká je pravděpodobnost, že vypínač zůstane v provozu (*in service*) po následujících 7 výpadcích?

Vypínač se nevymění tehdy, pokud selže po páté až během osmé a vyšší poruchy. Tedy

$$P\left(X_5 \geq 8\right) = 1 - P\left(X_5 < 8\right) = 1 - \binom{4}{4} 0.15^5 - \binom{5}{4} 0.15^5 \cdot 0.85 - \binom{6}{4} 0.15^5 \cdot 0.85^2 = 0.9988.$$

Hypergeometrické rozdělení (*hypergeometric distribution*)

Předpokládejme, že se zajímáme o počet defektů (*defects*) ve vzorku o n exemplářích (*samples*) vybraném z celkového počtu N exemplářů, z nichž m je špatných. Pravděpodobnost, že první exemplář je vadný, je $\frac{m}{N}$. Pravděpodobnost, že druhý exemplář je vadný, je buď $\frac{m-1}{N-1}$ nebo $\frac{m}{N-1}$ podle toho, zda se při předchozím výběru (*previous selection*) vybral vadný či dobrý exemplář. Jevy tedy nejsou nezávislé a nelze zde použít binomického rozdělení. Vybereme-li n exemplářů s x špatnými, je celkový počet n-tic $\binom{N}{n}$ a $\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}$ je počet n-tic s x špatnými exempláři. Pravděpodobnost, že v n exemplářích je x vadných, tedy je

$$P\left(X = x\right) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, \ldots, m\,.$$

Snadno lze odvodit, že

$$P\left(X = x+1\right) = \frac{m-x}{x+1} \cdot \frac{n-x}{N-n-m+x+1} \cdot P\left(X = x\right).$$

Příklad 3.11

Testy dielektrické pevnosti (*dielectric strength*) izolace alternátorů téhož typu prokázaly, že z celkového počtu 25 jich 10 mělo nižší hodnoty a 15 vyšší. Tři generátory mají být využity k pokrytí špičkového zatížení. Je třeba určit pravděpodobnost, že některý z nich bude mít nižší hodnotu dielektrické pevnosti.

Je tedy $N = 25,\ m = 10,\ n = 3,\ x = 0, 1, 2, 3.$ Pak

$$P(X=0)=\frac{\binom{10}{0}\binom{15}{3}}{\binom{25}{3}}\approx 0.2,\quad P(X=1)=\frac{\binom{10}{1}\binom{15}{2}}{\binom{25}{3}}\approx 0.46,$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{10}{2}\binom{15}{1}}{\binom{25}{3}}\approx 0.29,\quad P(X=3)=\frac{\binom{10}{3}\binom{15}{0}}{\binom{25}{3}}\approx 0.05.$$

Poissonovské rozdělení (*Poisson distribution*)

Některé jevy se vyskytují v určitém místě a/nebo čase. Tak například k poruše může dojít na kterémkoli místě vedení, nebo výpadek generátoru může nastat v kterékoli době. Předpokládejme, že počet jevů je v jednotkovém intervalu (časovém či prostorovém) konstantní a že jevy jsou na sobě nezávislé. V takovém případě může být výskyt jevů modelován (*modelled*) Poissonovým rozdělením. Označíme-li λ střední rychlost výskytů (*mean occurrence rate*) což je střední počet jevů za jednotku času (*events/unit interval*) a X_{t} náhodnou proměnnou reprezentující počet výskytů za interval délky t, pak

$$P(X_{\mathrm{t}}=x)=\frac{(\lambda t)^x}{x!}\cdot e^{-\lambda t}.$$

Příklad 3.12

V dané elektrárně dojde v průměru během roku k poruše dvou generátorů. Předpokládáme-li, že výskyt výpadků se řídí Poissonovským rozdělením, určíme

- pravděpodobnost 3 výpadků v jednom roce,
- pravděpodobnost, že během dvou let nedojde k výpadku (*no outage will occur*),
- pravděpodobnost, že během roku dojde přesně (*exactly*) ke dvěma výpadkům.

Parametr λ je roven dvěma (dvě poruchy za rok). Pak

$$P(X_{t=1}=3)=\frac{(2\cdot 1)^3}{3!}e^{-2\cdot 1}=\frac{8}{6}e^{-2}=0.1804,$$

$$P(X_{t=2}=0)=\frac{(2\cdot 2)^0}{0!}e^{-2\cdot 2}=\frac{1}{1}e^{-2\cdot 2}=0.018,$$

$$P(X_{t=1}=2)=\frac{(2\cdot 1)^2}{2!}e^{-2\cdot 1}=\frac{4}{2}e^{-2\cdot 1}=0.271.$$

Příklad 3.13

Rozvodný podnik (*electric utility*) plánuje položit kabel (*lay a cable*) *vn* v městské zástavbě (*urban area*). Byl naplánován výkop (kyneta) o hloubce 1 m (*1 m deep trench*). Před tím, než bylo vydáno stavební povolení (*construction permission*), byly vyžádány záruky (*required assurances*), že nedojde k poškození vodovodního či kanalizačního potrubí (*water or sewage pipes*). Tato potrubí byla instalována již dávno (*a long time ago*) a neexistují žádné solidní plánky (*reliable plans*) o jejich umístění (*location*). Je také známo, že hloubka jejich uložení je mezi 0.5 a 2 m. Usoudilo se (*it was assumed*), že výskyt těchto potrubí bude modelován Poissonovským procesem, a to tak, že ve výkopu se narazí každých 100 m na průměrně jedno potrubí, které bude výkop křižovat (*that will cross the trench*). Předpokládejme dále, že střední hodnota průměru potrubí je 0.5 m. Jaká je pravděpodobnost, že se narazí na nějaké potrubí při výkopu 1 km kynety?

Poněvadž výskyt potrubí je modelován Poissonovým procesem, pravděpodobnost, že kyneta délky L (km) bude křižovat n potrubí činí (λ = 10/km)

$$P\left(X_{L=1}=n\right)=\frac{\left(\lambda L\right)^{n}}{n!}e^{-\lambda L}=\frac{10^{n}}{n!}e^{-10}.$$

Ovšem některá potrubí budou ležet ve větší hloubce (*greater depth*), než je dno (*bottom*) kynety. Pravděpodobnost, že budou do kynety zasahovat (*encounter*), je 0.5 (střed potrubí v hloubce 0.75 - 1.25 m, je-li střed v hloubce 1.25 - 1.75 m, je potrubí hlouběji). Pravděpodobnost, že všech n potrubí bude ležet pode dnem kynety, je $P' = 0.5^n$. Pravděpodobnosti P a P' jsou nezávislé, proto výsledná pravděpodobnost, že se nenarazí na žádné z n možných potrubí je

$$P\cdot P'=\frac{5^{n}}{n!}e^{-10}.$$

Tuto pravděpodobnost ovšem musíme sečíst pro všechna n, takže

$$P_c=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n}}{n!}e^{-10}=e^{5}e^{-10}=e^{-5}=0.0067.$$

Pravděpodobnost, že se nenarazí na žádné potrubí, je tedy 0.0067, a že se narazí alespoň na jedno (*that at least one pipe will be crossed*), je 0.9933 (je vysoká).

Spojitá rozdělení

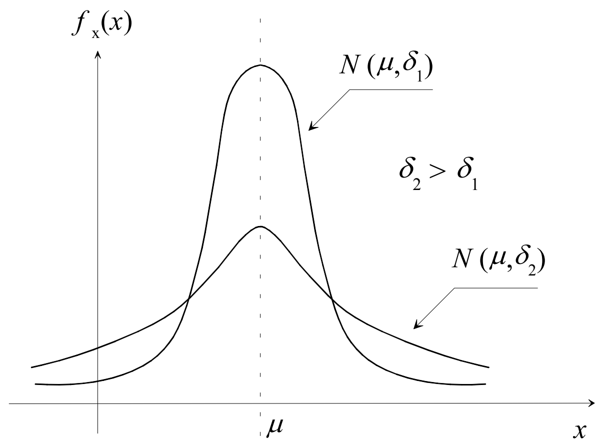
Vyskytují se rovněž v mnoha aplikacích. Základem je zde vždy rozložení hustoty pravděpodobnosti a pravděpodobnost se určuje vždy na nějakém intervalu (*in some interval*).

Normální rozdělení

Náhodná proměnná X má normální (Gaussovské) rozdělení (*normal distribution*), jestliže je hustota pravděpodobnosti dána funkcí

$$f_X\left(X\right)=N\left(\mu,\sigma,X\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(X-\mu\right)^2}{2\sigma^2}},\ x\in\left(-\infty,\infty\right),\ \sigma>0.$$

Normální rozdělení má dva parametry, μ a σ. Tyto parametry představují průměr a standardní odchylku náhodné proměnné X.



Obr. 3.7: Náčrtek normálního rozdělení

Poněvadž funkci $f_X(X)$ nelze integrovat v uzavřené formě, získávají se pravděpodobnosti v intervalu $\langle a,b\rangle$ zpravidla pomocí speciálních tabulek, ale při $\mu=0,\ \sigma=1$. Označíme-li (*denoting*)

$$\Phi_{\mathrm{X}}(X)=\int_{-\infty}^{a}N(0,1,X)\,\mathrm{d}X,$$

(je tabelovaná (*tabled*)) pak

$$\int_{-\infty}^{a}N(\mu,\sigma,X)\,\mathrm{d}X=\Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

a

$$\int_{a}^{b}N(\mu,\sigma,X)\,\mathrm{d}X=\Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Rovněž platí: $\Phi_{\mathrm{X}}(-X)=1-\Phi_{\mathrm{X}}(X)$.

Příklad 3.14

Primární ochranná relé (*primary protection relays*) na vedení *vvn* jsou nastavena na jmenovitý provozní čas (*nominal operation time*) 6 cyklů. Měření nastavení ochran (*the measurements of the relay settings*) ukázala, že provozní doba je dána normálním rozdělením $N(6,0.2,X)$. Jaká je pravděpodobnost, že relé budou pracovat v intervalu 5.9 - 6.3 cyklu? Předpokládejme dále, že 5% relé, jejichž provozní doba je nejvzdálenější (*the farthest*) od střední hodnoty 6 cyklů, bude přestaveno. V jakém intervalu bude provozní doba zbývajících relé?

Pravděpodobnost, že doba bude v intervalu 5.9 - 6.3 cyklů je (z tabulek)

$$\int_{5.9}^{6.3}N(6,0.2,X)\,\mathrm{d}X=\Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{6.3-6}{0.2}\right)-\Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{5.9-6}{0.2}\right)=0.625.$$

Co se týče druhé otázky, musí platit, že (*it must hold that*)

$$\int_{6-a}^{6+a}N(6,0.2,X)\,\mathrm{d}X=0.95=\Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{a}{0.2}\right)-\Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{-a}{0.2}\right)=2\Phi_{\mathrm{X}}(5a)-1\Rightarrow$$

$$\Phi_{\mathrm{X}}(5a)=0.975\Rightarrow 5a=1.96\Rightarrow a=0.492.$$

95% relé pracuje v intervalu 5.508 - 6.492.

Logaritmicko-normální rozdělení

Další rozdělení, které má blízko k normálnímu, je logaritmicko-normální rozdělení (*logarithmic-normal distribution*). Náhodná proměnná X má logaritmicko-normální rozdělení, pokud přirozený logaritmus (*natural logarithm*) z této hodnoty má normální rozdělení. Jinými slovy řečeno (*in other words*), má-li náhodná proměnná X normální rozdělení, má náhodná proměnná $Y = \ln X$ má logaritmicko-normální rozdělení. Tedy

$$f_{\mathrm{X}}(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi X}e^{-\frac{(\ln X-\lambda)^2}{2\xi^2}},\ X\in(0,\infty),$$

přičemž $\lambda = E(\ln X)$ a $\xi=\sqrt{\mathrm{var}(\ln X)}$ jsou po řadě střední hodnota a směrodatná odchylka rozdělení $\ln X$ a představují parametry tohoto rozdělení. Toto rozdělení (náhodná proměnná je vždy kladná (*positive*)) se užívá při určování doby oprav (*duration of repairs*), doby životnosti materiálu, intenzity dešťových srážek (*the intensity of rainfall*) a doby potřebné pro kompletaci projektu (*project completion*). Snadno lze ukázat, že

$$P\left(a < X \le b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi X} e^{-\frac{\left(\ln X - \lambda\right)^2}{2\xi^2}} \mathrm{d}X,$$

a po substituci dostáváme

$$P\left(a < X \le b\right) = \Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{\ln b - \lambda}{\xi}\right) - \Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{\ln a - \lambda}{\xi}\right),$$

kde Φ_{X} je funkce z předchozího (normálního) rozdělení.

Vztahy mezi parametry normálního o logaritmicko-normálního rozdělení jsou:

$$\xi = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)}, \quad \lambda = \ln\frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}}.$$

Konečně medián X_{m} se určí ze vztahu

$$X_{\mathrm{m}} = e^{\lambda}.$$

Příklad 3.15

Doba opravy vedení (v hodinách), jehož výpadek byl zaviněn poruchou koncového zařízení (*terminal equipment*), je dána logaritmicko-normálním rozdělením o parametrech μ = 0.7 a σ = 0.2. Určete pravděpodobnost, že doba opravy bude menší, než 2 hodiny.

Nejprve se určí parametry λ a ξ. Z předchozích vztahů spočteme

$$\lambda = \ln\frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}} = -0.3959, \quad \xi = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)} = 0.2801.$$

Pravděpodobnost $P(X < 2)$ se určí jako

$$P\left(X < 2\right) = \Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{\ln 2 - \lambda}{\xi}\right) = \Phi_{\mathrm{X}}\left(\frac{\ln 2 + 0.3959}{0.2801}\right) = \Phi_{\mathrm{X}}\left(3.8881\right) = 0.99995.$$

Rozdělení gamma (*gamma distribution*)

Distribuční funkce má tvar

$$f_{\mathrm{X}}\left(X\right) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)} X^{\alpha-1} e^{-\lambda X},\ X, \alpha, \lambda \in \left(0, \infty\right),$$

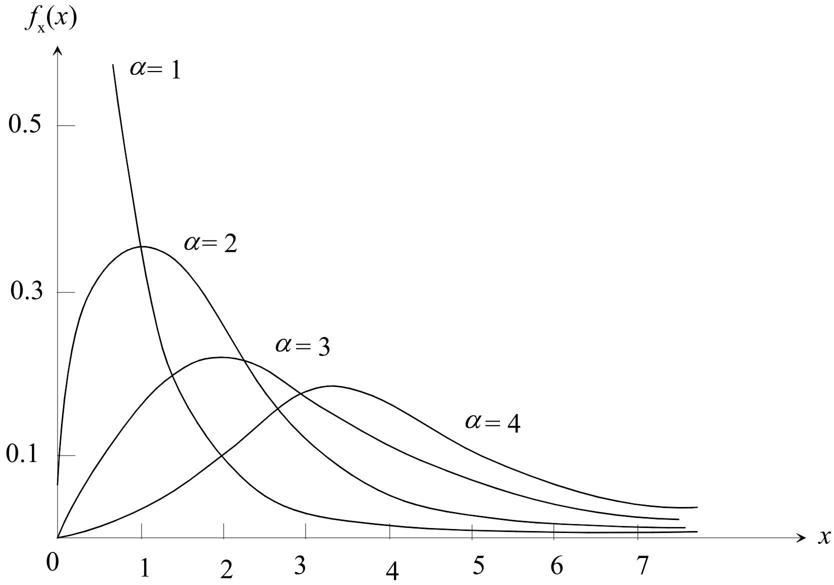
kde $\Gamma\left(\alpha\right)$ je gamma funkce argumentu α definovaná vztahem (*defined by relation*)

$$\Gamma\left(\alpha\right) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \mathrm{d}x.$$

Jednoduše lze metodou per partes odvodit rekurentní vzorec

$$\Gamma\left(\alpha\right) = \left(\alpha - 1\right)\Gamma\left(\alpha - 1\right),$$

takže k výpočtu funkce Γ obecného argumentu (*argument*) stačí znát tabulku funkce $\Gamma\left(\alpha\right)$, $\alpha \in \left\langle 1, 2\right\rangle$, (v literatuře). Rozložení gamma pro λ = 1 je znázorněno na obr. 3.8.



Obr. 3.8: Rozdělení gamma pro $\lambda = 1$

Střední hodnota a směrodatná odchylka jsou dány vztahy

$$\mu = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}.$$

Pro $\alpha = 1$ dostáváme exponenciální rozdělení probrané již dříve $f_X(X) = \lambda e^{-\lambda X}$. Uvedené rozdělení se vyskytuje například při určování doby mezi dvěma poruchami (*between two failures*). Existuje celá řada dalších mutací tohoto rozložení, s širokým využitím v řadě problémů.

Příklad 3.16

Předpokládejme, že se čtyři identické (*identical*) transformátory v trafostanici využívají pro transformaci napětí z 230 kV na 115 kV. Předpokládejme, že k pokrytí zatížení jsou nutné alespoň dva z nich. Doba T do poruchy libovolného transformátoru má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $E = 10$ let. Je třeba stanovit spolehlivost rozvodny v pětiletém období (tedy pravděpodobnost, že alespoň dva transformátory budou v provozu nepřetržitě po dobu 5 let).

V exponenciálním rozdělení $1/\lambda = E = 10$ let a odtud $\lambda = 0.1$. Pak

$$P(T > 5) = \int_5^\infty \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_5^\infty = e^{-0.5} = 0.607.$$

Pravděpodobnost, že se kterýkoli z transformátorů neporouchá v 5-letém období, je 0.607 a že selže 0.393. Transformátory jsou ovšem 4. Nyní hledáme pravděpodobnost, kdy selžou za 5 let tři nebo čtyři transformátory.

$$P = \binom{4}{3} 0.393^3 \cdot 0.607 + \binom{4}{4} 0.393^4 = 0.171.$$

Naopak, pravděpodobnost, že neselžou, je 1 - P = 0.829.

Příklad 3.17

Denní požadavek na energii (*daily demand for power*) dodávanou do určité oblasti má rozdělení gamma. Je-li střední zatížení 24 kW a nejpravděpodobnější zatížení 22 kW, jaký je rozptyl a směrodatná odchylka?

Podle příslušných vztahů je $\mu = \dfrac{\alpha}{\lambda} = 24$. Nejpravděpodobnější zatížení se získá z rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{\mathrm{X}}\left(X\right) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)} X^{\alpha-1} e^{-\lambda X} \left(\frac{\alpha-1}{X} - \lambda\right) = 0 \quad \text{pro} \quad X = 22$$

a odtud

$$\frac{\alpha-1}{\lambda} = 22\,.$$

Jednoduchý výpočet dává (*provides, yields*) $\alpha = 12$, $\lambda = 0.5$. Rozptyl je $\sigma^2 = \dfrac{\alpha}{\lambda^2} = 48 \Rightarrow \sigma = \sqrt{48}$.

Weibullovo rozdělení (*Weibull distribution*)

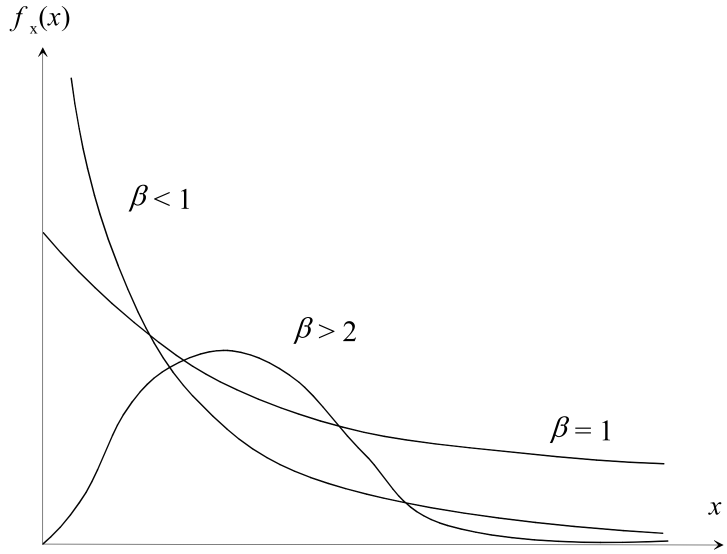
Má velmi blízko k (*is closely related to*) exponenciálnímu rozdělení. Distribuční funkce je dána vztahem

$$f_{\mathrm{X}}\left(X\right) = \alpha\beta X^{\beta-1} e^{-\alpha X^{\beta}} \quad , X, \alpha, \beta \in \left(0, \infty\right),$$

a

$$F_{\mathrm{X}}\left(X\right) = \int_{-\infty}^{X} f_{\mathrm{X}}\left(t\right) \mathrm{d}t = 1 - e^{-\alpha X^{\beta}}\,.$$

Je vidět, že náhodná veličina $Y = X^{\beta}$ má exponenciální rozložení. Průběhy funkce $f_{\mathrm{X}}(X)$ pro $\alpha = 1$ jsou znázorněny (*depicted*) na obr. 3.9.



Obr. 3.9: Weibullovo rozdělení pro $\alpha = 1$

Střední hodnota a rozptyl jsou zde dány vztahy

$$\mu = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \quad \sigma^2 = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right).$$

Weibullovo rozdělení nachází aplikace v modelování dob oprav (*repair times*) elektrických zařízení (výrobní i přenosová zařízeni (*generating and transmission equipment*)), v modelování dob do průrazu (*times to breakdown*) pevné izolace (*solid insulation*), namáhání přenosových struktur (*transmission structures*) atd.

Spolehlivost a riziko

V teorii spolehlivosti se doplněk (*complement*) ke kumulativní distribuční funkci $F_X(X)$ označuje jako $R_X(X)$ (tedy $R_X(X) = 1 - F_X(X)$) a nazývá se spolehlivostní funkcí (*reliability function*). Poměr

$$h(X) = \frac{f_X(X)}{R_X(X)}$$

se nazývá rizikovou funkcí (*hazard function*).

Tak například riziková funkce u exponenciálního rozdělení

$$h(X) = \frac{\lambda e^{-\lambda X}}{e^{-\lambda X}} = \lambda = \text{const},$$

zatímco u Weibullova rozdělení

$$h(X) = \alpha\beta X^{\beta-1}.$$