

Doba do poruchy

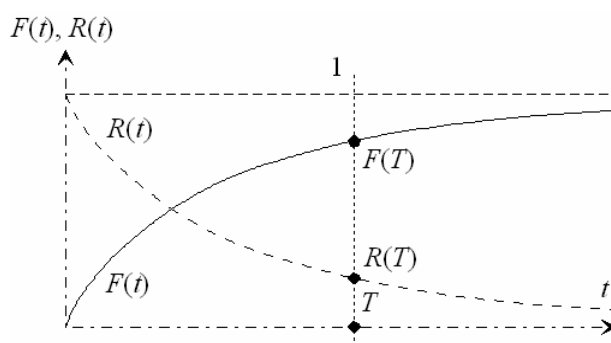
Uvažujme nějaký objekt, jenž je v čase $t = 0$ uveden do provozu. Tento objekt pracuje za určitých podmínek, o nichž budeme předpokládat, že se nemění s časem. V určitém čase $t = x$ se ale porouchá. Tato doba x se nazývá doba do poruchy. Co touto dobou ale rozumíme?

- Skutečná doba do poruchy měřená např. v sekundách (např. doba, po níž vedení pracuje bez poruchy).
- Počet cyklů (vypínač mnohokrát sepne a poté nesezne).
- Počet ujetých kilometrů (spolehlivost pneumatik automobilů).
- Počet skutečných provozních hodin (spolehlivost čerpadla).

V každém případě lze ale říci, že doba do poruchy x je nezáporná náhodná veličina, jejíž distribuční funkce má tvar

$$F(t) = P(x < t). \quad (01)$$

Tato funkce (jejíž typický tvar je znázorněn na obr. 1) vyjadřuje pravděpodobnost, že v intervalu $(0, t)$ dojde k poruše. A naopak spolehlivost $R(t) = 1 - F(t)$ (rovněž naznačená v obr. 1) udává pravděpodobnost, že v intervalu $(0, t)$ k poruše nedojde. Zatímco $F(t)$ je neklesající funkce času, je $R(t)$ nerostoucí funkce času. Samozřejmě, že $R(0) = 1$ a $R(\infty) = 0$.



Obr. 1: Příklad distribuční funkce doby do poruchy $F(t)$ a odpovídající spolehlivostní funkce $R(t)$.

Hodnota $F(T)$ udává, s jakou pravděpodobností dojde k poruše do doby T , naopak $R(T)$ udává, s jakou pravděpodobností do doby T k poruše nedojde

Hustota poruch a křivka intenzity poruch

Distribuční funkce $F(t)$ ovšem nemusí být obecně spojitá (a navíc hladká). Pokud ale absolutně spojitá je, existuje k ní funkce

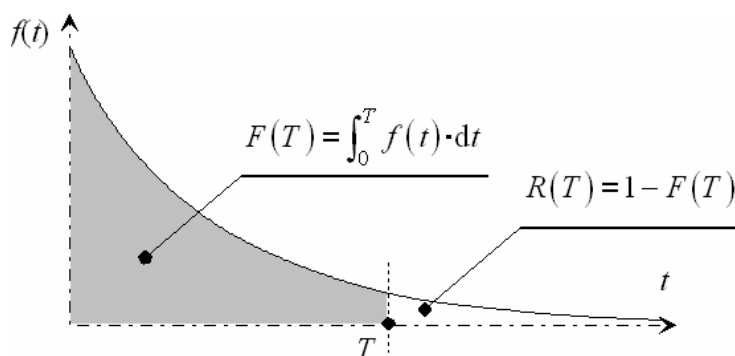
$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (02)$$

a ta se nazývá hustotou poruch. Příklad takové funkce $f(t)$, která odpovídá funkci $F(t)$ na obr. 1, je na obr. 2. Samozřejmě, že $\int_0^{\infty} f(t) \cdot dt = 1$

Konečně poměr

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (03)$$

se nazývá rizikovou funkcí, nebo také intenzitou poruch. Je to vlastně poměr hustoty pravděpodobnosti poruchy a příslušné spolehlivosti.

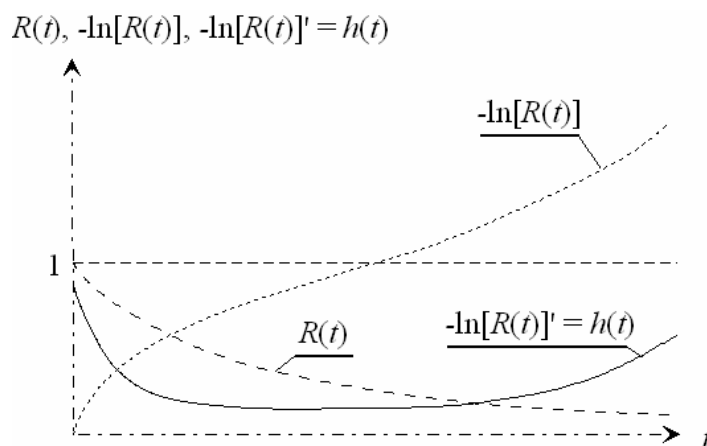


Obr. 2: Typický tvar funkce hustoty poruch $f(t)$

Podívejme se nyní, jak lze také výhodně křivku $h(t)$ vyjádřit. Z definice (03) plyne:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{dF(t)}{dt}}{R(t)} = \frac{\frac{d(1-R(t))}{dt}}{R(t)} = -\frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} = -\frac{d[\ln(R(t))]}{dt} \quad (04)$$

Jedná se tedy o derivaci záporného logaritmu funkce $R(t)$. Poněvadž $0 \leq R(t) \leq 1$, je vždy hodnota $-\ln(R(t))$ kladná a průběh její derivace lze odhadnout z tvaru této křivky. Pro křivku $R(t)$ na obr. 1 jsou křivky $-\ln(R(t))$ a $h(t)$ přibližně znázorněny na obr. 3.

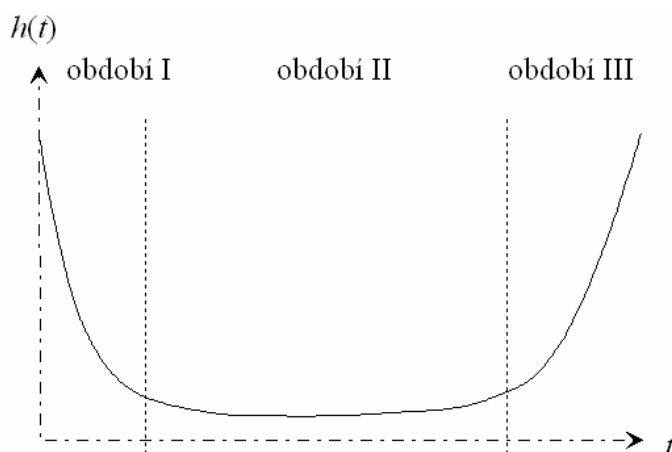


Obr. 3: Přibližný tvar funkcí křivek $-\ln(R(t))$ a $h(t)$ pro křivku $R(t)$ na obr. 1

V mnoha případech vypadá křivka $h(t)$ podobně jako na obr. 3. Zpočátku klesá na určitou hodnotu, která je pak po nějakou dobu přibližně konstantní, a poté zase narůstá. Z těchto důvodů se jí říká křivka vanová, a její tři oblasti jsou charakterizovány v následujících odstavcích.

První období I se nazývá obdobím časných poruch a je typická jejich zvýšeným množstvím (období dětských nemocí během jeho zavádění do provozu apod.). Tyto poruchy jsou zaviněny různými výrobními vadami, vadami při montáži i chybami při samotném návrhu.

Po jejich odstranění však intenzita poruch klesá, došlo k zabetnění výrobku či objektu a k poruchám spíše dochází z vnějších příčin. Intenzita poruch je téměř konstantní a toto období II se nazývá obdobím normálního využívání.



Obr. 4: Vanová křivka $h(t)$ s třemi typickými obdobími

Konečně období III je charakterizováno procesy stárnutí, projevuje se degradace materiálu a intenzita poruch opět narůstá. Toto období se nazývá období poruch dožitím.

Je zajímavé, že vanová křivka je velmi podobná i s úmrtnostní křivkou člověka. Vanovou křivku obvykle nejsme schopni modelovat nějakou jednoduchou analytickou funkcí. Zpravidla ji modelujeme různými funkcemi v jednotlivých obdobích, a to tak, aby pokud možno byla dostatečně hladká.

V určitých případech dokonce může u křivky $h(t)$ chybět období I (je-li např. pečlivě zkontrolovaný výrobek zaběhnutý přímo u výrobce) nebo období III (výrobek je z provozu vyřazen dříve, než vůbec začne stárnout).

Z definice funkcí $f(t)$ a $h(t)$ dále plyne, že mají rozměr čas^{-1} a udávají se v jednotkách 1/hod, 1/rok, 1/sec apod.

Ještě se podívejme na další interpretaci rizikové funkce (neboli funkce intenzity poruch) $h(t)$. Představme si, že do nějaké doby T nedošlo na sledovaném objektu k žádné poruše. Jaká je podmíněná pravděpodobnost p , že dojde k poruše v intervalu $\langle T, T + \Delta T \rangle$? Tuto podmíněnou pravděpodobnost stanovíme na základě již dříve uvedených vztahů. Zřejmě platí, že

$$p(T \leq t \leq T + \Delta T) = \frac{P(T \leq t \leq T + \Delta T)}{R(T)} = \frac{F(T + \Delta T) - F(T)}{R(T)} = \frac{F(T + \Delta T) - F(T)}{\Delta T} \cdot \Delta T.$$

Poslední úprava je sice umělá, ale poslouží nám k následujícímu: je-li ΔT dost malé, lze přibližně vzít, že

$$\frac{F(T + \Delta T) - F(T)}{\Delta T} \approx F'(T) = f(T)$$

a odtud

$$p(T \leq t \leq T + \Delta T) \approx \frac{f(T) \cdot \Delta T}{R(T)} = h(T) \Delta T. \quad (05)$$

Položíme-li zde $\Delta T = 1$, obdržíme

$$p(T \leq t \leq T + 1) \approx h(T). \quad (06)$$

Na základě tohoto vztahu můžeme zobecnit, že intenzita poruch $h(t)$ je lokální charakteristikou přibližně vyjadřující pravděpodobnost, že prvek, který se neporouchal do okamžiku t , se porouchá v intervalu $\langle t, t + 1 \rangle$.

Další charakteristiky doby do poruchy

Dobu do poruchy můžeme kvantifikovat i dalšími číselnými charakteristikami, zejména momenty a kvantily. Uvedeme si ty nejdůležitější z nich.

- Střední doba bezporuchového provozu $E = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt$. Pokusme se nyní tento vztah zjednodušit s využitím integrace „per partes“. Platí ($u = t$, $v' = f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$, $u' = 1$, $v = -R(t)$)

$$E = [-t \cdot R(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} R(t) \cdot dt \quad (07)$$

poněvadž lze ukázat, že první člen je nulový.

- Rozptyl doby do poruchy $D = \int_0^{\infty} (t - E)^2 \cdot f(t) dt$. Opět se tento vztah pokusíme zjednodušit. Platí

$$D = \int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt - 2E \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt + E^2 \int_0^{\infty} f(t) dt = \\ \int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt - 2E^2 + E^2 = \int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt - E^2$$

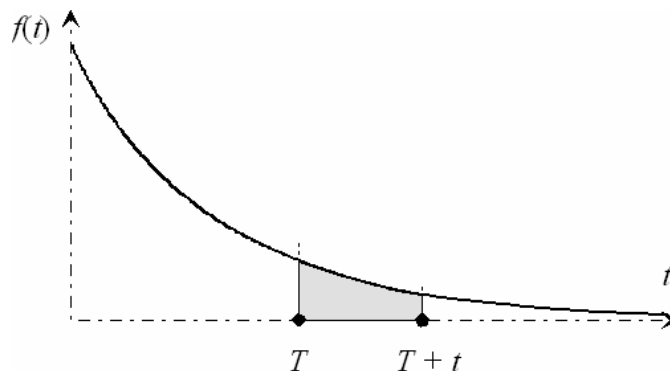
Nyní ještě metodou „per partes“ zjednodušíme první z integrálů (při použití podobné substituce jako v předchozím případě:

$$\int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt = [-t^2 \cdot R(t)]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} t \cdot R(t) dt = 2 \int_0^{\infty} t \cdot R(t) dt, \quad (08)$$

neboť první člen je rovněž nulový.

- Směrodatná odchylka doby do poruchy od její střední hodnoty $\sigma = \sqrt{D}$.
- Gama-procentní život T_{γ} je doba, za kterou dosáhne pravděpodobnost bezporuchového stavu objektu $\gamma\%$. Je definována vztahem $R(T_{\gamma}) = \gamma/100$, kde γ je dáno v %.

Ještě zavedme pojem intervalové spolehlivosti (něco takového se už dělalo v souvislosti s interpretací funkce intenzity $h(t)$, viz vztahy (07) a (08)). Uvažujme tedy objekt, který funguje po dobu T a hledejme pravděpodobnost jeho poruchy v intervalu $\langle T, T+t \rangle$, viz obr. 5. Ta je zřejmě závislá i na chování objektu do doby T . Zejména nás časem bude zajímat skutečnost, zda je tato spolehlivost závislá na zvolené době T .



Obr. 5: Ke stanovení intervalové spolehlivosti

Podmíněná pravděpodobnost (označme ji $F(T, t)$), že v uvedeném intervalu dojde k poruše, je dána vztahem

$$F(T, t) = \frac{F(T+t) - F(T)}{R(T)} = \frac{R(T) - R(T+t)}{R(T)} = 1 - \frac{R(T+t)}{R(T)} \quad (09)$$

a pravděpodobnost, že k poruše nedojde je

$$R(T, t) = 1 - F(T, t) = \frac{R(T+t)}{R(T)}. \quad (10)$$

Odhad spolehlivostních charakteristik

Nejprve si něco řekněme o odhadech charakteristik, které se definují pomocí pravděpodobnosti. Uvažujme n_0 stejných objektů, které byly uvedeny do provozu. Za čas t se jich však n porouchá, přičemž n je samozřejmě funkcí času a s časem narůstá. Dále předpokládáme, že objekty se ani neopravují, ani nevyměňují (pokud ano, do základního vzorku je již nezahrnujeme). Vůči hledně platí, že

$$\hat{F}(t) = \frac{n(t)}{n_0}, \quad \hat{R}(t) = 1 - \frac{n(t)}{n_0}. \quad (11)$$

Stříšky nad písmeny označují, že se jedná o statistické odhady. Jedná se totiž o to, že zkoumání můžeme provádět na různém počtu n_0 původních objektů (čím více, tím lépe). Dále označme $\Delta n(t)$ počet objektů, u nichž nastala porucha v období $\langle t, t + \Delta t \rangle$. Pak lze hustotu poruch vyjádřit jako

$$\hat{f}(t) = \frac{\hat{F}(t + \Delta t) - \hat{F}(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{n(t + \Delta t)}{n_0} - \frac{n(t)}{n_0}}{\Delta t} = \frac{\Delta n(t)}{n_0 \cdot \Delta t} \quad (12)$$

a podobně odpovídající intenzitu poruch

$$\hat{h}(t) = \frac{\hat{f}(t)}{\hat{R}(t)} = \frac{\Delta n(t)}{n_0 \cdot \Delta t} \cdot \frac{n_0}{n_0 - n(t)} = \frac{\Delta n(t)}{[n_0 - n(t)] \cdot \Delta t}. \quad (13)$$

Výraz $n_0 - n(t)$ přitom udává počet neporouchaných objektů v čase t .

Ze vztahu (12) plyne, že hustota poruch $\hat{f}(t)$ je rovna střednímu počtu poruch v jednotkovém intervalu (tedy pro $\Delta t = 1$) začínajícím v čase t vztažená k počátečnímu počtu objektů a jejich intenzita $\hat{h}(t)$ je stejná hodnota vztažená k množství objektů bez poruchy v čase t . Je zajímavé, že pro výpočet intenzity nemusíme znát počáteční množství objektů, ale jenom těch, které ještě v čase t fungují.

Střední doba bezporuchového provozu se získá modifikací vztahu (07), tedy jako

$$\hat{E} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} t_i, \quad (14)$$

kde t_i označuje okamžik poruchy i -tého objektu. Analogicky bychom určili rozptyl:

$$\hat{D} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} t_i^2 - \hat{E}^2. \quad (15)$$

Všechny uvedené charakteristiky a hodnoty se musí zjišťovat na co největších vzorcích a za co nejdélší dobu působení. Teprve pak se statistické odhady blíží pravděpodobnostním ukazatelům. Někdy, jsou-li známy mechanismy poruch, je lze určovat deterministicky. To je ale jev relativně řídký.

Změřené nebo jinak zjištěné hodnoty se vynášejí do grafů. Získanými body pak můžeme proložit křivku a s touto křivkou pak pracovat. Tento tzv. *neparametrický* způsob se ale vyu-

žívá zřídka. Nejčastěji se používá tzv. *parametrického* způsobu zpracování dat, při němž aproximujeme obdržené závislosti nějakým vhodným zákonem rozdělení. Parametry se ovšem musí určit tak, aby takový zákon rozdělení co nejlépe uvedená data vystihoval. To se realizuje několika metodami, z nichž nejužívanější jsou

- metoda největší věrohodnosti,
- metoda nejmenších čtverců.

Exponenciální rozdělení

Jedná se vlastně o Poissonovo rozdělení pro $x = 0$ (žádná porucha). Pak

$$R(t) = e^{-\lambda t}, F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, h(t) = \lambda, \\ E = \frac{1}{\lambda}, D = \frac{1}{\lambda^2}, R(T, t) = e^{-\lambda t}. \quad (16)$$

Intenzita poruch je tedy konstanta a intervalová spolehlivost nezávisí na době T . Toto rozdělení nemůže modelovat celou vanovou křivku, ale jenom její období II.

Poissonovo rozdělení

Zde je pravděpodobnost, že dojde ke k poruchám v intervalu $\langle 0, t \rangle$ dána vztahem

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (17)$$

s tím, že doby mezi jednotlivými poruchami jsou nezávislé veličiny o konstantní intenzitě λ . Nebere se ale v úvahu doba potřebná pro opravy, výměny, prostoje apod. Proto je možno Poissonovo rozdělení použít jen tam, kde tyto doby jsou zanedbatelné ve srovnání s dobami do poruchy.

Binomické rozdělení a jeho souvislost s rozdělením Poissonovým

Jak již bylo řečeno dříve, binomické rozdělení udává pravděpodobnost výskytu m jevů při n nezávislých pokusech.

$$P_n(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}, \quad m \leq n, \quad (18)$$

přičemž p je pravděpodobnost, že jev nastane a q že nenastane ($p + q = 1$).

Uvažujme nyní $m \ll n$ a n dostatečně velké. Pak lze přibližně psát

$$\binom{n}{m} \approx \frac{n^m}{m!}, \quad q^{n-m} \approx q^n = (1-p)^n$$

a po dosazení do (18) máme

$$P_n(m) \approx \frac{n^m}{m!} p^m (1-p)^n, \quad m \ll n. \quad (19)$$

Dále pro velká n a malá p platí

$$(1-p)^n \approx e^{-np},$$

takže (19) lze přepsat do tvaru

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}, \quad m \ll n, \quad (20)$$

což je již výraz totožný s (17). Velmi dobrá shoda nastává už pro $n \geq 20$, $p \leq 0.05$.

Zobecnělého binomického rozdělení (kde pravděpodobnosti, že objekt je bez poruchy, se liší objekt od objektu) se v energetice využívá velmi často. Například se pomocí něho určuje součinitel zabezpečení elektrárenské soustavy. Ten je definován následujícím způsobem:

mějme n elektrárenských bloků o výkonech $P_i, i=1, \dots, n$. Celkový instalovaný výkon je tedy $P_c = \sum_{i=1}^n P_i$. Pro každý z bloků je definována (pro daný čas t) pravděpodobnost bezporuchového provozu p_i (pravděpodobnost poruchy $q_i = 1 - p_i$). Dále je dán celkový požadovaný výkon na straně spotřeby (včetně všech možných ztrát, i v rozvodné síti) P_s , pro nějž musí platit $P_s \leq P_c$. Činitel zabezpečení φ udává pravděpodobnost, s níž bude toto zatížení P_s pokryto. Činitel $1 - \varphi$ naopak udává riziko nedostatku výkonu.

Weibullovo rozdělení

Představuje zobecnění exponenciálního rozdělení se dvěma parametry $\alpha > 0, \beta > 0$, přičemž

$$R(t) = e^{-(\beta t)^\alpha}, F(t) = 1 - e^{-(\beta t)^\alpha}, f(t) = \alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1} e^{-(\beta t)^\alpha}, h(t) = \alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1},$$

$$E = \frac{1}{\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), R(T, t) = e^{-\beta^\alpha [(t+T)^\alpha - T^\alpha]}.$$
(21)

Toto rozdělení často aproximuje rozdělení s monotónní intenzitou poruch. Pro $0 < \alpha < 1$ je toto rozdělení klesající, pro $\alpha = 1$ je konstantní (přičemž Weibullovo rozdělení zde přechází v exponenciální) a pro $\alpha > 1$ rostoucí (pro $1 < \alpha < 2$ roste konkávně, pro $\alpha = 2$ lineárně a pro $\alpha > 2$ konvexně). Weibullovo rozdělení se proto často využívá k modelování vanové křivky (ovšem v každém období má toto rozdělení jiné parametry).

Weibullovo rozdělení pro $0 < \alpha < 1$ dobře vystihuje rozdělení doby do poruchy prvků se skrytými vadami, které však nestárnou. Naopak, nemá-li prvek skryté vady, ale opotřebovávali se či stárne, může být popsán Weibullovým rozdělením s $\alpha > 1$ (často dokonce s $\alpha > 2$). Abychom stanovili příslušné parametry α a β , je třeba mít k dispozici daleko více údajů než v případě rozdělení exponenciálního, které je jednoparametrické.

Speciálním případem Weibullova rozdělení je rozdělení Rayleighovo, v němž $\alpha = 2$ a $\beta = \frac{\sigma}{2}$.

Normální rozdělení

V případě nezáporné doby do poruchy je musíme useknout zleva v bodě $t = 0$. Jestliže distribuční funkce má rozdělení

$$\varphi\left(\frac{x-E}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-E)^2}{2\sigma^2}}, \Phi\left(\frac{x-E}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-E)^2}{2\sigma^2}} d\xi,$$
(22)

kde E je střední hodnota a σ směrodatná odchylka neuseknutého rozdělení, má zleva useknuté rozdělení tvar

$$F(t) = 1 - \frac{\Phi\left(\frac{t-E}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)}, R(t) = \frac{\Phi\left(\frac{t-E}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)}, f(t) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{t-E}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)},$$

$$h(t) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{t-E}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{t-E}{\sigma}\right)}, E' = E + \sigma \cdot \frac{\varphi\left(\frac{E}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)},$$
(23)

kde E' je střední hodnota onoho useknutého rozdělení.

Teoretické výpočty jsou v tomto případě obtížné. Intenzita $h(t)$ je rostoucí a asymptoticky lineární. Normální rozdělení se užívá k modelování doby do poruchy stárnoucích výrobků, prvků, jež se opotřebovávají apod. Vždy se jedná o poruchy postupné.

U některých prvků se mohou objevovat jak poruchy náhlé z vnějších příčin, tak i poruchy postupné zaviněné opotřebením. Takový prvek simulujeme dvěma prvky v sérii, z nichž jeden podléhá jen poruchám náhlým, druhý pak postupným. Rozdělení doby do poruchy náhlé pak aproximujeme exponenciálním rozdělením, a do poruchy postupné normálním. Dostáváme tak trojparametrické rozdělení, jehož funkce $R(t)$ je dána jako

$$R(t) = e^{-\lambda t} \frac{\Phi\left(\frac{t-E}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)}. \quad (24)$$

Toto rozdělení má sice velký význam, ale práce s ním je velice obtížná. Obtížné je už i stanovení všech tří parametrů, zejména je-li střední doba do náhlé i postupné poruchy přibližně stejná.

Směsi rozdělení

U prvků, kde může docházet k různým typům poruch, používáme více rozdělení. Například poruchu v období I modelujeme funkcí

$$R(t) = e^{-(\beta t)^{\alpha_1}}, \quad 0 < \alpha_1 < 1, t > 0 \quad (25)$$

a v období III

$$R(t) = e^{-(\beta_2(t-a))^{\alpha_2}}, \quad \alpha_2 > 1, t > a > 0 \quad (26)$$

kde parametr a je zaručená doba života (před ní nemůže dojít k poruše v důsledku opotřebenění). Když nastává první porucha s pravděpodobností p a druhá s pravděpodobností $q = 1 - p$, můžeme spolehlivost prvku $R(t)$ vyjádřit jako

$$R(t) = p \cdot R_1(t) + (1-p) R_2(t). \quad (27)$$

Zde je nutno ještě nalézt parametr p , což je rovněž obtížné.

Spolehlivost jednoduchých systémů

Systémem rozumíme v teorii spolehlivosti soubor několika vzájemně vázaných prvků, které plní určitou funkci. Dílčí prvky sestávají ze součástí, jejich skupin, mohou to být i celá složitá zařízení ale také jednotlivé operace potřebné k dosažení nějakého výsledku.

Rozdělíme-li soustavu na prvky, můžeme ji popsat blokovým schématem. Prvky budeme pokládat za neobnovované a dvoustavové (prvek buď funguje nebo nefunguje), přičemž přechod mezi jednotlivými stavy je okamžitý, což odpovídá havarijním poruchám. O poruchách budeme předpokládat, že jsou vzájemně nezávislé, což ale zdaleka vždy nemusí platit.

Jednotlivé prvky v systému jsou zpravidla spojeny v sérii či paralelně. Sledovanou funkci systému bude přitom průchod signálu ze vstupu na výstup. Porouchaný prvek signál nepřenáší, soustava však může i při poruše více prvků (jsou-li zálohované) pracovat bez poruchy. Porucha systému nastává až tehdy, nemůže-li se signál ze vstupu na výstup vůbec dostat.

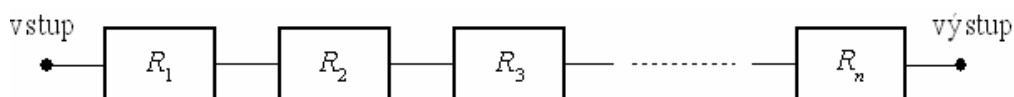
Základem práce se systémem je vyhodnocení jeho okamžitého stavu. Ten je dán kombinací stavu všech jeho jednotlivých prvků. Pro n různých prvků systému existuje celkem 2^n takových kombinací, které lze rozčlenit do dvou skupin. První odpovídá provozuschopnému stavu systému, druhá neprovozuschopnému. Tedy i pro vyšetřování systému se v tomto ohledu používá dvoustavový model.

Pravděpodobnost funkčnosti (tedy bezporuchového provozu) libovolného prvku je, jak víme z dřívějšíka, spolehlivostní funkcí času $R(t)$. Nejprve se budeme zajímat o spolehlivost systému v nějakém konstantním čase, v němž je tedy spolehlivost funkce všech prvků vyjádřena nějakou konstantou.

Prvky sériově

Pokud část systému pracuje správně jen při správné funkci všech jeho prvků, mluvíme o jejich sériovém zapojení (i když tomu ve skutečnosti tak být nemusí, zde se však jedná o pravděpodobnostní model). Představme si například systém, kdy ze vstupu na výstup signál prochází přes několik vypínačů. Aby tento signál prošel, musí být všechny vypínače sepnuty, což odpovídá sériovému modelu. Aby neprošel, stačí, když pouze jeden z vypínačů je ve stavu vypnuto, což však odpovídá systému paralelnímu (i když fyzicky tomu tak není).

Uvažujme sériové schéma podle obr. 6 s n prvky, z nichž každý má spolehlivost R_i , $i = 1, \dots, n$.



Obr. 6: Sériové zapojení prvků

Celková spolehlivost schématu (za předpokladu, že případné poruchy jsou nezávislé) je v tomto případě

$$R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \dots \cdot R_n. \quad (28)$$

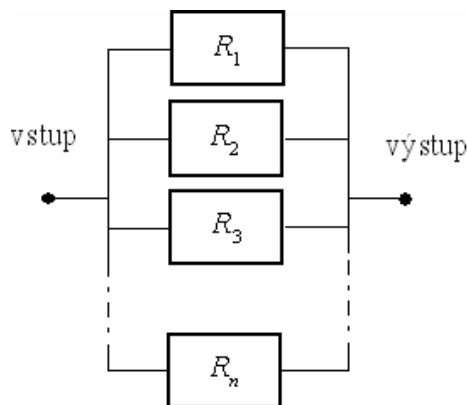
Prvky paralelně

Zde je podle obr. 7 situace opačná. Systém je funkční, dokud pracuje alespoň jeden prvek a nepracuje až poté, co jsou vyřazeny všechny prvky. Je-li nespolehlivost i – tého prvku F_i , je systém nefunkční s pravděpodobností

$$F = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \dots \cdot F_n, \quad (29)$$

což odpovídá spolehlivosti

$$R = 1 - F = 1 - F_1 \cdot \dots \cdot F_n = 1 - (1 - R_1) \cdot \dots \cdot (1 - R_n) \quad (30)$$



Obr. 7: Paralelní zapojení prvků

Velká většina spolehlivostních schémat obsahuje různé sériové kombinace prvků (paralelní se vyskytují méně často). Kombinace sériových a paralelních zapojení poskytuje zapojení smíšená, jejichž spolehlivost se získá s využitím vzorců (28) a (30).

Žádný z výšeodvozených vztahů nezávisí na čase. Ovšem za předpokladu, že se struktura systému s časem nemění, platí všechny vztahy i za předpokladu, že hodnoty F_i a R_i jsou funkce času. Jestliže například všechny prvky sériové kombinace jsou charakterizovány exponenciálním rozdělením $R_i = e^{-\lambda_i t}$, bude výsledná spolehlivost $R = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t}$ a intenzita poruch celého systému $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Takto jednoduchý vztah u paralelní kombinace však nezískáme.

S výslednými funkcemi F a R pak zacházíme stejně jako ve vztazích (01), (02), (03), (07), (08) apod., což znamená, že k nim umíme nalézt (ale velmi často je to obtížné) hustotu poruch $f(t)$, intenzitu poruch $h(t)$, střední dobu do poruchy E , rozptyl D , směrodatnou odchylku σ atd.

Například střední doba do poruchy se z výsledné spolehlivosti určí jako

$$E = \int_0^{\infty} R(t) \cdot dt \quad (31)$$

Někdy se stává, že pracujeme se systémem, který nelze převést na rozumnou kombinaci sériových a paralelních schémat. Při zpracování takového systému pak musíme využít obecnějších metod.

Citlivostní analýza systému

V libovolném systému je výsledná spolehlivost funkcí spolehlivosti jeho jednotlivých prvků, tedy $R = f(R_1, R_2, R_3, \dots, R_n)$. Totální diferenciál této funkce pak lze vyjádřit jako

$$dR = \frac{\partial R}{\partial R_1} \cdot dR_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2} \cdot dR_2 + \frac{\partial R}{\partial R_3} \cdot dR_3 + \dots + \frac{\partial R}{\partial R_n} \cdot dR_n \quad (32)$$

Určíme-li dílčí parciální derivace v (31), získáme představu, který prvek nejvíce ovlivňuje spolehlivost celého systému (zvýšení spolehlivosti takového prvku pak nejvíce přispěje ke zvýšení spolehlivosti celého systému; na celou věc je ovšem nutno pohlížet i z ekonomického hlediska...).

Redundantní a částečně redundantní systémy

Plně redundantním systémem rozumíme paralelní systém, který pracuje tehdy, když bez poruchy pracuje alespoň jeden prvek. Částečně redundantním systémem je paralelní systém,

v němž musí pracovat alespoň m prvků z n . Představme si například, že výkon z elektrárny je vyveden čtyřmi paralelními vedeními, z nichž alespoň tři musí být v provozu (poněvadž dvě vedení na jeho vývod nestačí).

Pro jednoduchost nyní uvažujme, že všechny paralelní prvky mají stejné charakteristiky F a R jakožto funkce času. Pak pravděpodobnost, že m prvků bude fungovat v době $\langle 0, t \rangle$, lze vyjádřit klasickým binomickým vzorcem

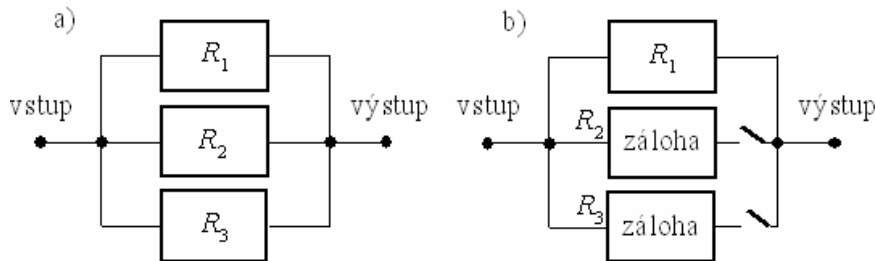
$$R_m^n(t) = \binom{n}{m} R^m(t) F^{n-m}(t) \quad (33)$$

Pokud ovšem tyto charakteristiky jsou různé, musíme výslednou spolehlivost vypočítat z roz-násobení součinu

$$(R_1 + F_1) \cdot (R_2 + F_2) \cdot (R_2 + F_2) \cdot \dots \cdot (R_n + F_n). \quad (34)$$

Redundantní systém se zálohováním

Někdy se používá část systému s tzv. zálohovaným zapojením. To znamená, že některý z paralelních prvků je vypnut a spouští se jen v okamžiku poruchy jiného prvku. Klasické paralelní a zálohované paralelní zapojení se třemi prvky je na obr. 8a a 8b.



Obr. 8: a) paralelní zapojení tří prvků, b) zapojení jednoho prvku s dvojnásobným zálohováním

V mnoha případech nelze například použít dvou prvků paralelně (regulační obvody) a další prvek tak tvoří stoprocentní zálohu. Předpokládejme nyní, že přepínače ve schématu b) jsou stoprocentně spolehlivé. Dále předpokládejme, že u záložních prvků nedojde k poruše, pokud jsou v nečinnosti. Záložní prvek může mít tedy poruchu až tehdy, měl-li poruchu původní prvek a místo něho tento záložní prvek začal fungovat.

Máme-li k dispozici jeden původní prvek a jeden prvek záložní (a poruchy na nich jsou nezávislé!!!), dostáváme pro výslednou spolehlivost R formálně stejný vztah, jako pro paralelní kombinaci dvou prvků, tedy

$$R = 1 - F_1 \cdot F_2 = 1 - (1 - R_1) \cdot (1 - R_2).$$

Rozdíl je ovšem v tom, že spolehlivost záložního prvku jakožto funkce času je v čase posunuta o dobu, v níž došlo k poruše prvku prvního.

Horší případ nastává tehdy, nemůžeme-li pokládat přepínač za absolutně spolehlivý. Uvažujme nejprve, že může selhat pouze při přepínání, a pak už funguje spolehlivě. Označme pravděpodobnost, že zapracuje spolehlivě, symbolem p_p . Pak zřejmě

$$R = 1 - (1 - R_1) \cdot (1 - p_p R_2).$$

Pokud se ale může přepínač porouchat jak při přepnutí, tak i během normální činnosti, je situace ještě obtížnější. Označíme-li spolehlivost přepínače R_p , vyjde

$$R = (1 - (1 - R_1) \cdot (1 - p_p R_2)) \cdot R_p$$

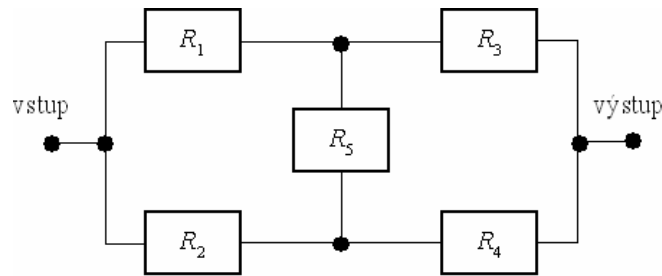
(vypínač je jakoby v sérii při jakékoli kombinaci).

Do všech těchto vztahů lze samozřejmě zavést příslušné funkce času a provést širší zobecnění všech dosavadních úvah.

Složité systémy

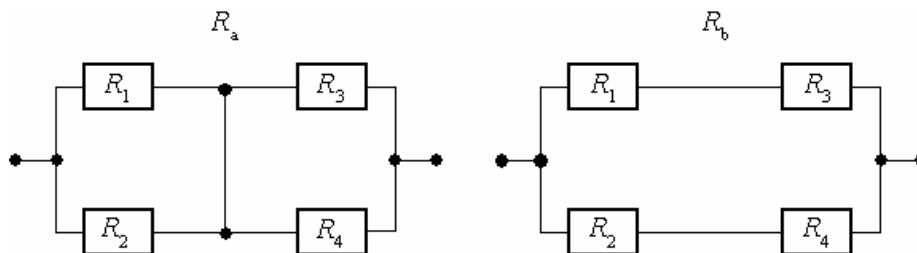
V řadě případů nejsme bohužel schopni složité schéma na sérioparalelní kombinace. Příkladem je můstkové zapojení na obr. 9. V takových případech musíme použít poněkud sofistikovanější metody. Jedná se o

- metodu rozkladů,
- metodu minimálních řezů,
- metodu minimálních drah,
- metodu stromu poruch,
- metodu incidenčních matic
- a některé další.



Obr. 9: Příklad složitějšího systému (ve tvaru můstku)

Metodu rozkladu lze použít tehdy, jsou-li poruchy dílčích prvků nezávislé. Metoda je založena na rozložení systému na několik jednoduchých podsystémů, které mají jednodušší strukturu. V systému nejprve zvolíme klíčový prvek, což je prvek, jímž prochází nejvíce spojení vstupu na výstup. V našem případě se zřejmě jedná o prvek 5 se spolehlivostí R_5 . Pak se výsledná spolehlivost R rovná součtu součinu R_5 a spolehlivosti schématu, v němž $R_5 = 1$ a součinu $(1 - R_5)$ se spolehlivostí schématu, kde $R_5 = 0$ (tedy $R = R_5 \cdot R_a + (1 - R_5) \cdot R_b$). Vše je zřejmé z obr. 10.



Obr. 10: K metodě rozkladu

Spolehlivost R_a je spolehlivost dvou paralelních soustav v sérii, takže

$$R_a = [1 - (1 - R_1) \cdot (1 - R_2)] \cdot [1 - (1 - R_3) \cdot (1 - R_4)]$$

zatímco spolehlivost R_b je spolehlivost dvou sériových soustav paralelně, takže

$$R_b = 1 - (1 - R_1 R_3) \cdot (1 - R_2 R_4).$$

Metoda minimálních řezů má výhodu v tom, že ji lze snadno zalgoritmizovat pro počítač. Minimálním řezem je přítom soubor prvků, jejichž současná porucha způsobí celkovou poruchu systému. Pokud ale kterýkoli z těchto prvků nemá poruchu, systém funguje.

Podívejme se opět na obr. 9. Zde jsou takové řezy 4 (prvky 1 a 2, prvky 3 a 4, prvky 1, 5 a 4 a konečně prvky 2, 5 a 3). Jaká je pravděpodobnost, že se současně porouchají všechny prvky v jednotlivých řezech?

- řez 1,2: jev $P_I, F_I = F_1 \cdot F_2,$
- řez 3,4: jev $P_{II}, F_{II} = F_3 \cdot F_4,$
- řez 1,5,4: jev $P_{III}, F_{III} = F_1 \cdot F_5 \cdot F_4,$
- řez 2,5,3: jev $P_{IV}, F_{IV} = F_2 \cdot F_5 \cdot F_3,$

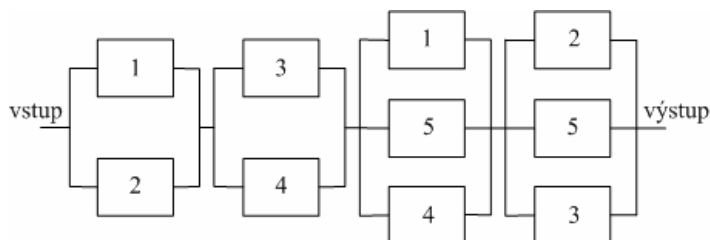
Pravděpodobnost poruchy systému lze vypočítat jako pravděpodobnost sjednocení poruch všech uvedených minimálních řezů. Zde je však třeba uvědomit si, že zde existují i průniky. Proto musíme pro výpočet pravděpodobnosti poruchy systému využít rozšířené de Morganovy formule, podle níž

$$F = F(P_I \cup P_{II} \cup P_{III} \cup P_{IV}) = F(P_I) + F(P_{II}) + F(P_{III}) + F(P_{IV}) - F(P_I \cap P_{II}) - F(P_I \cap P_{III}) - F(P_I \cap P_{IV}) - F(P_{II} \cap P_{III}) - F(P_{II} \cap P_{IV}) - F(P_{III} \cap P_{IV}) + F(P_I \cap P_{II} \cap P_{III}) + F(P_I \cap P_{II} \cap P_{IV}) + F(P_I \cap P_{III} \cap P_{IV}) + F(P_{II} \cap P_{III} \cap P_{IV}) - F(P_I \cap P_{II} \cap P_{III} \cap P_{IV})$$

A teď k jednotlivým pravděpodobnostem poruchy: např. $F(P_I \cap P_{III})$ je pravděpodobnost toho, že dojde současně k jevům P_I a P_{III} . Tedy, že se současně porouchají prvky 1, 2, 5 a 4. Je tedy jasné, že $F(P_I \cap P_{III}) = F_1 \cdot F_2 \cdot F_4 \cdot F_5$ a podobně to bude s ostatními pravděpodobnostmi.

Metoda drah je doplňková k metodě řezů. Nejprve se stanoví počet minimálních drah, to znamená takových různých drah, které probíhají od vstupu k výstupu a každý uzel procházejí nanejvýš jednou. Pak je výsledná spolehlivost dána spolehlivostí sjednocení všech těchto drah (jsou sériové). Při výpočtu se zase uplatní zobecněné de Morganovy formule.

Podívejme se nyní na aplikaci těchto metod pro případ schématu na obr. 9:



Obr. 11: Překreslení schématu na obr. 9

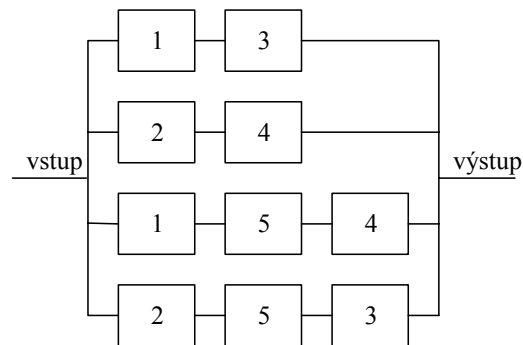
Začneme metodou minimálních řezů. Celková pravděpodobnost poruchy je nyní (musíme uvážit, že sériová spolehlivost je paralelní poruchovostí a naopak)

$$F = 1 - (1 - F_1 F_2)(1 - F_3 F_4)(1 - F_1 F_5 F_4)(1 - F_2 F_5 F_3)$$

nebo se (byť poněkud složitěji) vyjádří pomocí spolehlivostí.

Zatím jsme ovšem předpokládali, že uvedené dráhy lze stanovit vizuálně, což je v případě složitějších schémat špatně schůdné. V takových případech (teplárenství) je nutno vyjít z funkčního schématu systému, jenž se vytvoří na základě jeho komplexní znalosti. Musí zde být jasně a jednoznačně vymezena jeho hranice a náplň. Funkční schéma samotné popisuje vazby mezi dílčími prvky systému a může se měnit v závislosti na stávajícím provozním stavu. Spolehlivostní schéma je pak nutno sestavit na základě tvaru funkčního schématu pro daný typ poruchy v systému. Soubor minimálních řezů je pak nutno stanovit na základě analýzy možných příčin poruchy systému.

Jak již bylo naznačeno dříve, metoda minimální dráhy je doplňková (duální) k metodě minimálních řezů. Jedná se o všechny dráhy spojující vstup a výstup, přičemž ale žádná dráha nesmí projít žádným uzlem více než jednou. Pro spolehlivostní výpočet se řadí tyto dráhy paralelně (obr. 12).



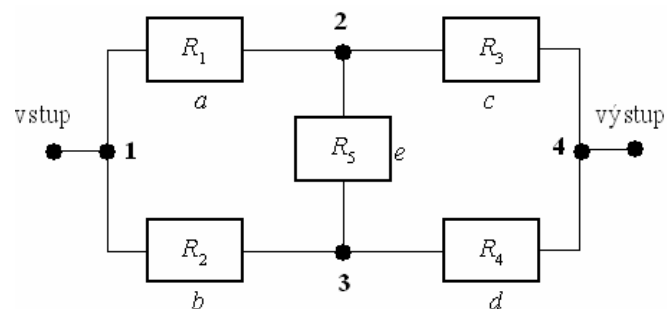
Obr. 12. K metodě minimálních drah

Celková spolehlivost schématu je nyní dána vztahem

$$R = 1 - (1 - R_1 R_3)(1 - R_2 R_4)(1 - R_1 R_5 R_4)(1 - R_2 R_5 R_3)$$

Porovnáním obou metod (jež jsou zdánlivě stejně náročné) však snadno dojdeme k závěru, že výhodnější je metoda řezů. Důvod je následující: při výpočtech se v této metodě objevují součiny několika hodnot F . Vzhledem k tomu, že tyto hodnoty jsou zpravidla malé, např. 0.03, součin tří takových čísel je už prakticky zanedbatelný a při výpočtech se může zanedbat. To však nelze u metody minimálních drah, protože zde se násobí hodnoty R a ty jsou naopak zpravidla velké (blíží se k jedničce).

Další používanou metodou je metoda incidenční matice. Ta ale nepracuje s prvky, ale s uzly. Podívejme se znovu na obr. 9 a označme si v něm uzly podle obr. 13.



Obr. 13. Označení uzlů pro tvorbu incidenční matice

Incidenční matice M (jejíž řád je roven počtu uzlů) obsahuje Booleovské proměnné, které vyjadřují spojení mezi dílčími uzly ve směru šířícího se signálu, dané stavem případného spojovacího elementu. Podívejme se například na prvek m_{23} matice M . Tento prvek popisuje stav elementu 5, jenž je označen písmenem e . Hodnota $e = 0$, je-li element mimo provoz a $e = 1$, je-li v provozu. Stejně je tomu v případě prvku m_{32} .

U prvku m_{24} je to podobné, platí, že $m_{24} = c$ kde $c = 0$ nebo $c = 1$ v závislosti na tom, zda je prvek v poruše nebo funguje. Ale prvek m_{42} je roven identicky nule, poněvadž signál se z bodu 4 do bodu 2 nešíří. Prvky v diagonále matice jsou rovny jedné. Dostáváme tak

$$I = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & e & c \\ 0 & e & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Základem metody pro určení spolehlivosti systému je transformace této matice do tvaru, který poskytne informaci o všech minimálních drahách mezi vstupem a výstupem. To se provádí tak, že se postupně eliminují vnitřní uzly (v našem případě 2 a 3), nebo umocňováním matice.

Eliminace vnitřních uzlů se provádí následujícím způsobem: chceme-li odstranit uzel k přepočteme všechny prvky v matici mimo k – tou řádku a k – tý sloupec následovně:

$$m'_{i,j} = m_{i,j} + m_{i,k} \cdot m_{k,j}$$

k – tou řádku a k – tý sloupec poté vyloučíme, takže dostaneme novou matici, jejíž řád je o jednu nižší. Tak budeme pokračovat, až dostaneme matici 2×2 , v níž prvek v prvním řádku a druhém sloupci dává onu informaci. Pokud se některá z Booleovských proměnných objeví ve vyšší než první mocnině, příslušný člen neuvažujeme (signál by procházel přes příslušný element vícekrát),

Tak například vylučme z matice I třetí uzel. Obdržíme

$$I' = \begin{pmatrix} 1 & a+be & bd \\ 0 & 1+e^2 & c+ed \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poté vylučme druhý uzel. Výsledek má tvar

$$I'' = \begin{pmatrix} 1 & bd + (a+be)(c+ed) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bd + ac + bec + aed + be^2d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde ve výsledném členu neuvažujeme prvek s e^2 . Takže

$$I'' = \begin{pmatrix} 1 & bd + ac + bec + aed \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je jasně patrné, že výsledek odpovídá obr. 12.

Podobně bychom mohli vytvářet mocniny matice M , a to tak dlouho, až se po vyloučení členů s mocninami rovněž nemění.

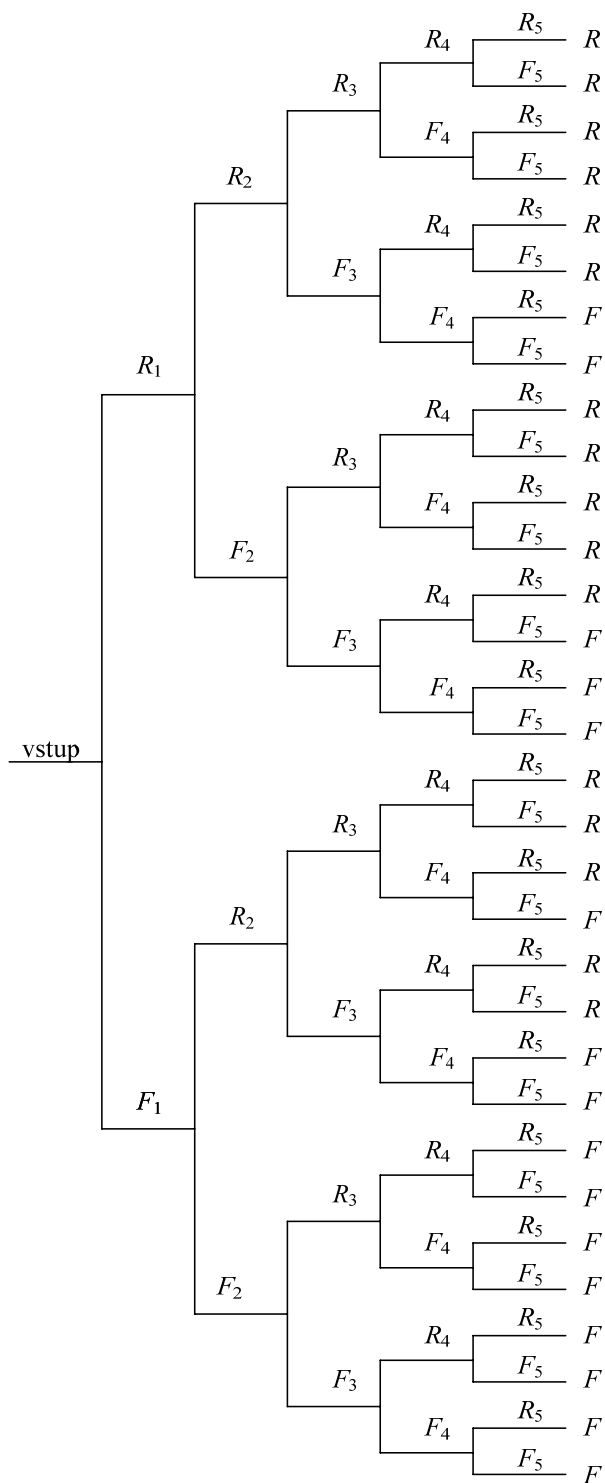
Velmi univerzální metodou je rovněž metoda stromu událostí, lze jí použít jak tam, kde jsou všechny prvky systému v provozu, tak i pro zálohované systémy. Rozdíl je jen v tom že v prvním případě nemusíme uvažovat pořadí poruch prvků, ve druhém ano (musíme respektovat to, jak se události mohou vyvíjet).

Kdybychom opět vzali v potaz schéma na obr. 9 (5 elementů, přičemž každý má dva možné stavy), vedl by strom na schéma s 2^5 větvemi, z nichž všechny jsou nezávislé. Tento strom je rozkreslen na obr. 14.

Spolehlivosti dílčích větví (které vedou ke spolehlivosti celého systému) se poté nasčítávají. Tak například několik prvních členů vedoucích k výpočtu spolehlivosti schématu lze zapsat ve tvaru

$$R = R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 + R_1 R_2 R_3 R_4 F_5 + R_1 R_2 R_3 F_4 R_5 + R_1 R_2 R_3 F_4 F_5 \dots$$

Stejným způsobem by se daly určit i poruchovosti. Tvorba úplného stromu je ovšem pro více elementů velmi časově náročná.



Obr. 14. Úplný strom událostí

Konečně existuje metoda stromu poruch, která vychází z opačné filosofie, než metoda stromu událostí. Předpokládá se, že v systému došlo k poruše a prostřednictvím stromu poruch se určují její příčiny. Dostáváme tak schéma, jež obsahuje různé kombinace poruch pod-systému, elementů apod.

Tato metoda se často užívá jen kvalitativně, poněvadž je schopná dát informaci, z jakých důvodů může porucha nastat. Na tomto základě pak lze učinit opatření, aby se příslušné poruše předešlo.